COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LX/LXI DÉDIÉ À M. ANTONI ZYGMUND 1990

CONSTRUCTION DE BASES ORTHONORMÉES D'ONDELETTES

PAR

YVES MEYER (PARIS)

EN HOMMAGE RESPECTUEUX AU PROFESSEUR ANTONI ZYGMUND

1. Introduction. Rappelons que la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ de Schwartz est composée des fonctions indéfiniment dérivables de la variable réelle x qui ont une décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées. Si ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, nous poserons $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, et nous dirons que $\psi(x)$ est une *ondelette* si l'ensemble des fonctions $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$. Une ondelette appartient donc, par définition, à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$; ce point de vue est plus restrictif que celui que le lecteur trouvera dans [1] ou [2].

Nous montrerons, dans la section suivante, comment construire des ondelettes à partir d'un algorithme que nous appellerons "analyse multirésolution". Se pose alors le problème inverse de savoir si derrière toute ondelette il y a une analyse multirésolution.

Nous étudierons ce problème en dimension un (sans pouvoir le résoudre complètement). Puis nous formulerons et examinerons la question analogue en dimension deux (la réponse est alors négative).

2. Analyse multirésolution. Une *analyse multirésolution* est, par définition, une suite croissante de sous-espaces fermés V_j de $L^2(\mathbf{R})$, $j \in \mathbf{Z}$, vérifiant les propriétés suivantes:

(2.1) $$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \quad \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbf{R}),$$

(2.2) $\forall j \in \mathbf{Z},\ \forall f \in L^2(\mathbf{R}),\quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$,

(2.3) $\forall k \in \mathbf{Z},\ \forall f \in L^2(\mathbf{R}),\quad f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$,

(2.4) il existe une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que la suite $g(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, soit une base de Riesz de V_0.

Rappelons que si H est un espace de Hilbert, une famille e_j, $j \in J$, de vecteurs de H est une *base de Riesz* de H si e_j est une famille totale dans H (les combinaisons linéaires finies des e_j forment une partie dense dans H)

et s'il existe deux constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ telles que, pour toute suite (finie) des coefficients α_j, $j \in J$, on ait

$$c_1\Big(\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2\Big)^{1/2} \leq \Big\|\sum_{j\in J}\alpha_j e_j\Big\| \leq c_2\Big(\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Pour construire une ondelette à partir de l'analyse multirésolution on commence par remplacer g par une fonction $\varphi \in V_0$ telle que $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, soit une base orthonormée de V_0.

En désignant par $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{g}$ les transformées de Fourier de φ et de g, on a alors

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \chi(\xi)\widehat{g}(\xi)\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(\xi+2k\pi)|^2\Big]^{-1/2} \tag{2.6}$$

où $|\chi(\xi)| = 1$, $\chi(\xi+2\pi) = \chi(\xi)$ presque partout, $\chi(\xi)$ étant par ailleurs arbitraire. La condition (2.5) implique $c_1 \leq (\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(\xi+2k\pi)|^2)^{1/2} \leq c_2$ et le choix $\chi(\xi)=1$ conduira à $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Désignons par W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}. On a donc $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et aussi

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}, \tag{2.7}$$

$$f(x) \in W_0,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(x-k) \in W_0. \tag{2.8}$$

La construction des ondelettes à partir des analyses multirésolutions découle du lemme évident suivant:

LEMME 1. *Si $\psi(x)$ appartient à la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et si $\psi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de W_0, alors $\psi(x)$ est une ondelette.*

En effet, par simple changement d'échelle, on en déduit que $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de W_j. Par construction, $L^2(\mathbf{R})$ est la somme hilbertienne directe des W_j, $j \in \mathbf{Z}$. Il en résulte que $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$. Il reste à construire $\psi(x)$. Nous déterminerons, en fait, la transformée de Fourier $\widehat{\psi}(\xi)$ de $\psi(x)$. On peut multiplier cette transformée de Fourier par une fonction arbitraire $\chi(\xi)$ vérifiant $|\chi(\xi)| = 1$, $\chi(\xi+2\pi) = \chi(\xi)$ et indéfiniment dérivable. La fonction $\psi(x)$ n'est pas unique.

