COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVI 1988 FASC. 2

R-BASE DANS LES ESPACES $\mathscr{L}_p$ SÉPARABLES ($2 \leqslant p < \infty$)

PAR

C. SAMUEL (MARSEILLE)

Rappelons (cf. [1])

DÉFINITION. Un base $(x_n)_n$ d'un espace de Banach séparable X est une *R-base* s'il existe un réel $K > 0$ tel que pour chaque entier m et chaque famille $c_1, \ldots, c_m$ de scalaires on ait

$$\mathrm{E}\Big\|\sum_{j=1}^{m} r_j(\omega)\, c_j x_j\Big\| \leqslant K \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j x_j\Big\|,$$

où $(r_j)_j$ est la suite des fonctions de Rademacher.

Il a été démontré dans [2] et [8] que tout espace de Banach séparable avec une base qui contient un sous-espace isomorphe à c_0 possède une R-base.

Les espaces $\mathscr{L}_p$ ont été introduits dans [6]. Un espace de Banach X est un *espace* $\mathscr{L}_p$ s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que pour chaque sous-espace E de X de dimension finie il existe un sous-espace F de X de dimension finie tel que $E \subset F$ et

$$d(F, l_p^{\dim(F)}) \leqslant \lambda.$$

Il a été démontré dans [1] que si un espace $\mathscr{L}_1$ séparable possède une R-base, alors il est isomorphe à l_1. Nous savons que tout espace $\mathscr{L}_p$ séparable ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) possède une base (cf. [4]). Nous démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Tout espace $\mathscr{L}_p$ séparable* ($2 \leqslant p < \infty$) *possède une R-base.*

Soit X un espace $\mathscr{L}_p$ séparable de dimension infinie avec $2 < p < \infty$ qui n'est pas isomorphe à l_p; nous savons que X contient un sous-espace complémenté isomorphe à l_2 (cf. [3] et [5]). En utilisant le théorème 4-5 de [7] nous pouvons supposer que X possède une base normalisée $(x_n)_n$ qui est p-besselienne. Nous notons $(x_n')_n$ la suite des formes coefficients associées. Puisque X possède un sous-espace complémenté isomorphe à l_p, il suffit d'établir que $X \times l_p$ possède une R-base. Pour $(x, y) \in X \times l_p$ nous notons

$$(x, y) = x+y \quad \text{et} \quad \|(x, y)\| = \|x\|+\|y\|.$$

Nous notons $(e_n)_n$ la base canonique de l_p et $(e'_n)_n$ la base duale. Nous définissons le réel $q \in]1, 2[$ par $1/p+1/q = 1$. Pour chaque entier $n \geqslant 1$ nous notons

$$z_{n,0} = 2^{-n} x_n + 2^{-n/p} \sum_{k=1}^{2^n} e_{2^n+k}, \tag{1}$$

$$f_{n,0} = -\frac{1}{1-2^{-n}} x'_n + \frac{2^{-n/q}}{1-2^{-n}} \sum_{k=1}^{2^n} e'_{2^n+k} \tag{2}$$

et pour $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ nous notons

$$z_{n,k} = 2^{-n/q} x_n + e_{2^n+k}, \tag{3}$$

$$f_{n,k} = \frac{2^{-n/p}}{1-2^{-n}} x'_n + \frac{2^n-2}{2^n-1} e'_{2^n+k} - \frac{1}{2^n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{2^n} e'_{2^n+i}. \tag{4}$$

Il est facile de vérifier que $f_{m,l}(z_{n,k}) = \delta_{m,n} \delta_{l,k}$ et il est bien connu (cf. [7]) que $z_{1,0}, z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,0}, z_{2,1}, \ldots$ est une base semi-normalisée de $X \times l_p$. Nous allons prouver que cette base est une R-base et pour cela nous allons établir que cette base est p-besselienne. Rappelons qu'il existe un réel $A_p > 0$ tels que pour des scalaires a, b, c

$$|a+b+c|^p \leqslant A_p(|a|^p+|b|^p+|c|^p).$$

Soit

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n} c_{n,k} z_{n,k} = x+y \quad \text{avec } x \in X \text{ et } y \in l_p.$$

Fixons un entier $n \geqslant 1$. Nous avons d'après (2), en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |c_{n,0}| = |f_{n,0}(z)| &\leqslant \frac{1}{1-2^{-n}} |x'_n(x)| + \frac{2^{-n/q}}{1-2^{-n}} \Big|\sum_{k=1}^{2^n} e'_{2^n+k}(y)\Big| \\ &\leqslant 2\Big[|x'_n(x)| + \Big(\sum_{k=1}^{2^n} |e'_{2^n+k}(y)|^p\Big)^{1/p}\Big], \end{aligned}$$

donc

$$|c_{n,0}|^p \leqslant 2^p A_p \Big[|x'_n(x)|^p + \sum_{k=1}^{2^n} |e'_{2^n+k}(y)|^p\Big].$$

Puisque la base $(x_n)_n$ de X est normalisée et p-besselienne, nous déduisons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{n,0}|^p < \infty .$$

