COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXVII 1977 FASC. 1

APPROXIMATION SUR LE TORE ET IRRÉGULARITÉ DES FONCTIONS

PAR

M. BRUNEAU (RABAT)

$\Lambda = (\lambda_k)$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels tels que $\lambda_0 = 0$,

$$\lim \lambda_k = \infty \quad \text{et} \quad \lim(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0. \tag{1}$$

A tout point $x \in \boldsymbol{T}$, où $\boldsymbol{T}$ désigne le tore $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ identifié à $[0, 1[$, est associée l'unique suite croissante d'indices (k_n) vérifiant

$$\lambda_{k_n} \leqslant x+n-1 < \lambda_{k_n+1} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \tag{2}$$

On désigne alors par $\Lambda(x)$ la suite, à valeurs dans $\boldsymbol{T}$,

$$n \to \frac{x+n-1-\lambda_{k_n}}{\lambda_{k_n+1}-\lambda_{k_n}} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \tag{3}$$

Dans la première partie (les sections I et II) nous allons chercher à quelles conditions sur Λ, pour presque tout $x \in \boldsymbol{T}$, $\Lambda(x)$ est dense, $\Lambda(x)$ est équirépartie.

Puis dans la deuxième partie (la section III) nous montrerons comment les suites $\Lambda(x)$ interviennent dans l'étude de l'irrégularité des fonctions.

I. APPROXIMATION PAR UNE SUITE Λ

1. Points bien approchés. $\Lambda = (\lambda_k)$ est une suite strictement croissante de nombres réels vérifiant (1). Pour tout $x \in \boldsymbol{T}$, $\Lambda(x)$ est la suite de points du tore qui lui est associée par (2) et (3). Nous avons abordé le problème de la bonne approximation des points du tore par une suite Λ pour la première fois dans [2], puis nous l'avons repris dans [3] et [4] et principalement dans le chapitre III de [6]. Un point $x \in \boldsymbol{T}$ est dit *bien approché par une suite Λ*, si 0 est une valeur d'adhérence de la suite $\Lambda(x)$. Dans le cas contraire, x est dit *mal approché*. L'ensemble des points mal approchés est noté $E(\Lambda)$.

Plus précisément, un point $x \in \boldsymbol{T}$ est dit *bien approché à droite* (respectivement *à gauche*) *par une suite* Λ, s'il existe une sous-suite de $\Lambda(x)$ convergeant vers 0 à gauche (respectivement à droite). Dans le cas contraire, x est dit *mal approché à droite* (respectivement *à gauche*).

Comme nous allons le voir

PROPOSITION 1. *Pour toute suite* Λ, *presque tout point de* $\boldsymbol{T}$ *est bien approché par* Λ *à droite et à gauche.*

On peut „enrouler" une suite $\Lambda = (\lambda_k)$ sur le tore, et la considérant „modulo 1". Elle décrit alors une infinité de „spires"

$$s_n = \{\lambda_k - n + 1 \mid n - 1 \leqslant \lambda_k < n\} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \tag{4}$$

Nous dirons que s_n $(n \in \boldsymbol{N})$ est la *n-ième spire de la suite* Λ et que Λ est la suite de n-ième spire s_n.

Exemple. Suite des subdivisions diadiques.

Soit Λ_2 la suite dont la n-ième spire est

$$s_n = \{k \cdot 2^{-n} \mid 0 \leqslant k < 2^n\} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \tag{5}$$

On a alors

$$\Lambda_2(x) = (\{2^k x\}) \quad (x \in \boldsymbol{T}), \tag{6}$$

où, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\{\lambda\} = \lambda + \boldsymbol{Z}$ désigne aussi bien la partie fractionnaire de λ. Pour cette suite toutes les réponses sont bien connues.

$\Lambda_2(x)$ est équirépartie pour presque tout $x \in \boldsymbol{T}$ (voir Weyl [20]) et l'ensemble des $x \in \boldsymbol{T}$ pour lesquels $\Lambda_2(x)$ n'est pas équirépartie a la dimension de Hausdorff 1 (voir Erdös et Taylor [10]). Plus précisément, $E(\Lambda_2)$ a la dimension de Hausdorff 1.

