COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXII 1975 FASC. 2

PRODUITS TENSORIELS INJECTIFS D'ESPACES DE SIDON

PAR

FRANÇOISE LUST (ORSAY)

Soient E un espace de Banach et $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite bornée d'éléments de E. On dira que $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ est une *suite de Sidon* si les normes $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ et $\|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x_k\|$ sont équivalentes lorsque $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ décrit l'ensemble des suites complexes nulles à partir d'un certain rang.

Suivant la terminologie de Meyer [5] on dira que E est un *espace de Sidon* si toute suite bornée $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ d'éléments de E contient soit une sous-suite convergente en norme, soit une sous-suite de Sidon.

Il est clair que dans un espace de Sidon E toute suite convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$ est convergente en norme (E' désignant le dual de E). D'après le théorème de Šmulian il en résulte que tout ensemble compact pour la topologie $\sigma(E, E')$ est compact. On appelle *propriété de Schur* cette dernière propriété.

Par exemple, tout espace de dimension finie, tout quotient de $l^1(\boldsymbol{Z})$ qui est dual d'un sous-espace de $C_0(\boldsymbol{Z})$ est un espace de Sidon.

Soient E et F deux espaces de Banach. Leur produit tensoriel algébrique $E\otimes F$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E', F)$ ou de $\mathscr{L}(F', E)$. Soit $E\hat{\hat{\otimes}}F$ le complété de $E\otimes F$ pour la norme de $\mathscr{L}(E', F)$ (ou $\mathscr{L}(F', E)$). C'est aussi un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E', F'')$ (ou $\mathscr{L}(F', E'')$) qui est le dual du produit tensoriel projectif $E'\hat{\otimes}F'$ (voir [2]).

On démontre le

THÉORÈME 1. *Si E et F sont deux espaces de Sidon, leur produit tensoriel injectif $E\hat{\hat{\otimes}}F$ est un espace de Sidon.*

Si E et F sont deux espaces de Banach, on désigne par $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ le sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E', F)$ formé des applications u dont la transposée ${}^t u$ envoie F' dans E. Ce sont aussi les applications de E' dans F continues pour les topologies $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F, F')$.

PROPOSITION 1. *Soient E un espace ayant la propriété de Schur et F un espace de Banach. Toute application $u \in \mathscr{L}(E'_s, F_s)$ est une application compacte de E' dans F.*

L'application ${}^tu\colon F' \to E$ est continue pour les topologies $\sigma(F', F)$ et $\sigma(E, E')$. Elle envoie la boule unité de F', qui est $\sigma(F', F)$-compacte sur une partie de E qui est $\sigma(E, E')$-compacte, donc compacte. La transposée ${}^tu$ étant compacte, u est aussi compacte, d'après [1], § 6.4.

On démontrera que si E et F sont des espaces de Sidon, $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ est un espace de Sidon. Son sous-espace fermé $E \hat{\hat{\otimes}} F$ sera aussi un espace de Sidon. On ne sait pas si sous ces hypothèses $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est égal à $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$.

PROPOSITION 2. *Soient E et F des espaces de Sidon. Toute suite bornée $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ contient soit une sous-suite de Sidon, soit une sous-suite (u'_k) convergente dans $\mathscr{L}_s(E'_s, F_s)$, c'est-à-dire il existe u dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ telle que pour tout e' dans E' et tout f' dans F'*

$$u'_k(e' \otimes f') \xrightarrow{k \to \infty} u(e' \otimes f').$$

S'il existe un élément $e' \in E'$ et une sous-suite de Sidon dans F extraite de $(u_k(e'))_{k=0}^{\infty}$, la suite $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ contient évidemment une sous-suite de Sidon dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$; de même, s'il existe un $f' \in F'$ tel que $({}^tu_k(f'))_{k=0}^{\infty}$ contienne une sous-suite de Sidon dans E.

Il reste donc à étudier le cas où $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ est une suite bornée dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ telle que

(i) $(u_k(e'))_{k=0}^{\infty}$ est un ensemble relativement compact dans F pour tout $e' \in E'$,

(ii) $({}^tu_k(f'))_{k=0}^{\infty}$ est un ensemble relativement compact dans E pour tout $f' \in F'$.