Pour construire $\psi(x)$, on observe que $W_0 \subset V_1$ et que $\sqrt{2}\varphi(2x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de V_1. On a donc

$$\psi(x) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\varphi(2x+k), \tag{2.9}$$

où

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\overline{\varphi(2x+k)}\, dx\,.$$

Si ψ et φ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, la suite β_k, $k \in \mathbf{Z}$, est à décroissance rapide et $m_1(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \exp(ik\xi)$ est indéfiniment dérivable.

En passant aux transformées de Fourier, il vient

$$\widehat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,. \tag{2.10}$$

Nous avons de même $V_0 \subset V_1$ et donc

$$\varphi(x) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi(2x+k)\,, \tag{2.11}$$

où

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(2x+k)}\, dx\,.$$

On pose $m_0(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\xi}$ et l'on obtient

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,. \tag{2.12}$$

Nous disposons maintenant de deux bases orthonormées de V_1, à savoir $\sqrt{2}\varphi(2x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, d'une part et $\{\psi(x-k), \varphi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ d'autre part. Ces deux bases orthonormées conduisent à un opérateur unitaire échangeant les coordonnées dans ces deux bases. Il en résulte que la matrice

$$S(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi) \end{pmatrix}$$

est unitaire pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

Réciproquement, si $S(\xi)$ est unitaire, (2.10) définit une ondelette $\psi(x)$ vérifiant les conditions du lemme 1. Un choix possible est donné par $m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}$. Il revient à choisir $\beta_k = (-1)^{k+1}\overline{\alpha}_{-k-1}$ et les autres choix consistent à multiplier $m_1(\xi)$ par une fonction $\chi(\xi)$, indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, périodique de période π et unimodulaire ($|\chi(\xi)| = 1$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$).

Posons $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$. Alors l'ensemble constitué des fonctions φ_k, $k \in \mathbf{Z}$, et des fonctions $\psi_{j,k}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$ puisque $L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_j \oplus \ldots$

Il en résulte que l'on a, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f \mid \varphi_k\rangle \varphi_k(x) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f \mid \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}(x)\,. \tag{2.13}$$

L'algorithme (2.13) est beaucoup plus performant que la version rudimentaire fournie par

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \tag{2.14}$$

Si, par exemple, f appartient à la classe $\mathcal{S}$ de Schwartz il est naturel d'espérer une convergence bien meilleure que celle définie par la norme L^2. Or, si nous nous limitons à (2.14), cet espoir est déçu. En effet, on commence par observer que si $\psi(x)$ est une ondelette, on a nécessairement

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x)\, dx = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{2.15}$$

Si (2.14) convergeait au sens de la norme L^1 lorsque f appartient à $\mathcal{S}$, on pourrait intégrer terme à terme et l'on obtiendrait la conclusion (absurde) que l'intégrale de toute fonction de $\mathcal{S}$ est nulle.

En revanche (2.13) converge vers f au sens de la topologie de $\mathcal{S}$ dès que f appartient à $\mathcal{S}$. De même (2.13) fonctionne encore si f est une distribution tempérée et le second membre de (2.13) convergera vers f pour la topologie de $\mathcal{S}'$. Il n'en est rien pour (2.14) puisque l'on ne peut même pas remplacer f par la fonction identiquement égale à 1 sans tomber sur $1 = 0$!

