COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIII 1971 FASC. 2

ÜBER DEN BEWEIS EINES SATZES AUS DER LIMITIERUNGS-THEORIE

VON

W. KOŁODZIEJ (WARSZAWA)

W. Meyer-König und K. Zeller ([3], Satz 3.1) haben 1956 den folgenden limitierungstheoretischen Satz bewiesen:

SATZ 1. *Sei X ein B_0-Raum, der aus Zahlenfolgen $x = \{t_n\}$ besteht und in welchem die Funktionale $F_n(x) = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ linear sind; setzen wir ferner voraus, daß X die Menge T_c aller konvergenten Folgen enthält und daß T_c nicht abgeschlossen in X ist. Dann gibt es ein beschränktes divergentes $x_0 \in X$.*

Die Verfasser geben einen direkten Beweis dieses Satzes; jedoch gilt der folgende, viel allgemeinere

SATZ 2. *Ist $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer, in einem F-Raume X erklärten Funktionale, deren Konvergenzmenge R nicht abgeschlossen ist, so gibt es Punkte $x_m \in R$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und $x_0 \in X \setminus R$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x_0$, $\sup\limits_{n,m=1,2,\ldots} |F_n(x_m)| < +\infty$ (die Folge $\{F_n(x_0)\}$ ist also beschränkt und divergent).*

Um daraus den Beweis des Satzes zu gewinnen, genügt es $F_n(x) = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zu setzen. Zugleich zeigt sich, daß dieser Satz eine Erweiterung auf F-Räume zuläßt.

Den Satz 2 haben S. Mazur und L. Sternbach ([2], Satz 2) für den Fall, wenn X ein B-Raum ist, schon 1933 aufgestellt. Der Beweisgang, der hier angegeben wird, umfaßt diesen Satz in seiner vollen Allgemeinheit, ohne den Grundgedanken des ursprünglichen Beweises zu stören.

Seien die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Die Menge $\bar{R}$ bildet ersichtlich einen F-Raum (mit derselben Topologie). Es gibt einen Punkt $z_0 \in \bar{R}$, für den $\sup\limits_{n=1,2,\ldots} |F_n(z_0)| = +\infty$ gilt, denn im Gegenfalle wäre die Folge $\{F_n(x)\}$ in jedem Punkte des F-Raumes $\bar{R}$ beschränkt und in den Punkten der dichten Menge $R \subset \bar{R}$ konvergent, was nach einem bekannten Satz von S. Mazur und W. Orlicz ([1], Satz 5) ihre Konvergenz in jedem Punkte des Raumes $\bar{R}$ nach sich ziehen würde, im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $R \neq \bar{R}$. Sei $z_m \in R$ $(m = 1, 2, \ldots)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} z_m$

$= z_0$; man kann annehmen, daß $|\vartheta(z_m - z_0)| \leqslant 1/2^m$ für $m = 1, 2, \ldots$ und für jede reelle Zahl ϑ mit $|\vartheta| \leqslant 1$. Ersichtlich ist

$$\sup_{n=1,2,\ldots} |F_n(z_m)| < +\infty \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$\sup_{m=1,2,\ldots} |F_n(z_m)| < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\sup_{n,m=1,2,\ldots} |F_n(z_m)| = +\infty;$$

es gibt also eine absolut konvergente Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m$ mit der Eigenschaft, daß für

$$\Theta_{n,m} = \sum_{k=1}^{m} \vartheta_k F_n(z_k), \quad \Theta_n = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m F_n(z_m) \quad (n, m = 1, 2, \ldots),$$

$$\sup_{n,m=1,2,\ldots} |\Theta_{n,m}| < +\infty$$

ist und die Folge $\{\Theta_n\}$ divergiert (vgl. Hilfssatz 2 aus [2]); wir können voraussetzen, daß $|\vartheta_m| \leqslant 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ist. Die Punkte

$$x_m = \sum_{k=1}^{m} \vartheta_k z_k \ (m = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad x_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m z_m$$

(diese Reihe konvergiert als Summe konvergenter Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m(z_m - z_0)$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m z_0$) genügen offenbar den Forderungen der Behauptung unseres Satzes.

Will man aus den Voraussetzungen des Satzes 2 nur die Existenz eines Punktes x_0 schließen, für den die Folge $\{F_n(x_0)\}$ beschränkt und divergent ist (was offenbar zum Beweis des Satzes 1 genügt), so wird der Beweis einfacher, weil man den Satz von Mazur und Orlicz nicht auszunützen braucht.

LITERATUR

[1] S. Mazur und W. Orlicz, *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 152-157.

[2] S. Mazur und L. Sternbach, *Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen*, ibidem 4 (1933), p. 54-65.

[3] W. Meyer-König und K. Zeller, *Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit*, Mathematische Zeitschrift 66 (1956), p. 203-224.

Reçu par la Rédaction le 27. 4. 1970