L'interprétation des points mal approchés est ici particulièrement simple:

Un point x *de* $\boldsymbol{T} = [0, 1[$ *est mal approché à droite* (*respectivement à gauche*) *si et seulement si son développement en base* 2 *n'admet pas de „plages" de* 1 (*respectivement de* 0) *arbitrairement longues.*

Nous allons maintenant donner deux généralisations distinctes de la suite Λ_2, qui vont représenter deux classes remarquables de suites Λ: les suites Λ_s et les suites $\Lambda_{(\mu_n)}$.

2. Les suites Λ_s. Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{g-1} < 1$ des nombres donnés. Posons $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$. Etant donné un intervalle $]a, a+l[$ de $\boldsymbol{T}$, on appelle *s-section de l'intervalle* $]a, a+l[$ l'ensemble

$$(a, a+\lambda_1 l, a+\lambda_2 l, \ldots, a+\lambda_{g-1} l, a+l).$$

Désignons alors par (s_n) la suite des parties finies du tore obtenues à partir de la s-section de $\boldsymbol{T}$

$$s_1 = (0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1}, 0)$$

de la façon suivante: s_n est la réunion des s-sections des intervalles contigus à s_{n-1}, ceci pour $n \geqslant 2$. Dans ces conditions, soit Λ_s l'unique suite $\Lambda = (\lambda_k)$ dont la n-ième spire est s_n $(n \in \boldsymbol{N})$. Nous avons prouvé dans [6] (théorème 3 du chapitre III):

THÉORÈME 1. *Pour toute partie finie s de $\boldsymbol{T}$, $E(\Lambda_s)$ est de mesure nulle et a pour dimension de Hausdorff* 1.

3. Les suites $\Lambda_{(\mu_n)}$. (μ_n) est une suite de nombres réels, strictement positifs, convergeant vers $+\infty$. $\Lambda_{(\mu_n)}$ désigne la suite dont la n-ième spire est

$$(7) \qquad s_n = \left\{ \frac{k}{\mu_n} \;\middle|\; 0 \leqslant k < [\mu_n] \right\} \qquad (n \in \boldsymbol{N}),$$

où, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $[\lambda] = \lambda - \{\lambda\}$ est la partie entière de λ.

Etant données deux suites (λ_n) et (λ_n') dans $\boldsymbol{T}$, convenons de poser $(\lambda_n) \sim (\lambda_n')$ s'il existe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tel que $\lambda_n = \lambda_n'$ $(n \geqslant n_0)$. De façon évidente:

PROPOSITION 2. *Pour toute suite (μ_n) de nombres réels, strictement positifs, convergeant vers $+\infty$,*

$$(8) \qquad \Lambda_{(\mu_n)}(x) \sim (\{\mu_n x\}) \qquad (x \in \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T} \setminus \{0\}).$$

Ceci permet de donner une réponse affirmative au problème no 7 de [6] (chapitre III, p. 96, problème 4): *il existe des suites $\Lambda = (\lambda_k)$ telles que la suite $k \to \lambda_k - \lambda_{k-1}$ soit décroissante, vérifiant $E(\Lambda) = \emptyset$.* En effet, les suites $\Lambda_{(n^\sigma)}$, où $0 < \sigma < 1$, compte tenu de (8), vérifient ces conditions.

4. Les suites Λ_g. Pour tout entier $g \geqslant 2$, posons

$$(9) \qquad s_g = \left(\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g}\right).$$

On a

$$(10) \qquad \Lambda_{s_g} = \Lambda_{(g^n)}.$$

Cette suite, qui est à la fois du type Λ_s et du type $\Lambda_{(\mu_n)}$, sera notée Λ_g et appelée *suite des nombres g-adiques*. On retrouve ainsi en cas particulier la suite Λ_2, donnée à titre d'exemple dans la section I.1.