PROBLÈME. *Soit $\psi(x)$ une ondelette (au sens de l'introduction). Existe-t-il toujours une seconde fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que l'ensemble des fonctions φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, et $\psi_{j,k}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, soit une base orthonormée de L^2?*

Nous ne savons pas répondre à cette question. Si c'est le cas, on appelle V_0 le sous-espace fermé de L^2 engendré par les φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, et W_j le sous-espace fermé de L^2 engendré par les $\psi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$. On a alors $L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \ldots$ Si on définit les V_j par (2.2), on montre sans peine que la suite V_j est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Dire que l'ondelette $\psi(x)$ provient d'une analyse multirésolution équivaut à écrire (2.13).

Terminons cette section en décrivant des exemples explicites d'analyses multirésolutions (conduisant donc à des ondelettes $\psi(x)$).

On part d'une fonction $\theta(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ soumise aux conditions suivantes:

(2.16) $\theta(\xi)$ est paire et son support est inclus dans $[-4\pi/3, 4\pi/3]$,

(2.17) $\theta(\xi) \geq 0$ pour tout ξ et $\theta(\xi) = 1$ si $-2\pi/3 \leq \xi \leq 2\pi/3$,

(2.18) $(\theta(\xi))^2 + (\theta(\xi + 2\pi))^2 = 1$ si $-4\pi/3 \leq \xi \leq -2\pi/3$.

On désigne par $m_0(\xi)$ la fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ vaut $\theta(2\xi)$. On a, grâce à (2.16), $\theta(2\xi) = m_0(\xi)\theta(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

On appelle φ la fonction de $\mathcal{S}$ dont θ est la transformée de Fourier. Alors $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de V_0 et les V_j construits à l'aide de (2.2) forment une analyse multirésolution. La fonction $\omega(\xi) = \theta(\xi)m_0(\xi/2+\pi)$ est indéfiniment dérivable, paire et son support est inclus dans $2\pi/3 \leq |\xi| \leq 8\pi/3$. L'ondelette ψ que nous cherchons à construire est alors définie par

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\omega(\xi). \tag{2.19}$$

Il en résulte que $\psi(x)$ est réelle et vérifie $\psi(x) = \psi(1-x)$ (symétrie autour de 1/2).

3. Etude de l'opérateur U en dimension un. Désignons une fois pour toutes par ψ l'une des ondelettes définies par (2.19). Nous savons alors que la fonction φ existe et appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Soit $\widetilde{\psi}$ une ondelette arbitraire dont nous ne savons rien. En particulier, nous ne savons pas s'il existe une fonction $\widetilde{\varphi}$, appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, telle que la collection des fonctions $\widetilde{\varphi}_k$, $k \in \mathbf{Z}$, et $\widetilde{\psi}_{j,k}$, $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$, soit une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$. En fait, nous ne savons même pas si l'on peut construire $\widetilde{\varphi} \in L^2(\mathbf{R})$ avec cette propriété. Une stratégie utile sera de commencer par construire $\widetilde{\varphi}$ dans $L^2(\mathbf{R})$ sans se soucier de la classe de Schwartz, puis de modifier ce premier choix sans changer l'espace $\widetilde{V}_0$ dont $\widetilde{\varphi}(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée. Pour ce faire, il suffit de multiplier la transformée de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ par une fonction unimodulaire et 2π-périodique.

Pour comparer la base orthonormée inconnue $\widetilde{\psi}_{j,k}$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, à celle dont nous disposons déjà, il est naturel d'introduire l'opérateur unitaire U défini par $U(\psi_{j,k}) = \widetilde{\psi}_{j,k}$ ($j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$). Une stratégie optimiste et linéaire conduit à poser $U(\varphi_k) = \widetilde{\varphi}_k$. Puisque les fonctions $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$ forment une base orthonormée de V_0, les fonctions $\widetilde{\varphi}_k$ seront une base orthonormée de $\widetilde{V}_0$.

Deux difficultés apparaissent. Nous montrerons qu'en général, la suite $\widetilde{\varphi}_k$ ainsi obtenue n'est pas de la forme $\widetilde{\varphi}(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Nous verrons ensuite que $\widetilde{\varphi}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ mais nous avons déjà évoqué cette difficulté.