On utilise le résultat suivant ([3], § 5):

Soient A un espace topologique compact, B un espace métrique, $\mathscr{P}$ un ensemble de parties de A recouvrant A, et $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}(A, B)$ l'espace des fonctions continues φ définies sur A, à valeurs dans B, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties de $\mathscr{P}$. Soit $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite dont l'ensemble des termes est relativement compact dans $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}(A, B)$. Alors il existe une sous-suite convergente dans $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}(A, B)$.

L'espace A est le produit $B_1(E')_s \times B_1(F')_s$ des boules unités de E' et F' munies des topologies $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F', F)$; l'espace B est le corps des complexes; $\mathscr{P}$ est l'ensemble des parties de la forme $\{e'\} \times B_1(F')$ ou $B_1(E') \times \{f'\}$; la suite $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ est définie par $\varphi_k(e', f') = \langle u_k(e'), f' \rangle$. La continuité de φ_k par rapport à l'ensemble des variables résulte de ce que l'image par u_k de $B_1(E')$ est compacte dans F et que, dans $B_1(F')$, la topologie $\sigma(F', F)$ est la même que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de F.

Soit Γ la fermeture de $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ dans $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}(A,B)$. Les éléments de Γ sont des applications linéaires de E' dans F, dont les transposées envoient F' dans E, donc $\Gamma \subset \mathscr{L}(E'_s, F_s)$.

Par hypothèse $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ est précompacte dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ pour la structure de la convergence uniforme sur les parties $\{e'\} \times B_1(F')$ et $B_1(E') \times \{f'\}$. La boule unité de $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ est l'intersection des boules unités de $\mathscr{L}(E', F)$ et $\mathscr{L}(F', E)$ et est donc complète pour cette structure uniforme. La suite $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}(A, B)$.

PROPOSITION 3. *Soient E et F des espaces de Banach qui vérifient la propriété de Schur. Alors toute suite bornée dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ qui converge dans $\mathscr{L}_s(E'_s, F_s)$ converge en norme, c'est-à-dire $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ vérifie la propriété de Schur.*

Soit $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite bornée dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ convergeant vers $u \in \mathscr{L}(E'_s, F_s)$ pour la topologie de $\mathscr{L}_s(E'_s, F_s)$. On peut supposer $u = 0$.
On considère l'application

$$T : E' \to C_0(\mathbf{Z}, F), \qquad e' \to \big(u_k(e')\big)_{k=0}^{\infty}.$$

La transposée ${}^tT$ est définie par

$$l^1(\mathbf{Z}, F') \to E, \qquad (f'_k)_{k=0}^{\infty} \to \sum_{k=0}^{\infty} {}^tu_k(f'_k).$$

D'après la proposition 1, T est une application compacte. Pour tout compact K dans $C_0(\mathbf{Z}, F)$ il existe une suite $(\omega_k)_{k=0}^{\infty}$ positive ou nulle tendant vers 0, telle que, pour tout $x = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ dans K, on a $\|f_k\| \leqslant \omega_k$. Donc pour tout e' dans $B_1(E')$ on a $\|u_k(e')\| \leqslant \omega_k$, ou encore $\|u_k\|_{\mathscr{L}(E'_s, F_s)} \leqslant \omega_k$. Donc $\|u_k\|_{\mathscr{L}(E'_s, F_s)}$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Les propositions 2 et 3 entraînent le théorème 1.

Remarques. (i) On a vu que $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $\mathscr{C}\big(B_1(E')_s \times B_1(F')_s\big)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $B_1(E') \times B_1(F')$. D'après le théorème de Lebesgue une suite bornée dans $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ converge faiblement vers un élément de $\mathscr{L}(E'_s, F_s)$ si et seulement si elle converge ponctuellement sur le produit $B_1(E') \times B_1(F')$ vers un élément de $\mathscr{C}\big(B_1(E')_s \times B_1(F')_s\big)$.

(ii) La démonstration du théorème 1 donne la structure des suites de Sidon $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ dans $E \hat{\otimes} F$. Nécessairement il existe un $e' \in E'$ (ou un $f' \in F'$) tels que $\big(u_k(e')\big)_{k=0}^{\infty}$ (ou $\big({}^tu_k(f')\big)_{k=0}^{\infty}$) contienne une sous suite de Sidon dans F (ou E).

