COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIX 1978 FASC. 1

UN EXEMPLE D'UNE FONCTION SUP-MESURABLE QUI N'EST PAS MESURABLE

PAR

Z. GRANDE (ELBLĄG) ET J. S. LIPIŃSKI (GDAŃSK)

Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit $R\times R$.

Définition (voir [3]). Une fonction $F\colon R^2\to R$ est dite *sup-mesurable* lorsque, quelle que soit la fonction $f\colon R\to R$ mesurable (au sens de Lebesgue), la fonction

$$g_f(x) = F\big(x, f(x)\big)$$

est également mesurable.

La mesurabilité de la superposition $F\big(x, f(x)\big)$ a été examinée par Carathéodory dans son livre [1].

On sait qu'il existe une fonction $F\colon R^2\to R$ mesurable au sens de Lebesgue qui n'est pas sup-mesurable (voir [3], p. 298). Dans [2] l'auteur a demandé s'il existe une fonction $F\colon R^2\to R$ sup-mesurable et non-mesurable. Nous démontrerons que la réponse est affirmative en admettant l'hypothèse du continu.

THÉORÈME 1. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $h\colon A\to R$, où $A\subset R$, telle que son graphe $G(h)$ est un ensemble non-mesurable dans R^2 et son intersection avec le graphe de toute fonction borelienne définie sur R est au plus dénombrable.*

Démonstration. Rangeons toutes les fonctions boreliennes sur R en une suite transfinie $f_1, f_2, \ldots, f_\alpha, \ldots, \alpha<\Omega$, où Ω est le premier ordinal indénombrable, et rangeons de même tous les ensembles fermés dans R^2 qui sont de mesure (lebesguienne) positive en une suite transfinie $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_\alpha, \ldots, \alpha<\Omega$. Fixons un point $(a_1, b_1)\in F_1$ et posons $h(a_1) = b_1$. Soit $\alpha<\Omega$ $(\alpha>1)$. Supposons que, quel que soit $\beta<\alpha$, on ait déjà défini a_β et $h(a_\beta) = b_\beta$ de manière que

$$(a_\beta, b_\beta)\in F_\beta\setminus\bigcup_{\gamma<\beta} G(f_\gamma) \quad \text{et} \quad a_\gamma\neq a_\beta \text{ pour tout } \gamma<\beta.$$

Remarquons que l'ensemble $F_a \setminus \bigcup_{\beta<a} G(f_\beta)$ est mesurable et de mesure positive. Il existe donc un point

$$(a_a, b_a) \in F_a \setminus \bigcup_{\beta<a} G(f_\beta)$$

tel que $a_a \neq a_\beta$ pour $\beta < a$. Posons $h(a_a) = b_a$. Il est évident que

$$(*) \qquad \big(a_a, h(a_a)\big) = (a_a, b_a) \notin \bigcup_{\beta<a} G(f_\beta).$$

Soit $A = \{a_a: a < \Omega\}$. Démontrons que la fonction $h: A \to R$ satisfait aux conditions de notre théorème. Supposons, par contre, que le graphe $G(h)$ soit mesurable. Comme il est alors de mesure zéro, l'ensemble $R^2 \setminus G(h)$ contient un ensemble fermé de mesure positive, ce qui contredit l'hypothèse que $G(h)$ coupe tous les ensembles fermés de mesure positive.

Soit maintenant $k: R \to R$ une fonction borelienne. Il existe donc un indice $a_0 < \Omega$ tel que $k(x) = f_{a_0}(x)$ pour tout $x \in R$. Il résulte de $(*)$ que

$$\big(a_a, h(a_a)\big) \notin G(f_{a_0}) = G(k) \qquad \text{pour tout } a > a_0.$$

Comme a_0 est un nombre dénombrable, l'ensemble $G(k) \cap G(h)$ est au plus dénombrable, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F: R^2 \to R$ qui est sup-mesurable et non-mesurable.*

Démonstration. Soient h une fonction du théorème 1 et $G(h)$ son graphe. Posons

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } (x, y) \in G(h), \\ 0 & \text{pour } (x, y) \notin G(h). \end{cases}$$

La fonction $F: R^2 \to R$ n'est pas mesurable puisque l'ensemble $G(h)$ ne l'est pas. Supposons, par contre, que la fonction F ne soit pas sup-mesurable. Il existe donc une fonction mesurable $f: R \to R$ telle que la fonction $g_f(x) = F\big(x, f(x)\big)$ ne soit pas mesurable. La fonction g_f étant la fonction indicatrice de l'ensemble $B = \{x \in R: f(x) = h(x)\}$, celui n'est pas mesurable. La fonction $f: R \to R$ étant mesurable, il existe une fonction borelienne $k: R \to R$ telle que l'ensemble $C = \{x \in R: k(x) \neq f(x)\}$ soit de mesure zéro. On a bien

$$\{x \in R: h(x) = k(x)\} \supset B \setminus C.$$

Il en résulte que l'ensemble $G(h) \cap G(k)$ est indénombrable, ce qui est impossible vu les propriétés de $G(h)$. La fonction $F: R^2 \to R$ est donc sup-mesurable.

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927.

[2] Z. Grande, *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition* $F(x, f(x))$, Dissertationes Mathematicae (to appear).

[3] И. В. Шрагин, *Условия измеримости суперпозиций*, Доклады Академии наук СССР 197 (1971), p. 295-298.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE GDAŃSK
UNIVERSITÉ DE GDAŃSK

Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1976