Etudions sous quelles conditions $\widetilde{\varphi}_k(x) = \widetilde{\varphi}(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$. C'est le cas si et seulement si la restriction de U à V_0 commute avec les translations entières. Alors la restriction de U à V_j commute avec les translations $\tau = k2^{-j}$, $k \in \mathbf{Z}$. En effet, on a $AUA^{-1} = U$ où A est l'opérateur unitaire de dilatation dyadique défini par $Af(x) = \sqrt{2}f(2x)$. On observera que $A\psi_{j,k} = \psi_{j+1,k}$ et que, de même, $A\widetilde{\psi}_{j,k} = \widetilde{\psi}_{j+1,k}$.

La réunion des V_j est dense dans $L^2(\mathbf{R})$ et les rationnels dyadiques $k2^{-j}$ sont dense dans $\mathbf{R}$. Il en résulte que U commute avec toutes les translations réelles. Il existe donc une fonction $m(\xi) \in L^\infty(\mathbf{R})$ telle qu'en appelant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier, on ait $\mathcal{F}(Uf)(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$. Puisque U est unitaire, on a $|m(\xi)| = 1$ presque partout. Puisque U commute avec les dilatations dyadiques, on a $m(2\xi) = m(\xi)$. Enfin, le fait que $U(\psi_{j,k}) = \widetilde{\psi}_{j,k}$ appartienne à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$ implique que $m(\xi)$ est indéfiniment dérivable en dehors de 0. Nous résumons ce qui précède et annonçons ce qui suit dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME 1. *Si l'on a* $(U\varphi_k)(x) = (U\varphi)(x-k)$ *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, *alors* U *est un opérateur de convolution et il existe une fonction* $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ *telle que la collection composée des fonctions* $\widetilde{\varphi}_k$, $k \in \mathbf{Z}$, *et des fonctions* $\widetilde{\psi}_{j,k}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, *soit une base orthonormée de* $L^2(\mathbf{Z})$.

Avant d'établir le théorème 1 dans toute sa généralité, considérons le cas particulier où $U = H$ est la transformation de Hilbert (c'est-à-dire l'opérateur de convolution avec la distribution π^{-1} v.p. $(1/x)$). Alors $H(\psi) = \widetilde{\psi}$ entraîne $H(\psi_{j,k}) = \widetilde{\psi}_{j,k}$ puisque H commute avec les translations et les dilatations positives. Puisque la transformée de Fourier de ψ est nulle au voisinage de 0, $H(\psi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Mais $H(\varphi)$ ne peut appartenir à $L^1(\mathbf{R})$ puisque sa transformée de Fourier est discontinue en 0. Pour construire $\widetilde{\varphi}$, on part de $\check{\varphi} = H(\varphi)$ et l'on observe que $\check{\varphi}_k$, $k \in \mathbf{Z}$, est une base orthonormée de $\widetilde{V}_0 = H(V_0)$. A l'aide de cette base orthonormée particulière, on construit les autres choix en multipliant la transformée de Fourier de $\check{\varphi}$ par une fonction 2π-périodique et unimodulaire $\chi(\xi)$. Nous allons, grâce à un choix approprié de $\chi(\xi)$, faire disparaître la singularité introduite par la transformation de Hilbert. On veut que $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi) = \chi(\xi) \operatorname{sign} \xi \widehat{\varphi}(\xi)$ appartienne à $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Pour cela, on définit $\chi(\xi) = \exp i\alpha(\xi)$ sur $[0, 2\pi[$ en imposant $\alpha(\xi) = 0$ sur $[0, 2\pi/3]$, $\alpha(\xi) = \pi$ sur $[4\pi/3, 2\pi[$ et $\alpha(2\pi - \xi) = \pi - \alpha(\xi)$.