Fixons maintenant un entier $n \geqslant 1$ et un entier $k \in \{1, \dots, 2^n\}$; nous avons d'après (4), en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |c_{n,k}| = |f_{n,k}(z)| &\leqslant \frac{2^{-n/p}}{1-2^{-n}}|x'_n(x)| + \frac{2^n-2}{2^n-1}|e'_{2^n+k}(y)| + \frac{1}{2^n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{2^n} |e'_{2^n+i}(y)| \\ &\leqslant \frac{2^{-n/p}}{1-2^{-n}}|x'_n(x)| + \frac{2^n-2}{2^n-1}|e'_{2^n+k}(y)| + (2^n-1)^{(1/q)-1}\Big[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{2^n} |e'_{2^n+i}(y)|^p\Big]^{1/p}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |c_{n,k}|^p \leqslant A_p\Bigg[&\frac{2^{-n}}{(1-2^{-n})^p}|x'_n(x)|^p + \left(\frac{2^n-2}{2^n-1}\right)^p |e'_{2^n+k}(y)|^p \\ &+ \frac{1}{2^n-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{2^n} |e'_{2^n+i}(y)|^p\Bigg]. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^p \leqslant 2^p A_p\Big[|x'_n(x)|^p + \sum_{k=1}^{2^n} |e'_{2^n+k}(y)|^p\Big].$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^p < \infty ;$$

nous savons donc que $(z_{n,k})_{n,k}$ est p-besselienne. Il existe donc une constante $c_1 > 0$ telle que, pour

$$z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} c_{n,k}\, z_{n,k} \in X \times l_p,$$

nous avons

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} |c_{n,k}|^p\Big]^{1/p} \leqslant c_1 \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} c_{n,k}\, z_{n,k}\Big\| .$$

Etablissons maintenant que $z_{1,0}, z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,0}, \dots$ est une R-base. Soit

$$z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} c_{n,k}\, z_{n,k} ;$$

il suffit de prouver que

$$\sup_N \mathrm{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{2^n} r_{n,k}(\omega)\, c_{n,k}\, z_{n,k}\right\| < \infty,$$

où $(r_{n,k})_{n\geq 1, 0\leq k\leq 2^n}$ est une énumération de la suite des fonctions de Rademacher. Nous savons que

$$M = \sup\{|c_{n,k}|;\ 1 \leq n \text{ et } 0 \leq k \leq 2^n\} < \infty.$$

Soit $\omega\in[0, 1]$ et un entier n; nous avons, d'après (1) et (3),

$$\sum_{k=0}^{2^n} r_{n,k}(\omega)\, c_{n,k}\, z_{n,k} = \left[2^{-n} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q}\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right] x_n$$
$$+ \sum_{k=1}^{2^n}\left[2^{-n/p} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right] e_{2^n+k},$$

donc, pour un entier N donné,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{2^n} r_{n,k}(\omega)\, c_{n,k}\, z_{n,k}\right\| \leq \sum_{n=1}^{N}\left|2^{-n} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q}\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|$$
$$+\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{2^n}\left|2^{-n/p} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|^p\right]^{1/p}$$

et

$$(5)\quad \mathrm{E}\left\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{2^n} r_{n,k}(\omega)\, c_{n,k}\, z_{n,k}\right\|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N}\mathrm{E}\left|2^{-n} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q}\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|$$
$$+\mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{2^n}\left|2^{-n/p} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|^p\right]^{1/p}.$$

De

$$\left|2^{-n} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q}\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right| \leq 2^{-n} M + 2^{-n/q}\left|\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|$$

et de l'inégalité de Khintchine nous déduisons qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{E}\left|2^{-n} c_{n,0}\, r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q}\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\, r_{n,k}(\omega)\right|$$
$$\leq M + A\sum_{n=1}^{N} 2^{-n/q}\Big(\sum_{k=1}^{2^n}|c_{n,k}|^2\Big)^{1/2} \leq M + MA\sum_{n=1}^{N} 2^{n/2-n/q}.$$

Avec l'hypothèse $2 < p$, donc $1/q - 1/2 > 0$, nous déduisons que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{E}\,\Big|2^{-n} c_{n,0} r_{n,0}(\omega) + 2^{-n/q} \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} r_{n,k}(\omega)\Big| < \infty .$$

Nous allons étudier le deuxième terme du membre de droite de (5); de

$$|2^{-n/p} c_{n,0} r_{n,0}(\omega) + c_{n,k} r_{n,k}(\omega)|^p \leqslant A_p (2^{-n} |c_{n,0}|^p + |c_{n,k}|^p)$$

nous déduisons

$$\Big[\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^n} |2^{-n/p} c_{n,0} r_{n,0}(\omega) + c_{n,k} r_{n,k}(\omega)|^p\Big]^{1/p} \leqslant A_p^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{2^n} |c_{n,k}|^p\Big)^{1/p}$$

et par conséquent

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^n} |2^{-n/p} c_{n,0} r_{n,0}(\omega) + c_{n,k} r_{n,k}(\omega)|^p\Big]^{1/p} \leqslant A_p^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n} |c_{n,k}|^p\Big)^{1/p} < \infty ,$$

car nous savons que $z_{1,0}, z_{1,1}, \ldots$ est p-besselienne. Ce qui achève la preuve.

TRAVAUX CITÉS

[1] P. Billard, S. Kwapień, A. Pełczyński and C. Samuel, *Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach space*, Longhorn Notes, The University of Texas at Austin, 1985–1986, pp. 13–35.

[2] P. Billard et C. Samuel, *R-systèmes et R-bases dans certains espaces de Banach séparables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986), pp. 467–469.

[3] W. B. Johnson and E. Odell, *Subspaces of L_p which embed into l_p*, Compositio Math. 28 (1974), pp. 37–49.

[4] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 488–506.

[5] M. I. Kadec and A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math. 21 (1962), pp. 161–176.

[6] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications*, ibidem 29 (1968), pp. 275–326.

[7] P. Wojtaszczyk, *Existence of some special bases in Banach spaces*, ibidem 47 (1973), pp. 83–93.

[8] — *Every separable Banach space containing c_0 has a RUC-system*, Longhorn Notes, The University of Texas at Austin, 1985–1986, pp. 37–39.

Reçu par la Rédaction le 30.7.1986