COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIII 1971 FASC. 2

LA PROPRIÉTÉ DE STONE-WEIERSTRASS DANS LES ALGÈBRES TENSORIELLES

PAR

F. LUST (ORSAY)

Définition. Une algèbre de Banach A semi-simple commutative, considérée comme algèbre de fonctions continues sur son spectre, a la propriété de Stone-Weierstrass si toute sous-algèbre B de A, auto-adjointe, séparant les points du spectre, dont les éléments ne s'annulent pas tous en un point du spectre est dense dans A.

Notons K_i $(i = 1, 2)$ des espaces topologiques localement compacts, $\mathscr{C}_0(K_i)$ l'algèbre des fonctions continues sur K_i tendant vers 0 à l'infini, $V(K_1 \times K_2)$ l'algèbre tensorielle $\mathscr{C}_0(K_1)\hat{\otimes}\mathscr{C}_0(K_2)$. Nous étudierons la propriété de Stone-Weierstrass dans $V(K_1 \times K_2)$ lorsque K_i est totalement discontinu ou contient un arc, c'est-à-dire une image homéomorphe d'un intervalle compact de $\boldsymbol{R}$.

PROPOSITION 1. *Soient K_1, K_2 des espaces localement compacts totalement discontinus. $V(K_1 \times K_2)$ a la propriété de Stone-Weierstrass.*

$V(K_1 \times K_2)$ est engendrée par ses idempotents. D'après [2], chap. 9, § 3, elle a donc la propriété de Stone-Weierstrass.

THÉORÈME 2. *Soient K un espace compact, D un espace dénombrable localement compact. $V(K \times D)$ a la propriété de Stone-Weierstrass.*

Les hypothèses entraînent que D est totalement discontinu. J étant un sous-ensemble ouvert et compact de D, notons j_J l'idempotent de $\mathscr{C}_0(D)$ dont le support est J.

Soit B une sous-algèbre de $V(K \times D)$ vérifiant les conditions de la définition. $\mathscr{C}_0(D)$ étant engendrée par ses idempotents, il suffit de montrer que les atomes $f \otimes j_J$ où $f \in \mathscr{C}(K)$ appartiennent à $\bar{B}$. D'après [2], B contient les idempotents de $V(K \times D)$, donc les atomes $1 \otimes j_J$.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, B est dense dans $\mathscr{C}_0(K \times D)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $\eta > 0$ il existe donc $b_n \in B$ telle que

$$\|f\otimes j_J - b_n\|_{\mathscr{C}_0(K\times D)} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Notons $D = (a_i)_{i=1}^{\infty}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n > 0$ il existe un voisinage ouvert et fermé $v(a_n)$ de a_n tel que

$$\|b_n(k, a_i) \times 1 \otimes j_{v(a_n)} - b_n(k, a_n) \otimes j_{v(a_n)}\|_{V(K\times D)} < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Les $v(a_n)$ forment un recouvrement ouvert du compact J, on peut donc en extraire un recouvrement fini $v(a_{i_m})$, $m \in \{1, \ldots, N\}$. En modifiant éventuellement les $v(a_{ij})$ on peut supposer que

$$j_J = \sum_m j_{v(a_{i_m})}.$$

Alors

$$\Big\|f(k) \otimes j_J - \sum_m b_{i_m}(k, a_{i_m}) \otimes j_{v(a_{i_m})}\Big\|_{V(K\times D)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots = \varepsilon,$$

$$\Big\|\sum_m b_{i_m}(k, a_{i_m}) \otimes j_{v(a_{i_m})} - \sum_m b_{i_m}(k, a_i) \times 1 \otimes j_{v(a_{i_m})}\Big\|_{V(K\times D)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots = \varepsilon,$$

d'où

$$\Big\|f \otimes j_J - \sum_m b_{i_m} \times 1 \otimes j_{v(a_{i_m})}\Big\|_{V(K\times D)} < 2\varepsilon.$$