Finalement $\widetilde{\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et est réelle. Les fonctions $\widetilde{\varphi}(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, et $\widetilde{\psi}_{j,k}$, $j \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$.

Retournons au cas général. On doit, grâce à un choix approprié de $\chi(\xi)$, effacer la singularité en 0 du produit $\chi(\xi) m(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$. On procède comme dans le cas de la transformation de Hilbert. On définit $\chi(\xi) = \overline{m(\xi)}$ si $0 \leq \xi \leq 2\pi/3$, $\chi(\xi) = \overline{m(\xi - 2\pi)}$ si $4\pi/3 \leq \xi < 2\pi$ et il convient de raccorder ces deux choix en assurant $|\chi(\xi)| = 1$ et $\chi(\xi) \in C^\infty(]0, 2\pi[)$. C'est évidemment possible. On observera que $\chi(\xi)$ est discontinue en $2k\pi$ mais que, si $k \neq 0$, ces singularités disparaissent après multiplication par $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Le théorème 1 est complètement démontré. On observera qu'il existe des ondelettes $\widetilde{\psi}$ auxquelles le théorème ne s'applique pas. Choisissons en effet ψ de sorte que la fonction $\theta(\xi)$ vérifie, outre (2.16), (2.17) et (2.18), la condition $\theta(\xi) > 0$ si $-4\pi/3 < \xi < 4\pi/3$. En ce qui concerne $\widetilde{\psi}$, nous procédons de même en imposant cette fois au support de $\theta(\xi)$ d'être inclus dans $[-5\pi/4, 5\pi/4]$ avec $\theta(\xi) = 1$ sur $[-3\pi/4, 3\pi/4]$. Alors l'opérateur U défini par $U(\psi_{j,k}) = \widetilde{\psi}_{j,k}$ ne peut commuter avec les translations; sinon les supports de $\widehat{\psi}$ et de $\widehat{\widetilde{\psi}}$ seraient les mêmes et nous avons tout fait pour que ces supports soient différents.

4. Etude de l'opérateur U en dimension deux. Les fonctions φ et ψ sont toujours construites à l'aide de la fonction θ vérifiant (2.16), (2.17) et (2.18). On pose alors $\psi^{(1)}(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$, $\psi^{(2)}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ et $\psi^{(3)}(x,y) = \psi(x)\psi(y)$. Dans ces conditions la collection $2^j\psi^{(\varepsilon)}(2^jx-k, 2^jy-l)$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, $\varepsilon = 1,2$ ou 3, est une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^2)$. Cela signifie que la fonction φ est indispensable à la construction des ondelettes bi-dimensionnelles. Le fait que trois ondelettes soient nécessaires en dimension deux devient évident si l'on introduit l'analyse multirésolution correspondante. La fonction $\phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ a la propriété que la suite $\phi(x-k, y-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, soit une suite orthonormée; cette suite est une base orthonormée d'un espace que nous noterons $\mathcal{V}_0$. On a $\mathcal{V}_0 = V_0\widehat{\otimes}V_0$ où la notation $\widehat{\otimes}$ signifie que le produit tensoriel algébrique est complété pour la norme $L^2(\mathbf{R}^2)$; V_0 est défini par le fait que $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, soit une base orthonormée de V_0.

A partir de $\mathcal{V}_0$, on définit les $\mathcal{V}_j$ par $f(x,y) \in \mathcal{V}_j \Leftrightarrow f(2x,2y) \in \mathcal{V}_{j+1}$. Alors cette suite $\mathcal{V}_j$, $j \in \mathbf{Z}$, est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbf{R}^2)$. La définition est identique à celle donnée en dimension un à ceci près que $\mathbf{Z}$ doit être remplacé par $\mathbf{Z}^2$.