II. DENSITÉ ET ÉQUIRÉPARTITION DES SUITES $\Lambda(x)$

1. Densité des suites $\Lambda(x)$.

THÉORÈME 2. *Etant donnée une suite Λ, pour presque tout $x \in \boldsymbol{T}$, la suite $\Lambda(x)$ est dense.*

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'espace de probabilité défini sur $\Omega = \boldsymbol{T}$, en prenant pour $\mathscr{F}$ la σ-algèbre des boréliens et pour probabilité P la mesure de Haar sur $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle non vide de $\boldsymbol{T} = [0, 1[$. Pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, désignons par $\Lambda_n(\omega)$ le n-ième terme de la suite $\Lambda(\omega)$. Alors pour tout $n \in \boldsymbol{N}$

$$A_n = \{\omega \mid \Lambda_n(\omega) \in I\} \tag{11}$$

est un événement pour lequel

$$|P(A_n) - (b-a)| \leqslant \delta_n, \tag{12}$$

δ_n désignant la distance à l'origine du dernier point de la n-ième spire s_n de Λ. De la condition (1) il résulte que (δ_n) tend vers 0, donc que

$$\lim P(A_n) = b - a > 0. \tag{13}$$

Envisageons d'abord le cas simple où les événements A_n $(n \in \boldsymbol{N})$ sont indépendants. Il résulte de (13) que la série de terme général $P(A_n)$ diverge et l'on déduit donc du lemme de Borel-Cantelli que

$$P\big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\big) = 1. \tag{14}$$

Revenons maintenant au cas général. Notre but est de prouver que l'on a toujours (14). Or il suffit pour cela de remarquer que si l'on choisit une suite d'indices (n_k) croissant assez rapidement, les événements A_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ peuvent être rendus „pratiquement" indépendants. Plus précisément, la suite $k \to \lambda_k - \lambda_{k-1}$ tendant vers 0, pour tout n fixé, il suffit de prendre $m \in \boldsymbol{N}$ assez grand pour que tout point $x \in \boldsymbol{T}$ tel que $\Lambda_n(x) = 0$, a ou b, soit arbitrairement voisin d'un point de le m-ième spire de Λ. On peut donc facilement imposer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\big[A_{n_k} \big| \bigcap_{j=1}^{k-1} A_{n_j}^c\big] = \infty. \tag{15}$$

Alors (voir Neveu [15], p. 121), $\bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} A_{n_k}$, donc $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n$, est un événement de probabilité 1. On a donc toujours (14), ce qui exprime que presque sûrement $\omega \to \Lambda(\omega)$ rencontre I. En faisant parcourir à I les intervalles à extrémités rationnelles, on en déduit que presque sûrement $\omega \to \Lambda(\omega)$ est dense.

Remarque. La proposition 1 est un corollaire du théorème 2, qui sera lui-même une conséquence du théorème 4.

2. Sous-suites d'une suite Λ. Une suite Λ peut être identifiée à la suite de ses spires (s_n). On posera $\Lambda = (s_n)$. Par abus de langage, on appellera *sous-suite* d'une suite donnée $\Lambda = (s_n)$ toute suite $\Lambda' = (s_{n_k})$, où (n_k)

est une suite strictement croissante d'indices. En particulier, les sous-suites d'une suite $\Lambda_{(\mu_n)}$ seront les suites $\Lambda_{(\mu_{n_k})}$.

3. Equirépartition des suites $\Lambda(x)$. Nous dirons qu'une suite Λ est *bien répartie* si, pour presque $x \in \boldsymbol{T}$, la suite $\Lambda(x)$ est équirépartie.

Au cours d'une conversation récente H. Delange m'a suggéré un problème sur l'équirépartition des suites $\Lambda(x)$, que l'on peut formuler ainsi: toute suite Λ est-elle bien répartie? On a tout de suite une réponse négative:

La suite $\Lambda_{(\mathrm{Log}\, n)}$ n'est pas bien répartie.