Les résultats qui suivent sont des conséquences du

THÉORÈME 3 (Rudin, voir [2]). *Soit G un groupe localement compact abélien. L'algèbre de groupe $A(G) = \mathscr{F}L^1(G)$ a la propriété de Stone-Weierstrass si et seulement si G est totalement discontinu.*

PROPOSITION 4. *Soit G un groupe compact abélien non totalement discontinu. $V(G\times G)$ n'a pas la propriété de Stone-Weierstrass.*

Considérons les applications de Hopf [3], chap. 8, § 1:

$$M\colon\ A(G) \to V(G\times G)$$
$$f(x) \rightsquigarrow f(x+y),$$
$$P\colon\ V(G\times G) \to A(G)$$
$$f(x, y) \rightsquigarrow \int_G f(x-y, y)\,dy.$$

Soit B une sous-algèbre de $A(G)$ vérifiant les conditions de la définition, non dense dans $A(G)$. La sous-algèbre B' de $V(G\times G)$ engendrée par $M(B)$ et par les caractères χ de G vérifie encore les conditions de la définition. La norme de P étant $\leqslant 1$, si B' était dense dans $V(G\times G)$, $P(B')$ serait dense dans $A(G)$. Or il est facile de vérifier que $P(B') = B$.

THÉORÈME 5. *Soit G un groupe localement compact abélien. Pour que $V(G\times G)$ ait la propriété de Stone-Weierstrass, il faut et il suffit que G soit totalement discontinu.*

Remarquons que si $V(K_1\times K_2)$ a la propriété de Stone-Weierstrass toute algèbre de restriction aussi.

Vu la proposition 1, on n'a qu'à prouver la nécessité. Admettons donc que G n'est pas totalement discontinu. D'après [2], chap. 2, § 4 et § 5, G contient un sous-groupe compact ou un sous-groupe fermé isomorphe à $\boldsymbol{R}$. Dans le premier cas la conclusion est immédiate. Dans le second cas, soit $E_1\times E_2$ un pavé compact de $\boldsymbol{R}^2$ homéomorphe à un pavé $E_1'\times E_2'$ de $\boldsymbol{T}^2$ ($\boldsymbol{T}$ désignant le tore). Montrons que $V(E_1'\times E_2')$ qui est isométriquement isomorphe à $V(E_1\times E_2)$ n'a pas la propriété de Stone-Weierstrass.

Soient $F_i, F_j'(i,j\in\{1,2\})$ des arcs de $\boldsymbol{T}$ tels que:

(i) $\mathring{F}_1\cup\mathring{F}_2=\boldsymbol{T}$, $\mathring{F}_1'\cup\mathring{F}_2'=\boldsymbol{T}$;

(ii) $K_{ij}=\{(x,y)\in\boldsymbol{T}^2|x+y\in F_i,\ y\in F_j'(i,j\in\{1,2\})\}$, $K_{11}\subset E_1'\times E_2'$.

Supposons qu'il existe une partition de l'unité (φ_{ij}) dans $V(\boldsymbol{T}^2)$ telle que le support de φ_{ij} soit inclus dans $\mathring{K}_{ij}$ et que φ_{ij} appartienne à une sous-algèbre B vérifiant les conditions de la définition, non dense dans $V(\boldsymbol{T}^2)$. Les algèbres $V(K_{ij})=V(\boldsymbol{T}^2)/I(K_{ij})$ $(i,j\in\{1,2\})$, où $I(K_{ij})$ désigne l'idéal des fonctions nulles sur K_{ij}, sont isomorphes. Si elles ont la propriété de Stone-Weierstrass,

