COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXI 1974 FASC. 1

w-DÉPENDANCE ET DÉPENDANCE GÉNÉRALE AU SENS DE MARCZEWSKI

PAR

MARIAN MALEC (KRAKÓW)

1. Soit $\mathfrak{A} = (A, F)$ une algèbre, où

(1) A est l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle de classe C^∞ dans un intervalle I et F est un ensemble d'opérations fondamentales dans A.

Désignons par $\mathscr{A}$ la classe des opérations algébriques de l'algèbre $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des opérations qui sont des superpositions des opérations fondamentales, et par $\mathscr{A}^{(n)}$ la classe des opérations algébriques de n variables.

D'après Marczewski (voir [1]), $N \subset A$ est dit un *ensemble de fonctions indépendantes* dans l'algèbre (A, F) lorsque pour les éléments arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in N$ et pour tout couple $g, h \in \mathscr{A}^{(n)}$ la condition $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = h(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ entraîne l'identité de g et h dans A^n.

Un système de fonctions de l'ensemble A qui ne sont pas indépendantes dans ce sens est appelé *dépendant*.

Comparons la notion de dépendance au sens de Marczewski à celle de w-dépendance de fonctions d'après laquelle un système fini $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ de fonctions de classe C^∞ dans un intervalle I est dit *w-dépendant* dans cet intervalle lorsque le wronskien des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ s'annule dans I (cette définition a été donnée par Moszner dans sa note [2]), tandis qu'un système infini est dit *w-dépendant* dans I lorsqu'il en existe un sous-système fini qui est w-dépendant dans I.

Nous réaliserons la comparaison susdite en admettant la condition supplémentaire que

(2) chaque opération $f \in F$ est engendrée par une fonction réelle de n variables (où n dépend de f), définie dans l'espace euclidien E_n et ayant les dérivées partielles de rang quelconque.

Cette condition est restrictive parce qu'en la négligeant, une opération fondamentale pourrait, par exemple, assigner à tout couple d'éléments de A la somme de leurs dérivées. Remarquons tout-de-même que toute opération engendrée par une fonction $E_n \to E_1$, admet aussi un générateur de classe C^∞.

2. THÉORÈME. *Si les conditions* (1) *et* (2) *sont satisfaites, il n'y a dans la famille des algèbres* $\mathfrak{A} = (A, F)$ *aucune algèbre dans laquelle l'ensemble* Z *des systèmes dépendants de* A *serait égal à celui des fonctions w-dépendantes définies dans* I *et appartenant à* A.

Démonstration. Construisons un système fini $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ w-dépendant dans I de fonctions de l'ensemble A. Soit $I = (a, b)$ et $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < b$ où $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, posons $I_i = (x_i, x_{i+1})$, $|I_i| = x_{i+1} - x_i$,

$$\varphi_1^i(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{4}{|I_i|^2}\right]\exp\left[-\dfrac{1}{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}\right] & \text{pour } x \in I_i, \\ 0 & \text{pour } x \in I \setminus I_i, \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i(x).$$

Il est facile de voir que

1° $\varphi_1(x)$ est de classe C^∞ dans I,

2° $\varphi_1(x)$ a un maximum égal à 1 aux points $(x_i + x_{i+1})/2$.

L'ensemble $C = \{(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\colon C_i \in [0, 1],\ C_i$ est un nombre rationnel, $i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ étant dénombrable, on peut assigner à chaque intervalle I_i un système $(C_1^i, C_2^i, \ldots, C_{n-1}^i)$ de l'ensemble C de façon que l'ensemble des intervalles I_i soit transformé sur C. Soit

$$\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{r-1}^i \varphi_1^i(x) \qquad \text{pour } r = 2, 3, \ldots, n.$$

Il est facile de constater que la courbe $X_k = \varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$ et $x \in I$) coïncide dans chacun des sous-intervalles I_i avec un segment situé sur la droite $X_k = C_{k-1}^i t$ (où $k = 1, 2, \ldots, n$, $C_0^i = 1$ pour $i = 0, 1, \ldots$ et $t \in [0, 1]$). L'ensemble C étant dense dans $[0, 1]^{n-1}$ et l'ensemble des intervalles I_i se transformant sur C, la courbe de l'équation $X_k = \varphi_k(x)$ est un ensemble dense dans l'hyperpyramide H ayant pour base le carré $X_1 = 1$, $0 \leqslant X_r \leqslant 1$ (où $r = 2, 3, \ldots, n$) et pour sommet l'origine des coordonnées. Puisque la courbe de l'équation $X_k = \varphi_k(x)$ (où $k = 1, 2, \ldots, n$ et $x \in I_i$) forme un segment situé sur la droite passant par cette origine et les fonctions φ_k ($k = 1, \ldots, n$) sont égales à zéro avec toutes leurs dérivées en chaque point x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) et en b, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont linéairement dépendantes dans chacun des intervalles I_i et, par conséquent, le wronskien des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ s'annule dans l'intervalle I.

Il est établi que

($*$) *les fonctions* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *de classe* C^∞ *dans* I *sont dans cet intervalle w-dépendantes et la courbe représentative de l'équation paramétrique* $X_k = \varphi_k(x)$ (*où* $k = 1, 2, \ldots, n$ *et* $x \in I$) *est un ensemble dense dans l'hyperpyramide n-dimensionnelle* H.

Si l'ensemble Z pour une algèbre (A, F) était celui des systèmes des fonctions de l'ensemble A w-dépendantes dans I, il existerait deux opérations algébriques (engendrées d'après (2) par les fonctions de classe C^∞ dans E_n) $g, h \in \mathscr{A}^{(n)}$ pour lesquelles

(A) $g(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \equiv h(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ sur I,

(B) g et h ne sont pas identiques dans E_n.

Il en résulte, d'après ($*$), que g et h sont identiques sur H.

D'autre part, il est facile de construire une courbe de l'équation $X_k = \psi_k(x)$ (où $k = 1, 2, \ldots, n$) qui est située dans H et telle que le système $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\}$ ne soit pas w-dépendant dans I. Puisque

$$g(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) \equiv h(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$$

car $g \equiv h$ sur H, on aurait donc $g \equiv h$ dans E_n d'après la définition de l'indépendance dans l'algèbre (A, F) et d'après l'hypothèse (2). La dernière conclusion est en contradiction avec (B), ce qui achève la démonstration du théorème.

3. On peut se poser la question suivante: aucune hypothèse au sujet des opérations fondamentales n'étant faite, w-dépendance n'est-elle pas un cas particulier de la dépendance générale au sens de Marczewski?

Notons que Świerczkowski [3] a construit, pour tout n, une algèbre satisfaisant aux conditions (1) et (2) et telle que, pour des systèmes à n éléments, la notion de w-dépendance des fonctions définies dans E_n et ayant des dérivées partielles d'ordre n coïncide avec celle de Marczewski. Cependant, dans les considérations qui précèdent, il est bien supposé que F est l'ensemble des opérations fondamentales engendrées par des fonctions de classe C^∞, mais on n'exige pas que le nombre d'éléments w-dépendants envisagés soit constant.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Marczewski, *A general scheme of the notions of independence in mathematics* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 6 (1958), p. 731-736.

[2] З. Мошнер, *w-зависимость функций и её применения*, Учёные записки Московского Областного Педагогического Института им. Н. К. Крупской 166 (1966), p. 303-314.
[3] S. Świerczkowski, *On the independence of continuous functions*, Fundamenta Mathematicae 52 (1963), p. 41-58.

Reçu par la Rédaction le 9. 6. 1972