C'est en effet une conséquence de la proposition 2 et de ce que la suite $(\lambda \,\mathrm{Log}\, n)$ n'est équirépartie modulo 1 pour aucun $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (voir Chauvineau [8], p. 12). On a toutefois les résultats positifs suivants:

THÉORÈME 3. *Pour toute partie finie s de $\boldsymbol{T}^*$ la suite Λ_s est bien répartie.*

Les notations sont celles de la démonstration du théorème 2. Mais on utilise ici le théorème ergodique de Birkhoff. $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ étant une partie finie de $\boldsymbol{T}^*$, posons $\Lambda = \Lambda_s$ et, quel que soit $n \in \boldsymbol{N}$, désignons par $\Lambda_n(\omega)$ le n-ième terme de la suite $\Lambda(\omega)$ $(\omega \in \boldsymbol{T})$.

Considérons la transformation

$$T(\omega) = \Lambda_1(\omega) = \frac{\omega - \lambda_{k_1}}{\lambda_{k_1+1} - \lambda_{k_1}} \quad (\omega \in \boldsymbol{T}). \tag{16}$$

Il est facile de vérifier que T est mesurable, préserve P et est ergodique. En conséquence, le théorème de Birkhoff exprime que, pour toute variable aléatoire réelle X, telle que $E(|X|) < \infty$, on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X\big(T^k(\omega)\big) = E(X) \tag{17}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$, $E(\cdot)$ désignant l'espérance mathématique.

Etant donné un intervalle $I =]a, b[$ de $\boldsymbol{T}$, choisissons $X = 1_I$. Alors

$$XT^n = 1_{A_n} \quad (n \in \boldsymbol{N}),$$

A_n étant, pour tout indice n, l'événement défini par (11). La condition (17) exprime donc que presque sûrement

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} = E(1_I) = b - a. \tag{18}$$

Ainsi presque sûrement on a (18) pour tous rationnels $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, donc pour tous réels $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, ce qui exprime l'équirépartition.

THÉORÈME 4. *Toute suite $\Lambda = (s_n)$ contient une sous-suite $\Lambda' = (s_{n_k})$ bien répartie.*

La terminologie est celle des deux démonstrations précédentes. Comme dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 2, l'idée est de choisir une sous-suite (n_k) croissant assez rapidement pour que les événements A_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ soient „suffisamment" indépendants, la suite d'événements (A_n), associée à un intervalle $I =]a, b[$, non vide, de $\boldsymbol{T} = [0, 1[$ étant toujours définie par (11).

Soit (n_k) une suite strictement croissante d'entiers que nous choisirons ultérieurement. Posons

$$X_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} 1_{A_{n_j}} \qquad (k \in \boldsymbol{N}). \tag{19}$$

Supposons un instant les événements A_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ indépendants et les spires s_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ formant une suite croissante de parties de $\boldsymbol{T}$; alors la probabilité de tout événement A_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ est $b-a$. $E(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ désignant respectivement l'espérance mathématique et l'écart-type, pour tout indice $k \in \boldsymbol{N}$,

$$E(X_k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} P(A_{n_j}) = b-a$$

et

$$\sigma^2(X_k) = \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k} \sigma^2(1_{A_{n_j}}) = \frac{(b-a)(1+a-b)}{k}.$$

Généralement, les événements A_{n_k} $(k \in \boldsymbol{N})$ ne sont pas indépendants, mais l'on peut cependant, compte tenu de (13), et des conditions (1), choisir une suite d'indices (n_k) pour laquelle

$$\lim_k E(X_k) = b-a \tag{20}$$

et

$$\sigma^2(X_k) \sim \frac{(b-a)(1+a-b)}{k} \qquad (k \to \infty). \tag{21}$$

Il résulte donc de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff que la suite (X_k) converge en probabilité vers $b-a$. Or cela est malheureusement insuffisant pour conclure. Nous allons donc utiliser un résultat de Komlós [14]:

LEMME (Loi forte des grands nombres de J. Komlós). *Si (U_n) est une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, de la condition*

$$\sup_{n \in \boldsymbol{N}} E(|U_n|) < \infty \tag{22}$$

résulte l'existence d'une suite strictement croissante d'indices (n_k) *et d'une variable aléatoire intégrable* U *telles que*

$$\lim_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} U_{n_i} = U \quad (p.\ s.). \tag{23}$$

De plus, on peut choisir (n_k) *telle que la même relation soit vraie pour toute autre sous-suite de* (U_{n_k}), *avec la même variable aléatoire* U.

