COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIII 1975 FASC. 1

QUELQUES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES BORNÉES

PAR

F. GRAMAIN ET Y. MEYER (ORSAY)

Les fonctions moyenne-périodiques et bornées ne sont que rarement presque-périodiques, comme le montre le théorème ci-dessous.

THÉORÈME. *Soit $\theta > 1$ un nombre réel et $\Lambda(\theta)$ l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum_{k\in N} \varepsilon_k \theta^k$, avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *θ est un nombre de Pisot.*

(ii) *Toute fonction continue bornée (de variable réelle à valeurs complexes) dont le spectre est contenu dans $\Lambda(\theta)$ est presque-périodique (au sens de Bohr).*

(iii) *Toute fonction moyenne-périodique bornée dont le spectre est contenu dans $\Lambda(\theta)$ est presque-périodique.*

(iv) *Toute fonction moyenne-périodique dont le spectre est contenu dans $\Lambda(\theta)$ est presque-périodique.*

Si θ est un nombre de Pisot, $\Lambda(\theta)$ est un ensemble cohérent de fréquences ([3], p. 104 et theorem IV, p. 110, ou [4], p. 18 et théorème 8, p. 33) et les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont vérifiées.

Dans le cas où θ n'est pas un nombre de Pisot, nous allons construire une fonction continue, bornée et même moyenne-périodique [2], à spectre contenu dans $\Lambda(\theta)$ et non presque-périodique. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit*

$$f_n(X) = \prod_{j=0}^{j=k(n)} \sin\pi(\theta^j x + a)$$

où $k(n)$ est une suite croissante d'entiers naturels et a un nombre rationnel tel que $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$. Alors, si θ n'est pas un nombre de Pisot, $f_n(x)$ tend vers zéro uniformément sur tout compact, quand $n \to +\infty$.

Montrons d'abord que $f_n(x)$ converge simplement vers zéro. On a $f_n(0) = (\sin\pi a)^{k+1}$, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$, puisque $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$.

Soit $x \neq 0$. Si $f_n(x)$ ne tendait pas vers zéro, on aurait, pour tout entier naturel j,

$$\pi(\theta^j x + a) = \frac{\pi}{2} + \pi q_j + \pi r_j \quad \text{avec } q_j \in \mathbf{Z} \text{ et } \sum_{j \in \mathbf{N}} |r_j|^2 < \infty.$$

Posons $a = M/N$, alors $\theta^j x = -M/N + \frac{1}{2} + q_j + r_j$, soit

$$2Nx\theta^j \equiv 2Nr_j \pmod 1$$

et θ serait un nombre de Pisot ([3], theorem XII, p. 29).

Cela montre que $f_n(x)$ converge simplement vers zéro. D'autre part, on a $|f_{n+1}(x)| \leqslant |f_n(x)|$ pour tout x, et le théorème de Dini achève la démonstration du lemme 1.

Soit

$$P_n(x) = f_n(x) \cos \pi(\theta^l x + a) \cos \pi(\theta^m x + a) \exp[i\pi x(1 + \theta + \ldots + \theta^k + \theta^l + \theta^m)].$$

où $l = l(n)$ et $m = m(n)$ sont deux suites d'entiers naturels telles que $l(n) \geqslant Ak(n)$, $m(n) \geqslant Al(n)$ et $k(n+1) \geqslant Am(n)$, le réel A étant strictement supérieur à 1. D'après le lemme 1, le polynôme trigonométrique $P_n(x)$ converge vers zéro uniformément sur tout compact quand $n \to +\infty$. De plus, son spectre est contenu dans $\Lambda(\theta)$ et l'on a

$$\sum_{n \geqslant 1} |P_n(x)| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |\sin \pi(\theta^{l(1)} x + a) \sin \pi(\theta^{m(1)} x + a) \ldots$$

$$\ldots \sin \pi(\theta^{l(n-1)} x + a) \sin \pi(\theta^{m(n-1)} x + a) \cos \pi(\theta^{l(n)} x + a) \cos \pi(\theta^{m(n)} x + a)| \leqslant 1$$

en vertu du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit $\{a_j\}_{j \geqslant 1}$ une suite de nombres réels. Alors*

$$\sum_{j \geqslant 1} |\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_{2j-2} \cos a_{2j-1} \cos a_{2j}| \leqslant 1.$$

Il existe donc une sous-suite des P_n (que l'on notera encore P_n) telle que la série $\sum_{n \geqslant 1} P_n(x)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue, bornée par 1 et à spectre contenu dans $\Lambda(\theta)$.