On définit $\mathcal{W}_j$ par $\mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j = \mathcal{V}_{j+1}$. On a $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et la distributivité du produit tensoriel par rapport à l'opération de somme directe fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{j+1} &= (V_j \oplus W_j)\widehat{\otimes}(V_j \oplus W_j)\\ &= V_j\widehat{\otimes}V_j\\ &\quad \oplus V_j\widehat{\otimes}W_j\\ &\quad \oplus W_j\widehat{\otimes}V_j\\ &\quad \oplus W_j\widehat{\otimes}W_j\,.\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{V}_{j+1}$ est la somme directe orthogonale de $\mathcal{V}_j$ et de trois autres morceaux, ce qui conduit à trois ondelettes. Les fonctions $\varphi(x-k)\psi(y-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, constituent une base orthonormée de $V_0\widehat{\otimes}W_0$, les fonctions $\psi(x-k)\varphi(y-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, forment une base orthonormée de $W_0\hat{\otimes}V_0$ et finalement les $\psi(x-k)\psi(y-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, conviennent pour $W_0\widehat{\otimes}W_0$.

Ceci étant, la même question que nous avons posée en dimension un peut être formulée en dimension deux.

PROBLÈME. *Soit F un ensemble de trois fonctions $\psi(x,y)$ appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ de Schwartz et telles que la collection de toutes les fonctions*

$$2^j\psi(2^jx-k, 2^jy-l)\,, \quad j \in \mathbf{Z}\,,\ k \in \mathbf{Z}\,,\ l \in \mathbf{Z}\,,\ \psi \in F\,, \tag{4.1}$$

soit une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^2)$. Existe-t-il une fonction $\varphi(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ telle que la collection des fonctions $\varphi(x-k,y-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, et des fonctions $2^j\psi(2^jx-k,2^jy-l)$, $j \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, $\psi \in F$, soit une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^2)$?

Le théorème suivant donne un premier élément de réponse.

THÉORÈME 2. *Il existe un ensemble F de trois fonctions ψ de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ pour lesquelles on peut trouver une fonction $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ de sorte que $\varphi(x-k,y-l)$ et $2^j\psi(2^jx-k,2^jy-l)$, $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$, $j \geq 0$, $\psi \in F$, soit une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^2)$ mais pour lesquelles il est impossible de choisir cette fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$.*

Rappelons que les différents choix (notés φ_1, φ_2 etc...) de φ sont reliés par $\widehat{\varphi}_2(\xi) = \widehat{\varphi}_1(\xi)\chi(\xi)$ où $\chi(\xi)$ est une fonction unimodulaire et 2π-périodique en chaque variable.

Pour construire l'ensemble F, nous partons de l'ensemble E des trois ondelettes explicites $\psi^{(1)}(x,y)$, $\psi^{(2)}(x,y)$ et $\psi^{(3)}(x,y)$ construites au début de cette section. Nous désignerons par $\varphi(x)$ la fonction associée à ψ et nous supposerons (ce qui est compatible avec les autres conditions imposées sur $\widehat{\varphi}$) que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ si $-\pi \leq \xi \leq \pi$. On pose ensuite, si $j \in \mathbf{Z}$ et $k = (k_1,k_2) \in \mathbf{Z}^2$,

$$\psi_{(j,k)}(x,y) = 2^j\psi^{(\epsilon)}(2^jx-k_1,2^jy-k_2)\,, \quad \psi^{(\epsilon)} \in E\,. \tag{4.2}$$

De même $\varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Alors l'ensemble des $\varphi(x-k_1,y-k_2) = \varphi_k(x,y)$, $k \in \mathbf{Z}^2$, et des $\psi_{(j,k)}(x,y)$, $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}^2$, $\psi \in E$, sera noté $\mathcal{B}$ et constitue une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R}^2)$ composée de fonctions de la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ de Schwartz.