Pour la démonstration voir Komlós [14], ou encore Chatterji [7].

Fin de la démonstration du théorème 4. On se donne des nombres $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. A_n $(n \in N)$ désignant toujours les événements définis par (11), on applique le lemme aux variables aléatoires

$$U_n = 1_{A_{m_n}} \quad (n \in N), \tag{24}$$

(m_n) étant une suite strictement croissante d'indices, que nous allons choisir maintenant. On sait que la suite $n \to E(U_n)$ converge vers $b-a$. Ainsi, pour toute suite strictement croissante d'indices (n_k), on a

$$\lim_k E\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} U_{n_j}\right) = b-a. \tag{25}$$

Or il existe une suite strictement croissante d'indices (m_n) telle que, pour toute sous-suite (m_{n_k}), on ait

$$\sigma^2\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} U_{n_j}\right) \sim \frac{(b-a)(1+a-b)}{k} \quad (k \to \infty); \tag{26}$$

une telle suite peut facilement être construite par récurrence sur n. On désigne maintenant par (m_n) une suite ainsi choisie.

Du lemme il résulte qu'il existe une suite strictement croissante d'indices (n_k) et une variable aléatoire intégrable U telles que

$$\lim_k X_k = U \quad (\text{p. s.}), \tag{27}$$

avec

$$X_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} U_{n_j} \quad (k \in N), \tag{28}$$

et telles que toute sous-suite de (n_k) possède encore cette propriété, relativement à la même variable aléatoire U. Or, compte tenu de (25) et (26), on déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff que la suite (X_k) converge en probabilité vers $b-a$. Mais, puisque la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité, la suite (X_k) converge également en probabilité vers U. Ainsi U est presque sûrement égale à la variable constante $b-a$, si bien que

$$(29) \qquad \lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} 1_{A_{l_j}} = b-a \quad \text{(p. s.)}$$

pour toute sous-suite (l_k) de la suite (m_{n_k}).

Pour tous nombres $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, toute suite strictement croissante d'entiers naturels (n_k) et tout $N \in \boldsymbol{N}$, posons

$$(30) \qquad \big(N, (n_k), a, b\big) = \sum_{k=1}^{N} 1_{\{a < A_{n_k}(\cdot) < b\}}.$$

La condition (29) exprime qu'il existe une suite strictement croissante d'indices (n'_k) telle que

$$(31) \qquad \lim_N \frac{\big(N, (n_k), a, b\big)}{N} = b-a \quad \text{(p. s.)},$$

pour toute sous-suite (n_k) de la suite (n'_k). Par un procédé diagonal on peut donc construire une suite strictement croissante d'indices (n_k) pour laquelle on a (31), pour tout intervalle $]a, b[$ à extrémités rationnelles.

On a alors, pour presque toute épreuve, c'est-à-dire pour presque tout point ω de $\Omega = \boldsymbol{T}$,

$$(32) \qquad \lim_N \frac{\big(N, (n_k), a, b\big)(\omega)}{N} = b-a$$

pour tout intervalle $]a, b[$ à extrémités rationnelles, donc pour tout intervalle $]a, b[$. Ceci exprime que la suite $A' = (s_{n_k})$ est bien répartie.

Problème 1 (**P 1002**). Soient une suite $A = (\lambda_k)$ bien répartie et deux nombres $\alpha > 0$, $\beta > 0$. La suite $\alpha A + \beta = (\alpha\lambda_k + \beta)$ est-elle bien répartie?

Problème 2 (**P 1003**). Les suites

$$(33) \qquad \begin{gathered} n \to n^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \\ n \to \operatorname{Log} n, \quad n \to 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \end{gathered}$$

sont-elles bien réparties?