Le polynôme trigonométrique P_n est la somme de 2^{k+3} termes d'amplitude $2^{-(k+3)}$. Soit $R_{n+1}(x)$ la somme des termes du polynôme trigonométrique $P_{n+1}(x)$ dont les fréquences sont inférieures au double de la plus haute fréquence de $P_n(x)$, et soit $P_{n+1} = Q_{n+1} + R_{n+1}$. Un calcul simple montre que $R_{n+1}(x)$ est la somme d'au plus $2^{m(n)+B}$ termes d'amplitude $2^{-[k(n+1)+3]}$, où B ne dépend que de A et de θ. On a donc

$$\|R_{n+1}\|_\infty \leqslant 2^{B-3+m(n)-k(n+1)}$$

et la série $\sum_{n\in N} \|R_{n+1}\|_\infty$ est convergente puisque $k(n+1) \geqslant Am(n)$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 1} Q_n(x)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g(x)$, continue, bornée et à spectre contenu dans $A(\theta)$.

Supposons que $g(x)$ soit presque-périodique et appelons $v_j(x)$, $j \geqslant 1$, le *noyau de de la Vallée-Poussin*. Alors $g(x)$ est uniformément continue et $v_j * g$ converge uniformément vers g sur toute la droite réelle. Mais on a

$$2 \sup \operatorname{Spec} Q_n < \inf \operatorname{Spec} Q_{n+1},$$

donc pour un choix convenable d'une suite de j tendant vers l'infini, $v_j * g$ décrit l'ensemble des sommes partielles $\sum_{n=1}^{n=N} Q_n(x)$. En conséquence, il faudrait que $\|Q_n\|_\infty$ tende vers zéro quand $n \to +\infty$, et par suite que $\|P_n\|_\infty \leqslant \|Q_n\|_\infty + \|R_n\|_\infty$ tende aussi vers zéro. Le lemme suivant appliqué deux fois grâce au fait que $l(n) \geqslant Ak(n)$ et $m(n) \geqslant Al(n)$, montre qu'alors $\|f_n\|_\infty$ tendrait vers zéro:

LEMME 3. *Soit $M > 2$ un nombre réel. Il existe une constante $C > 0$ telle que, si φ est une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans le compact $[-K, K]$ et si ψ est une fonction périodique dont la période est inférieure à $(MK)^{-1}$, on ait*

$$\|\varphi\psi\|_\infty \geqslant C \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_\infty.$$

Ce lemme est prouvé dans [5], p. 510 (lemme 1), dans le cas des normes L^1, mais la démonstration vaut également pour les normes L^∞.

Etudions donc $\|f_n\|_\infty$. Si θ est transcendant, on a $\|f_n\|_\infty = 1$, d'après le théorème de Kronecker, et $g(x)$ n'est pas presque-périodique.