$$V(K_{ij})=\bar{B}/I(K_{ij})\cap\bar{B}\qquad(i,j\in\{1,2\}).$$

Alors pour toute $f\in V(\boldsymbol{T}^2)$, $f\varphi_{ij}\in\bar{B}$, donc $f=\sum_{i,j}f\varphi_{ij}\in\bar{B}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Construisons B et (φ_{ij}). D'après [2] il existe dans tout arc de $\boldsymbol{T}$ un fermé P totalement discontinu, de mesure >0, tel que l'algèbre $B[P]$ des fonctions de $A(\boldsymbol{T})$ deux fois dérivables à dérivée nulle sur P soit non dense dans $A(\boldsymbol{T})$. Associons à $B[P]$ comme dans la proposition 4 une sous-algèbre B de $V(\boldsymbol{T}^2)$. Soit $P\subset F_2^c$ et soit (φ_i) $(i=1,2)$ une partition de l'unité sur $\boldsymbol{T}$ telle que φ_i soit deux fois dérivable et à support dans F_i. Alors $\varphi_i\in B[P]$. Soit (Ψ_j) $(j=1,2)$ une partition de l'unité de fonctions de $A(\boldsymbol{T})$ à support dans F_j'. Alors

$$\{\varphi_{ij}|\varphi_{ij}=(M\varphi_i)\times\Psi_j,\ i,j\in\{1,2\}\}$$

répond à la question.

COROLLAIRE 6. *Soient K_1, K_2 des espaces localement compacts contenant un arc. $V(K_1\times K_2)$ n'a pas la propriété de Stone-Weierstrass.*

En effet $V(K_1\times K_2)$ a une algèbre de restriction isomorphe à $V(E_1'\times E_2')$ où $E_1'\times E_2'$ est un pavé compact de $\boldsymbol{T}^2$.

Notons ∞ le cardinal dénombrable, $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ le groupe à deux éléments, D_∞ le groupe $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^\infty$, muni de la topologie produit.

THÉORÈME 7. *Soient K et D des espaces localement compacts tels que K contienne un arc et que D contienne un ensemble homéomorphe à D_∞. $V(K \times D)$ n'a pas la propriété de Stone-Weierstrass.*

D'après [1], chap. II, § 18, un compact D à base dénombrable est réunion d'un ensemble dénombrable et d'un parfait. Un parfait métrique totalement discontinu est homéomorphe à D_∞.

Montrons que $V(\boldsymbol{T} \times D_\infty)$ n'a pas la propriété de Stone-Weierstrass. Nous utiliserons les notations et les résultats de [3], chap. 1, § 2, et chap. III, § 4 et § 5.

Soient $d\colon D_\infty \to \boldsymbol{T}$

$$a = (a_1, a_2, \ldots) \rightsquigarrow \exp\left(2i\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}\right) \quad \text{et} \quad \check{d}\colon \mathscr{C}(\boldsymbol{T}) \to \mathscr{C}(D_\infty).$$

$\hat{d}$ admet un inverse approximé (h_M) où $M = (m_1, m_2, \ldots)$, m_i étant entier > 0.

Par définition $h_M\colon \mathscr{C}(D)_\infty \to \mathscr{C}(\boldsymbol{T})$ est telle que

(i) $\|h_M\| \leqslant 1$,

(ii) $h_M \circ \check{d}$ converge faiblement vers $Id_{\boldsymbol{T}}$ lorsque $M \to \infty$.

Rappelons la construction de h_M.

Soit $\{p/2^s, p \in \mathbf{Z}, s \in \mathbf{Z}\}$ l'ensemble des rationnels dyadiques de $\boldsymbol{R}$,

$$\Gamma = \left\{\exp\left(2i\pi \frac{p}{2^s}\right)\right\}$$

son image dans $\boldsymbol{T}$. Les points de Γ seront notés $(t_1, t_2, \ldots)$. Alors $d^{-1}(t)$ est réduit à un point si $t \in \Gamma^c$, $d^{-1}(t_n) = \{t_n^+, t_n^-\}$ si $t_n \in \Gamma$. Soit $(I_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ une famille d'intervalles fermés de $\boldsymbol{T}$, de longueur $\leqslant \pi/2$ telle que:

(i) le centre de $I_{m,n}$ est t_n et ses extrémités n'appartiennent pas à Γ,

(ii) pour tout n fixé, $I_{1n} \supsetneqq I_{2n} \cdots \supset \bigcap_m I_{m,n} = \{t_n\}$,

(iii) deux intervalles distincts de la famille sont disjoints ou bien l'un est strictement contenu dans l'autre.