Exemple. Le théorème 1 entraîne que si les $(E_i)_{i=1}^{n}$ sont des espaces de Sidon, leur produit tensoriel injectif $E_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} E_n$ est aussi un espace de Sidon.

Soit C_Λ l'espace des fonctions continues sur le groupe $\boldsymbol{T}$ des nombres complexes de module 1 dont le spectre reste dans un sous-ensemble Λ du groupe $\boldsymbol{Z}$, muni de la norme uniforme. Les polynômes trigonométriques de la forme

$$P(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda t}$$

sont denses dans C_Λ. Par définition Λ est un *ensemble de Sidon* si C_Λ est isomorphe à l^1 ou encore si la suite $(e^{i\lambda t})_{\lambda\in\Lambda}$ est une suite de Sidon dans $C(\boldsymbol{T})$; C_Λ est alors un espace de Sidon. Il peut l'être encore sans que Λ soit un ensemble de Sidon.

THÉORÈME 2. *Soit l un entier positif fixé et soit Λ l'ensemble des entiers positifs de la forme $3^{k_1} + \ldots + 3^{k_l}$ où les k_i $(i = 1, \ldots, l)$ sont des entiers positifs croissants. Alors C_Λ est un espace de Sidon.*

On n'a qu'à prouver que C_Λ est isomorphe à un sous-espace fermé de $l^1\hat{\hat{\otimes}}\ldots\hat{\hat{\otimes}}l^1$ (l fois). L'isomorphisme fait correspondre à

$$P(t) = \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_l} a_{k_1\ldots k_l}\{\exp[i\cdot 3^{k_1}t]\ldots\exp[i\cdot 3^{k_l}t]\}$$

la matrice $(a'_{p_1\ldots p_l})$ définie par $a'_{k_1\ldots k_l} = a_{k_1\ldots k_l} = a'_{\sigma(k_1\ldots k_l)}$ pour toute permutation σ des indices et $a'_{p_1\ldots p_l} = 0$ si deux des indices sont égaux.

D'après la définition de la norme dans $l^1\hat{\hat{\otimes}}\ldots\hat{\hat{\otimes}}l^1$ et la symétrie de la matrice $(a'_{p_1\ldots p_l})$, sa norme est équivalente à

$$\sup_{(\exp[i\theta_k])\in l^\infty}\Big|\sum_{k_1<\ldots<k_l} a_{k_1\ldots k_l}\{\exp[i\theta_{k_1}]\ldots\exp[i\theta_{k_l}]\}\Big|.$$

Cette quantité est évidemment supérieure ou égale à $\|P(t)\|_\infty$. D'autre part, soit μ la mesure positive de masse 1 sur $\boldsymbol{T}$ définie par le produit de Riesz

$$\mu = \prod_{k=1}^{\infty}\big(1+\cos(3^k t+\theta_k)\big).$$

Alors

$$\hat{\mu}(3^{k_1}+\ldots+3^{k_l}) = \exp[i\theta_{k_1}]\times\ldots\times\exp[i\theta_{k_l}]$$

et

$$\Big|\sum_{k_1<\ldots<k_l} a_{k_1\ldots k_l}\{\exp[i\theta_{k_1}]\times\ldots\times\exp[i\theta_{k_l}]\}\Big| = \Big|\int P(t)\,d\mu(t)\Big| \leqslant \|P(t)\|_\infty.$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

Ajouté aux épreuves. Après que ce travail a été soumis, un nouveau résultat de Rosenthal [6] lié au même sujet a été annoncé. On en tient compte dans [4].

TRAVAUX CITÉS

[1] Dunford-Schwarz, *Linear operators*, Vol. I, New York 1958.
[2] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1966).
[3] — *Espaces vectoriels topologiques*, Cours à Sao Paulo, 1964.
[4] F. Lust, *Produits tensoriels injectifs d'espaces faiblement séquentiellement complets*, Colloquium Mathematicum 33 (1975), sous presse.
[5] Y. Meyer, *Recent advances in spectral synthesis*, Conference on Harmonic Analysis, Maryland 1972, Lecture Notes in Mathematics 266.
[6] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* l_1 (à paraître).

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1973