III. IRRÉGULARITÉ DES FONCTIONS

1. Soit une fonction f: $T \to \boldsymbol{R}$, où T est une partie fermée de $\boldsymbol{T}$ ou de $\boldsymbol{R}$. Etudier l'irrégularité de f, c'est comparer les nombres $f(y)-f(x)$ et $y-x$; en faisant tendre $y-x$ vers 0 et en considérant simplement le rapport de ces nombres, on obtient la notion de dérivée. L'étude des fonctions non dérivables, qui s'introduisent naturellement en analyse (séries de Fourier lacunaires, trajectoires des processus stochastiques etc.), a conduit à considérer plus généralement la limite supérieure lorsque $y-x$ tend vers 0, de nombres du type

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{h(|y-x|)}, \tag{34}$$

où h est une fonction convenablement choisie, adaptée à l'étude de f. Très fréquemment on prendra $h(t) = t^a$ $(0 < a \leqslant 1)$, mais h peut être une fonction plus compliquée. Ainsi la célèbre loi du logarithme itéré, relative au mouvement brownien, fait intervenir une fonction h pour laquelle

$$h(t) \sim \left(2t \operatorname{Log}_2 \frac{1}{t}\right)^{1/2} \quad (t \downarrow 0). \tag{35}$$

Les expressions du type (34) interviennent plus généralement dans l'étude des processus gaussiens (voir, par exemple, Nisio [16] ou Sirao [18]) et des séries de Fourier aléatoires (voir Kahane [11]-[13]).

En chaque point $x \in T$ la limite supérieure de (34), lorsque y tend vers x, est supérieure à la limite supérieure à droite et à gauche et est inférieure à la limite supérieure bilatérale.

Nous allons montrer que de façon assez générale ces limites sont égales à un ensemble négligeable près et étudierons la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels ainsi mis en évidence.

Dans chaque cas notre démarche consistera à associer à une fonction $f\colon T \to \boldsymbol{R}$ donnée, une suite Λ „enregistrant" convenablement les variations de la fonction de deux variables (34), puis à utiliser la proposition 1.

2. Sur les nombres dérivés d'une fonction. D'après les travaux de Denjoy [9], Young [21] et Saks [17], on sait en particulier que, pour toute fonction $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, on a presque partout

$$\overline{\lim_{y\uparrow x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{h(x-y)} = \overline{\lim_{y\downarrow x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{h(y-x)} \quad \text{avec } h(t) = t. \tag{36}$$

Dans [2] nous avons montré que ceci reste vrai pour une fonction lipschitzienne d'ordre a $(0 < a \leqslant 1)$, en prenant $h(t) = t^a$. Par ailleurs, il est bien connu que, h vérifiant (35), presque toutes les trajectoires d'un mouvement brownien, à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$, vérifient cette condition. Enfin, Taylor [19] à établi la loi bilatérale du logarithme itéré. Nous allons énoncer une propriété qui englobe ces divers cas particuliers.

Appelons *fonction déterminante de Hausdorff* une fonction continue $h\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, monotone croissante et sous-additive, telle que $h(0) = 0$, et disons qu'une telle fonction est *admissible* si, de plus,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0, x\downarrow 0} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} = 0. \tag{37}$$

Ainsi, pour tout $0 < a \leqslant 1$, $x \to x^a$ est admissible.

THÉORÈME 5. *Pour toute fonction f, définie sur une partie fermée T de $\boldsymbol{R}$, à valeurs dans un espace métrique (E, d), et toute fonction déterminante de Hausdorff admissible h, presque partout sur T, nous avons*

$$\overline{\lim_{\substack{y\leqslant x\leqslant z\\ 0<|z-y|\to 0}}} \frac{d[f(y), f(z)]}{h(z-y)} = \overline{\lim_{y\uparrow x}} \frac{d[f(x), f(y)]}{h(x-y)} = \overline{\lim_{y\downarrow x}} \frac{d[f(x), f(y)]}{h(y-x)}. \tag{38}$$

Ce résultat, énoncé dans [6], p. 248, y est suivi d'une démonstration complète. Nous en reproduisons l'idée principale que voici: on constate que l'on peut se limiter au cas où $T = [0, 1[$ et l'on identifie cet intervalle au tore $\boldsymbol{T}$. On prouve alors ([6], p. 258):