Associons-lui la famille d'applications $(i_{m,n})\colon \mathscr{C}(D_\infty) \to \mathscr{C}(D_\infty)$ données par

$$i_{m,n}(f)(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } d(a) \notin I_{m,n}, \\ \lambda\big(d(a)\big) & \text{si } d(a) \in I_{m,n}, \end{cases}$$

où λ est „linéaire" sur $I_{m,n}$.

$h_M = h_{m_1, m_2 \ldots}$ est limite faible sur $\mathscr{C}(D_\infty)$ des applications $h_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = i_{m_n, n} \cdots i_{m_1, 1}$.

Remarquons que si $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(D_\infty)$ et si f_1 est constante sur $I_{m,n}$ nous avons

$$i_{m,n}(f_1 \times f_2) = f_1 \times i_{m,n}(f_2) = i_{m,n}(f_1) \times i_{m,n}(f_2).$$

Cherchons l'image par h_M de certaines fonctions de $\mathscr{C}(D_\infty)$. Le point $a = (a_1, a_2, \ldots) \in D_\infty$ a pour base de voisinages ouverts et fermés:

$$V_N(a) = \{a' \in D_\infty | a'_1 = a_1, \ldots, a'_N = a_N\}, \quad N = 1, 2 \ldots$$

Deux voisinages $V_N(a)$ et $V_{N'}(a')$ sont ou disjoints ou inclus l'un dans l'autre. Tout ensemble ouvert et fermé de D_∞ est donc réunion d'un nombre fini d'ensembles $V_N(a)$ disjoints.

Pour tout N et tout a, $V_N(a)$ contient deux points $t^+_{n_1(N)} = (a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$, $t^-_{n_2(N)} = (a_1, \ldots, a_N, 1, 1, \ldots) \in d^{-1}(\Gamma)$ tels que $t^-_{n_1}(N)$ et $t^+_{n_2(N)} \notin V_N(a)$. Supposons $n_1 < n_2$. Soit $j_{V_{N(a)}}$ l'idempotent de support $V_N(a)$.

Pour $n \geqslant n_2$ et m_i $(i = 1, \ldots, n)$ assez grand, $h_{m_1, \ldots, m_n}(j_{V_N}) = h_{m_1, \ldots, m_{n_2}}(j_{V_N})$. C'est une fonction de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T})$, linéaire par morceaux; elle appartient donc à $A(\boldsymbol{T})$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T})$, constante dans un voisinage de t_{n_1} et t_{n_2}. Pour tout n et m_i $(i = 1, \ldots n)$ assez grand, nous avons

$$h_{m_1, \ldots, m_n}\big(\check{d}(\varphi) \times j_{V_{N(a)}}\big) = h_{m_1, \ldots, m_n}\big(\check{d}(\varphi)\big) \times h_{m_1, \ldots, m_n}(j_{V_{N(a)}}).$$

Soit B la sous-algèbre non dense dans $V(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ définie dans le théorème 5; $\bar{B}$ contient l'ensemble $\{1 \otimes \varphi | \varphi \in A(\boldsymbol{T})\}$.

Soit $\tilde{B}$ la sous-algèbre de $V(\boldsymbol{T} \times D_\infty)$ engendrée par les idempotents $j_{V(a)}\big(V(a) \in \{V_N(a)\}_{N=1}^{\infty}\big)$ et par $(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d})(B)$. Elle est auto-adjointe, sépare les points de $\boldsymbol{T} \times D_\infty$ et contient les constantes. Supposons la dense dans $V(\boldsymbol{T} \times D_\infty)$. Alors pour toute $f \in V(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe

$$\tilde{b} = \sum_{p=1}^{p<\infty} (\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d})(b_p) \times (1 \otimes j_{V(a_p)}) \in \tilde{B}$$

telle que

$$\|(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d})(f) - \tilde{b}\|_{V(\boldsymbol{T} \times D_\infty)} < \varepsilon/3.$$

$(\check{Id}_{\boldsymbol{T}}^{\bullet} \hat{\otimes} h_M)$ est un inverse approximé de $\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d}$.