Si θ est algébrique sur le corps $\boldsymbol{Q}$ des rationnels, soit

$$P(X) = a_0 X^d + \ldots + a_d \in \boldsymbol{Z}[X]$$

son polynôme minimal. Soient $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ le groupe des réels modulo 1, $k \geqslant 0$ un entier positif et G le sous-groupe de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^{k+1}$ formé des suites $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$ telles que

$$a_0 \varphi_{d+j} + \ldots + a_d \varphi_j \equiv 0 \pmod 1$$

pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant k-d$ (si $k < d$, il n'y a pas de condition). Soit enfin H le sous-groupe de G défini par les suites $x\theta^j \pmod 1$, $0 \leqslant j \leqslant k$, lorsque x décrit la droite réelle. En reprenant alors la démonstration de la proposition 10, p. 229 de [3], on montre que H est dense dans G. Il en résulte aussitôt le lemme suivant:

LEMME 4. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \prod_{j=0}^{k} |\sin\pi(\theta^j x+a)| = \sup_{G} \prod_{j=0}^{k} |\sin\pi(\varphi_j+a)|.$$

On aura donc $\|f_n\|_\infty = 1$ pour $k(n) \geqslant d$, si on peut choisir les φ_j et a de sorte que

$$a+\varphi_0 \equiv a+\varphi_1 \equiv \ldots \equiv a+\varphi_k \equiv \tfrac{1}{2} \pmod 1.$$

Pour cela, il suffit qu'on ait, avec les notations du lemme 4,

$$a_0(\tfrac{1}{2}-a)+\ldots+a_d(\tfrac{1}{2}-a) \equiv 0 \pmod 1$$

ou

$$a(a_0+\ldots+a_d) \equiv \tfrac{1}{2}(a_0+\ldots+a_d) \pmod 1.$$

Soit $s=0$ ou $s=\frac{1}{2}$ défini par $s \equiv \frac{1}{2}(a_0+\ldots+a_d) \pmod 1$. Choisissons les entiers a_i de sorte que $a_0+\ldots+a_d > 0$. On ne peut, en effet, avoir $a_0+\ldots+a_d = P(1) = 0$ puisque P est irréductible. Alors, pour $a_0+\ldots+a_d \neq 1$, il suffit de choisir

$$0 \leqslant a = \frac{s}{a_0+\ldots+a_d} < \frac{1}{2},$$

et $g(x)$ n'est pas presque-périodique.

Dans le cas où $a_0+\ldots+a_d = 1$, on peut faire la même construction à partir de θ^h, où h est un entier supérieur à 1, tel que θ^h ne soit pas un nombre de Pisot, puisque $\Lambda(\theta^h)$ est contenu dans $\Lambda(\theta)$. Comme θ n'est pas un nombre de Pisot, il existe une infinité de tels entiers. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

LEMME 5. *Soit $\theta > 1$ un nombre algébrique, et $P_h(x)\in\mathbf{Z}[x]$ le polynôme minimal de θ^h, où h est un entier supérieur à 1. Alors $|P_h(1)| \to +\infty$, quand $h\to+\infty$.*

En effet, soit $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ les conjugués de θ. On a

$$|P_h(1)| \geqslant \prod_j |1-\theta_j^h|,$$

le produit étant pris sur un ensemble d'indices j, tel que θ_j^h décrive l'ensemble des conjugués de θ^h.

Si $|\theta_j|<1$, alors $\theta_j^h \to 0$ et $|1-\theta_j^h| \to 1$, quand $h\to+\infty$.

Si $|\theta_j|>1$, alors $|1-\theta_j^h| \to +\infty$, quand $h\to+\infty$, en particulier $|1-\theta^h| \sim \theta^h \to +\infty$, quand $h\to+\infty$.

Si $|\theta_j|=1$, θ_j n'est pourtant pas une racine de l'unité, et un théorème de Baker [1] montre qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que $|1-\theta_j^h| \geqslant c_1 h^{-c_2}$.

Par suite, il existe une constante positive c, telle que, pour h assez grand $|P_h(1)| \geqslant c\theta^{h/2}$, et le lemme 5 est démontré.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Baker, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms,* Acta Arithmetica 21 (1972), p. 117-129.
[2] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées,* Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 7 (1957), p. 292-315.
[3] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis,* vol. 2, North-Holland Mathematical Library, 1972.
[4] — *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques,* Astérisque 1 (1973), Société mathématique de France.
[5] — *Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$,* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4-ème série, 1 (1968), p. 499-580.

Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1973;
en version modifiée le 17. 5. 1974