THÉORÈME 6. *Pour toute fonction φ: $\boldsymbol{T}^2 \to \boldsymbol{R}$, il existe une suite $\Lambda = (\lambda_k)$, vérifiant* (1), *telle que si, pour tout $x \in \boldsymbol{T}$, (k_n) est la suite croissante d'indices vérifiant* (2), *on ait presque partout sur $\boldsymbol{T}$*

$$\overline{\lim_{\substack{y\leqslant x\leqslant z\\ 0<|z-y|\to 0}}} \varphi(y, z) = \lim_n \varphi(\{\lambda_{k_n}\}, \{\lambda_{k_n+1}\}). \tag{39}$$

On applique le théorème 6 à la fonction, nulle sur la diagonale principale, telle que

$$\varphi(y, z) = \frac{d[f(y), f(z)]}{h(|z-y|)} \quad (y \neq z). \tag{40}$$

On en déduit qu'en presque tout point $x \in \boldsymbol{T}$, la limite supérieure bilatérale de (40) est égale à

$$\lim_n \frac{d[f(\{\lambda_{k_n}\}), f(\{\lambda_{k_n+1}\})]}{h(\{\lambda_{k_n+1} - \lambda_{k_n}\})}.$$

On conclut alors, grâce à la proposition 1, les conditions imposées à h permettant de lever toute difficulté technique.

3. Fonctions p, a-fines (voir [2] et [6]). Convenons que $|\cdot|$ est la distance à l'origine sur $\boldsymbol{T}$. Soient des nombres $p > 1$ et $a > 0$. Parmi les fonctions f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$ vérifiant la condition de Lipschitz

$$|f(y) - f(x)|^p \leqslant a|y - x| \quad (x, y \in \boldsymbol{T}), \tag{41}$$

es plus „irrégulières" sont celles pour lesquelles

$$\overline{\lim_{y\to x}}\frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|} = a \quad (\text{p. p. sur } \boldsymbol{T}); \tag{42}$$

une telle fonction sera dite *p, a-fine.*

f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$ étant une fonction vérifiant la condition de Lipschitz (41), posons

$$E(f) = \left\{x \,\middle|\, \overline{\lim_{y\to x}}\frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|} < a\right\}. \tag{43}$$

Dire que f est p, a-fine signifie que $E(f)$ est de mesure nulle. Or, nous allons voir que dans certains cas on peut associer à f une suite $\Lambda = (\lambda_k)$ telle que $E(f) = E(\Lambda)$, où $E(\Lambda)$ est l'ensemble des points de $\boldsymbol{T}$ mal approchés par Λ. On déduit alors de la proposition 1 que $E(f)$ est de mesure nulle, donc que f est p, a-fine.

Exemple 1. Pour tout nombre $p > 1$ et tout entier $g \geqslant 2$, les fonctions f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$,

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} g^{-n/p}|g^n x|, \qquad x \to \sum_{n=0}^{\infty} g^{-n/p}|\sin g^n \pi x| \tag{44}$$

sont p, a-fines, avec

$$a^{1/p} = \overline{\lim_{x\downarrow 0}}\, x^{-1/p}f(x).$$

Exemple 2. Etant donné un nombre ξ, $\frac{1}{3} < \xi < \frac{1}{2}$, soit $p > 1$ l'unique nombre vérifiant

$$\xi^{1/p} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2\xi + (2\xi^{1/p}-1)^p = 1. \tag{45}$$

φ: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}$ étant l'unique fonction continue vérifiant, pour $0 < \lambda < 1$, les conditions

$$\begin{gathered} \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\xi) = \xi^{1/p}, \quad \varphi(1-\lambda) = 1-\varphi(\lambda), \quad \varphi(\lambda\xi) = \varphi(\lambda)\xi^{1/p}, \\ \varphi\big(\xi+\lambda(1-2\xi)\big) = \xi^{1/p}+\varphi(\lambda)(1-2\xi^{1/p}), \end{gathered} \tag{46}$$

la fonction $f = |\varphi|$ est $p, 1$-fine.

