COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XX 1969 FASC. 2

EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE PRIVÉE DE DÉRIVÉE SYMÉTRIQUE PARTOUT

PAR

L. FILIPCZAK (ŁÓDŹ)

On connaît des exemples de fonctions continues privées de dérivée partout. Il y a beaucoup de travaux consacrés à la construction de telles fonctions. Il y a aussi des constructions de fonctions sans divers dérivées généralisées. Pourtant, je n'ai rencontré dans la littérature aucun exemple de fonction continue privée partout de dérivée symétrique et je me propose d'en donner un dans la communication présente. Il ressemble à l'exemple de fonction continue sans dérivée ordinaire, donné par Faber (cf. [3] p. 546-554).

LEMME. *Pour tous les nombres arbitraires positifs α et β, il existe une fonction continue $f_{\alpha,\beta}(x)$, définie dans l'ensemble des nombres réels et assujettie aux conditions suivantes*:

(1) $f_{\alpha,\beta}(x)$ *est périodique de période* 7α;

(2) $$|f_{\alpha,\beta}(x)| \leqslant \beta;$$

(3) $|f_{\alpha,\beta}(x_1)-f_{\alpha,\beta}(x_2)| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}|x_1-x_2|$ *pour tous* x_1 *et* x_2 *réels*;

(4) *Pour tout* x *réel, il existe des nombres réels* $h = h(x)$ *et* $k = k(x)$ *tels que*

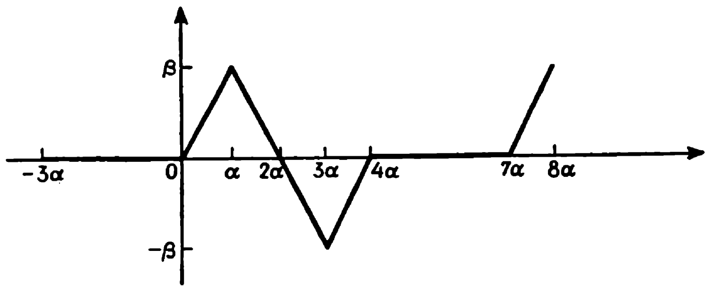
(4_1) $$\alpha \leqslant h \leqslant 6\alpha, \quad \alpha \leqslant k \leqslant 6\alpha,$$

(4_2) $$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \leqslant -\frac{1}{12}\frac{\beta}{\alpha},$$

(4_3) $$\frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k} \geqslant \frac{1}{12}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Démonstration. Soit $f_{\alpha,\beta}(x)$ la fonction définie pour tout entier n par la formule:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = f_{\alpha,\beta}(x+7n\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot x & \text{pour } x\epsilon\langle 0, \alpha\rangle, \\ \dfrac{\beta}{\alpha}(2\alpha-x) & \text{pour } x\epsilon\langle \alpha, 3\alpha\rangle, \\ \dfrac{\beta}{\alpha}(x-4\alpha) & \text{pour } x\epsilon\langle 3\alpha, 4\alpha\rangle, \\ 0 & \text{pour } x\epsilon\langle 4\alpha, 7\alpha\rangle. \end{cases}$$



Il résulte immédiatement de cette définition que la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est continue et satisfait aux conditions (1), (2) et (3). Pour prouver qu'elle satisfait aussi à la condition (4), considérons les quatre cas suivants:

$$0 \leqslant x \leqslant 2\alpha, \tag{5}$$

$$2\alpha \leqslant x \leqslant 4\alpha, \tag{6}$$

$$4\alpha \leqslant x \leqslant 6\alpha, \tag{7}$$

$$6\alpha \leqslant x \leqslant 7\alpha. \tag{8}$$

Dans le cas (5), posons $h = 3\alpha - x$ et $k = x+4\alpha$. On voit que la condition (4_1) est satisfaite et que

$$-3\alpha \leqslant 2x-3\alpha \leqslant \alpha, \quad 4\alpha \leqslant 2x+4\alpha \leqslant 8\alpha,$$

d'où

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{f(3\alpha)-f(2x-3\alpha)}{2h} \leqslant \frac{f(3\alpha)}{2h} = \frac{-\beta}{2h} \leqslant -\frac{1}{12}\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k} = \frac{f(2x+4\alpha)-f(-4\alpha)}{2k} \geqslant \frac{-f(-4\alpha)}{2k} = \frac{\beta}{2k} \geqslant \frac{1}{12}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Dans le cas (6), posons $h = x-\alpha$ et $k = 8\alpha - x$. Il est facilement de voir que l'on a (4_1) et que

$$3\alpha \leqslant 2x-\alpha \leqslant 7\alpha, \quad -4\alpha \leqslant 2x-8\alpha \leqslant 0,$$

d'où

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{f(2x-a)-f(a)}{2h}\leqslant\frac{-f(a)}{2h}=\frac{-\beta}{2h}\leqslant-\frac{1}{12}\frac{\beta}{a},$$

$$\frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k}=\frac{f(8a)-f(2x-8a)}{2k}\geqslant\frac{f(8a)}{2k}=\frac{\beta}{2k}\geqslant\frac{1}{12}\frac{\beta}{a}.$$

En posant $h=10a-x$ et $k=x-3a$ dans le cas (7), nous constatons que (4_1) se trouve satisfait et que

$$-2a\leqslant 2x-10a\leqslant 2a,\qquad 5a\leqslant 2x-3a\leqslant 9a,$$

d'où

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{f(10a)-f(2x-10a)}{2h}\leqslant\frac{f(10a)}{2h}=\frac{-\beta}{2h}\leqslant-\frac{1}{12}\frac{\beta}{a},$$

$$\frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k}=\frac{f(2x-3a)-f(3a)}{2k}\geqslant\frac{-f(3a)}{2k}=\frac{\beta}{2k}\geqslant\frac{1}{12}\frac{\beta}{a}.$$