Nous désignons par $R = R_1 + iR_2$ l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^2)$, commutant avec les translations et les dilatations positives, et qui est défini, via la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, par

$$(\mathcal{F}R)f(\xi) = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\widehat{f}(\xi)\,. \tag{4.3}$$

Considérons alors l'image par R de la base $\mathcal{B}$. Posons $\widetilde{\varphi} = R(\varphi)$ et $\widetilde{\psi} = R(\psi)$, $\psi \in E$. Alors les éléments de $\widetilde{\mathcal{B}} = R(\mathcal{B})$ sont les fonctions $\widetilde{\varphi}_k$ et $\widetilde{\psi}_{(j,k)}$, puisque R commute avec les translations et les dilatations positives. En outre les fonctions $\widetilde{\psi}$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ puisque $\mathcal{F}(\widetilde{\psi})(\xi) = \frac{\xi_1+i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\widehat{\psi}(\xi)$ est, en fait, nulle au voisinage de l'origine.

Il est clair que $\widetilde{\varphi}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$. Plus précisément, $\widetilde{\varphi}$ n'appartient pas à $L^1(\mathbf{R}^2)$ car sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\widetilde{\varphi})$ n'est pas continue en 0. Pour terminer de démontrer le théorème 2, il suffit de prouver que l'on ne peut effacer cette singularité à l'origine en multipliant $\mathcal{F}(\widetilde{\varphi})$ par une fonction χ vérifiant les conditions (4.4) et (4.5) du lemme suivant.

Lemme 2. *Soit $\chi \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$. Alors les trois conditions suivantes sont incompatibles:*

(4.4) $\chi(\xi_1,\xi_2)$ *est 2π-périodique en chaque intervalle,*

(4.5) $|\chi(\xi_1,\xi_2)| = 1$ *presque partout,*

(4.6) $\dfrac{\xi_1 + i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\chi(\xi_1,\xi_2)$ *est, en fait, une fonction continue sur le carré C défini par $-\pi \le \xi_1 \le \pi$, $-\pi \le \xi_2 \le \pi$.*

En admettant ce lemme, on observe que la fonction $\widehat{\varphi}(\xi_1)\widehat{\varphi}(\xi_2) \times \frac{\xi_1+i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\chi(\xi_1,\xi_2)$ ne peut être continue. Il reste à prouver le lemme.

On commence par désigner par $F(\xi)$ la fonction continue sur le carré C qui est égale à $\frac{\xi_1+i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\chi(\xi_1,\xi_2)$ presque partout sur C. On remplace immédiatement $\chi(\xi)$ par une fonction continue sur C privé de l'origine. On appelle γ la constante $F(0)$ et l'on a $|\gamma| = 1$ et $\chi(\xi_1,\xi_2) \sim \gamma\frac{\xi_1-i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$ lorsque $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ tend vers 0.

On désigne par $\Gamma = \partial C$ le bord orienté du carré C. On pose $\Gamma_t = t\Gamma$, $0 < t < 1$, et l'on étudie la courbe $\chi(\Gamma_t)$ paramétrée par la longueur d'arc orienté s sur Γ. La courbe $\chi(\Gamma_t)$ est incluse dans le cercle unité $|z| = 1$. L'indice de cette courbe par rapport à 0 est une fonction continue de t lorsque $0 < t \le 1$. Lorsque t tend vers 0 cet indice tend vers -1. Lorsque $t = 1$, cet indice est nul puisque les bords opposés de Γ se déduisent par périodicité de période 2π, soit en ξ_1, soit en ξ_2; ces bords sont parcourus en sens contraire (une fois identifiés par périodicité) et $\chi(\xi)$ est périodique.

On aboutit donc à une contradiction.

RÉFÉRENCES

[1] P. G. Lemarié et Y. Meyer, *Ondelettes et bases hilbertiennes*, Rev. Mat. Iberoamericana 2 (1986), 1–18.

[2] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, 1990.

CEREMADE
UNIVERSITÉ PARIS IX–DAUPHINE
PLACE DE LATTRE DE TASSIGNY
75775 PARIS CEDEX 16, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 14.2.1990