Ces deux résultats sont des conséquences de la proposition 1 et de la

PROPOSITION 3. *En prenant*

$$s = \left(\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g}\right)$$

dans l'exemple 1 *et* $s = (\xi, 1-\xi)$ *dans l'exemple* 2, *on obtient*

$$E(f) = E(\Lambda_s). \tag{47}$$

4. Suites adaptées (voir [2] et [6]). Une suite Λ est dite *adaptée* à une fonction f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$ vérifiant (41) si

$$\lim_{k} \frac{|f(\{\lambda_k\}) - f(\{\lambda_{k-1}\})|^p}{|\{\lambda_k\} - \{\lambda_{k-1}\}|} = a. \tag{48}$$

On a les résultats suivants:

PROPOSITION 4. *Soit une fonction f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$ vérifiant* (41). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite Λ adaptée à f est que*

$$\overline{\lim_{\substack{y \leqslant x \leqslant z \\ 0 < |z-y| \to 0}}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z-y|} = a \quad (x \in \boldsymbol{T}). \tag{49}$$

PROPOSITION 5. *Soit une fonction f: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{R}$ vérifiant* (41). *S'il existe une suite adaptée à f, f est p, a-fine et*

$$E(f) = \bigcap_{\Lambda} E(\Lambda), \tag{50}$$

l'intersection étant prise sur l'ensemble des suites Λ adaptées à f.

Dans l'exemple 1 il n'existe pas de suite Λ adaptée à f. Dans l'exemple 2 en revanche la suite Λ_s, avec $s = (\xi, 1-\xi)$, est adaptée à f; ainsi f est une fonction pour laquelle la condition du théorème 5, avec $h(t) = t^{1/p}$, est en défaut sur $E(\Lambda_s)$, c'est-à-dire, d'après le théorème 1, sur un ensemble dont la dimension de Hausdorff est 1.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company 1968.
[2] M. Bruneau, Thèse, Strasbourg 1970, multigraphiée.
[3] — *Fonctions p, a-fines et approximation sur le tore*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 274 (1972), p. 1543-1546.
[4] — *Fonctions p, a-fines et nombres mal approchés*, ibidem 275 (1972), p. 903-906.
[5] — *Sur les nombres dérivés d'une fonction*, ibidem 276 (1972), p. 735-737.
[6] — *Variation totale d'une fonction*, Lecture Notes in Mathematics 413 (1974).
[7] S. D. Chatterji, *Les martingales et leurs application analytiques*, l'Ecole d'Eté de Probabilité, ibidem 307 (1973).
[8] J. Chauvineau, *Equirépartition et équirépartition uniforme modulo* 1, Séminaire Delange-Pisot, *Théorie des nombres*, 3-ème année, 7 (1961-1962).
[9] A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 7 (1915), p. 105-240.
[10] P. Erdös and S. J. Taylor, *On the set of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistributed properties of related sequences*, Proceedings of the London Mathematical Society 7 (1957), p. 598-615.
[11] J.-P. Kahane, *Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires*, Studia Mathematica 19 (1960), p. 1-25.
[12] — *Série de Fourier aléatoires*, l'Université de Montréal, 2-ème édition, 1966.
[13] — *Some random series of functions*, Heath Mathematical Monographs 1968.

[14] J. Komlós, *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 18 (1967), p. 217-229.

[15] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris 1964.

[16] M. Nisio, *On the extreme values of Gaussian processes*, Osaka Mathematical Journal 4 (1967), p. 313-326.

[17] S. Saks, *Sur les nombres dérivés des fonctions*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 98-104.

[18] T. Sirao, *On the Hölder continuity of stationary Gaussian processes*, Proceedings of the Japan Academy 44 (1968), p. 482-484.

[19] S. J. Taylor, *Exact asymptotic estimates of Brownian path variation*, Duke Mathematical Journal 39 (1972), p. 219-241.

[20] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen 77 (1916), p. 313-352.

[21] G. C. Young, *On the derivates of a function*, Proceedings of the London Mathematical Society 15 (1916), p. 360-384.

Reçu par la Rédaction le 23. 5. 1975