Enfin, dans le cas (8), posons $h=x-a$ et $k=8a-x$. On prouve comme précédemment que la condition (4_1) est réalisée et que

$$11a\leqslant 2x-a\leqslant 13a,\qquad 4a\leqslant 2x-8a\leqslant 6a,$$

d'où

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{f(2x-a)-f(a)}{2h}=\frac{-f(a)}{2h}=\frac{-\beta}{2h}\leqslant-\frac{1}{12}\frac{\beta}{a},$$

$$\frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k}=\frac{f(8a)-f(2x-8a)}{2k}=\frac{f(8a)}{2k}=\frac{\beta}{2k}\geqslant\frac{1}{12}\frac{\beta}{a}.$$

Théorème. *Il existe une fonction continue, définie sur la droite tout entière et qui n'a de dérivée symétrique ni finie, ni infinie. Bien plus, cette fonction possède en tout point la dérivée symétrique inférieure égale à* $-\infty$, *et la dérivée symétrique supérieure égale à* $+\infty$.

Démonstration. Soit $0<a<b<1$ (où les nombres a et b seront définis plus loin). Posons pour tout n naturel

$$f_n(x)=f_{a^n,b^n}(x), \tag{9}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x). \tag{10}$$

En vertu du lemme, les fonctions f_n sont continues pour $n=1,2,\ldots$ et satisfont aux conditions suivantes:

$$|f_n(x)|\leqslant b^n; \tag{11}$$

(12) $|f_n(x_1)-f_n(x_2)| \leqslant \left(\frac{b}{a}\right)^n |x_1-x_2|$ pour tous les nombres réels arbitraires x_1 et x_2;

(13) pour tout réel x, il existe des nombres $h_n = h_n(x)$ et $k_n = k_n(x)$ tels que

$$a^n \leqslant h_n \leqslant 6a^n, \qquad a^n \leqslant k_n \leqslant 6a^n, \tag{13_1}$$

$$\frac{f_n(x+h_n)-f_n(x-h_n)}{2h_n} \leqslant -\frac{1}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \tag{13_2}$$

$$\frac{f_n(x+k_n)-f_n(x-k_n)}{2k_n} \geqslant \frac{1}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^n. \tag{13_3}$$

Il s'ensuit de la condition $0 < b < 1$ et de l'inégalité (11) que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément. Par conséquent, la fonction f est continue.

Soit x un point arbitraire. On a pour $a = 1/900$ et $b = 1/30$

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x-h_n)}{2h_n} + \frac{f_n(x+h_n)-f(x_n-h_n)}{2h_n} + \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x-h_n)}{2h_n} \\
&\leqslant -\frac{1}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x-h_n)}{2h_n} + \\
&\quad + \frac{1}{2h_n} \sum_{m=n+1}^{\infty} [|f_m(x+h_n)|+|f_m(x-h_n)|] \\
&\leqslant -\frac{1}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^m + \frac{1}{2a^n} \sum_{m=n+1}^{\infty} 2b^m \\
&= -\frac{1}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n - \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} + \frac{1}{a^n}\,\frac{b^{n+1}}{1-b} \\
&\leqslant \left(\frac{b}{a}\right)^n \left(-\frac{1}{12} + \frac{a}{b-a} + \frac{b}{1-b}\right) \leqslant -30^{n-2}.
\end{aligned}$$

Pour les mêmes valeurs a et b on a aussi

$$\frac{f(x+k_n)-f(x-k_n)}{2k_n} \geqslant 30^{n-2}.$$

Vu que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$, nous constatons que

$$\underline{f}_s(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \bar{f}_s(x) = +\infty.$$

Il en résulte que la fonction f n'admet, en aucun point x, de dérivée symétrique ni finie, ni infinie.

Remarque 1. L'existence de la dérivée ordinaire entraînant l'existence de la dérivée symétrique (mais pas réciproquement), la fonction $f(x)$ définie plus haut est privée partout de dérivée ordinaire (finie ou infinie).

Remarque 2. L'existence de deux dérivées ordinaires unilatérales (outre le cas, où l'une est égale à $+\infty$ et l'autre à $-\infty$) entraînant l'existence de la dérivée symétrique, il n'y a pas de point, où la fonction en question ait les deux dérivées unilatérales. Elle a donc plus de propriétés „négatives" que la fonction de Weierstrass. Cependant, en certains points cette fonction a une dérivée unilatérale. On dit qu'une fonction a la *propriété de Besikovitch* lorsqu'elle est privée en tout point de dérivée à gauche et de celle à droite, même infinies [1]. La fonction continue qui a la propriété de Besikovitch peut avoir en certains points la dérivée symétrique. Telle est la fonction définie par Pepper [2] ayant la dérivée symétrique dans un ensemble dense. Un problème se pose : existe-t-il une fonction continue ayant la propriété de Besikovitch, mais n'ayant de dérivée symétrique en aucun point **(P 672)**.

Pour les fonctions remplissant la condition de Lipschitz (donc dérivables presque partout), la caractérisation de l'ensemble des points, où il n'existe ni la dérivée symétrique ni aucune dérivée unilatérale, a été donnée par Zahorski [4].

TRAVAUX CITÉS

[1] A. S. Besikovitch, *Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit,* Bulletin de l'Académie des Sciences de la Russie (1925), p. 527.

[2] E. D. Pepper, *On continuous functions without a derivative,* Fundamenta Mathematicae 12 (1928), p. 244-253.

[3] J. Pierpont, *The theory of functions of real variable,* Vol. II, New York 1959.

[4] Z. Zahorski, *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières,* Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 66-105.

Reçu par la Rédaction le 20. 12. 1967