Donc

(i) pour tout M, $\|(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} h_M)[(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d})(f) - \tilde{b}]\|_{V(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})} < \varepsilon/3$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour M assez grand (dans le sens m_i assez grand pour tout i)

$$\|f - (\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} h_M) \circ (\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d}) f\|_{V(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})} < \varepsilon/3;$$

(iii) pour tout $p \in \{1, \ldots, P\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction

$$\sum_{i=1}^{q_p} \varphi_i \otimes \Psi_i \in V(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T})$$

telle que Ψ_i soit constante dans un voisinage de t_{n_1} et t_{n_2} (t_{n_1} et t_{n_2} associés à $j_{V(a_p)}$) et telle que

$$\Big\|b_p - \sum_1^{q_p} \varphi_i \otimes \Psi_i\Big\|_{V(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})} < \frac{\varepsilon}{9p}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout M assez grand,

$$(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} h_M)\Big(\sum_1^{q_p} \varphi_i \otimes \check{d}(\Psi_i) \times j_{V(a_p)}\Big) = \sum_1^{q_p} \varphi_i \otimes h_M\big(\check{d}(\Psi_i)\big) \times \big(1 \otimes h_M(j_{V(a_p)})\big)$$

et

$$\Big\|(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} h_M)\Big(\sum_1^{q_p} \varphi_i \otimes \check{d}(\Psi_i) \times j_{V(a_p)}\Big) - \\ - \Big(\sum_1^{q_p} \varphi_i \otimes \Psi_i\Big) \times \big(1 \otimes h_M(j_{V(a_p)})\big)\Big\|_{V(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})} < \frac{\varepsilon}{9p}.$$

D'où

$$\Big\|(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \otimes h_M)\tilde{b} - \sum_1^{p} b_p \times 1 \otimes h_M(j_{V(a_p)})\Big\|_{V(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc M' tel que $M \geqslant M'$ (au sens $\forall_i\ m_i \geqslant m_i'$) entraîne

$$\Big\|f - \sum_1^{p} b_p \times 1 \otimes h_M(j_{V(a_p)})\Big\|_{V(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})} < \varepsilon,$$

donc $f \in \bar{B}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le cas $V(E_1' \times D_\infty)$ où E_1' est un arc de $\boldsymbol{T}$ se traite comme dans le théorème 5. A un pavé $E_1' \times E_2'$ de $\boldsymbol{T}^2$ associons la partition de l'unité (φ_{ij}) $(i, j \in \{1, 2\})$. $(\check{Id}_{\boldsymbol{T}} \hat{\otimes} \check{d})\,(\varphi_{ij}) \in \tilde{B}$ est une partition de l'unité dans $V(\boldsymbol{T} \times D_\infty)$.

Les $V[(Id_{\boldsymbol{T}} \times d)^{-1}(K_{ij})]$, $j \in \{1, 2\}$, sont isomorphes et n'ont pas la propriété de Stone-Weierstrass. Or $(Id_{\boldsymbol{T}} \times d)^{-1}(K_{11}) \subset E_1' \times d^{-1}(E_2')$ et $d^{-1}(E_2')$ est réunion d'un ensemble homéomorphe à D_∞ et d'un nombre fini de points isolés.

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Kuratowski, *Topologie*, Warszawa — Wrocław 1952.

[2] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York — London 1962.

[3] N. Th. Varopoulos, *Tensor algebras and harmonic analysis*, Acta Matematica 119 (1967), p. 51-110.

Reçu par la Rédaction le 19. 1. 1970