COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLI 1979 FASC. 2

L'ESPACE DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DONT LE SPECTRE EST CONTENU DANS UN ENSEMBLE COMPACT DÉNOMBRABLE A LA PROPRIÉTÉ DE SCHUR

PAR

FRANÇOISE LUST (ORSAY)

L'objet de ce travail est de prouver son titre. On désignera systématiquement par B un espace de Banach, par B' son dual et par $\sigma(B, B')$ la topologie faible sur B définie par la dualité.

Définition 1. Un espace de Banach B a la *propriété de Schur* si les parties de B compactes pour la topologie $\sigma(B, B')$ sont compactes.

D'après un théorème de Šmulian, il est équivalent de dire que les suites convergeant vers 0 pour $\sigma(B, B')$ convergent en norme. Rosenthal [7] a prouvé que de toute suite bornée en norme x_n, $n \geqslant 1$, d'un tel espace, on peut, soit extraire une sous-suite convergente, soit extraire une „sous-suite en l^1", c'est-à-dire une sous-suite $x_{n(k)}$, $k \geqslant 1$, telle que $\|\sum_{k\geqslant 1} c_k x_{n(k)}\|_B$ et $\sum_{k\geqslant 1}|c_k|$ soient des normes équivalentes sur le sous-espace fermé de B engendré par $x_{n(k)}$, $k \geqslant 1$.

On connaît très peu d'exemples de tels espaces: l'espace l^1, les quotients de l^1 qui sont duals de sous-espaces de c_0 [3], les sommes directes l^1 de tels espaces, le produit tensoriel injectif d'un nombre fini de tels espaces [5].

On va montrer, à l'aide de techniques d'analyse harmonique, que certains espaces invariants par translation de fonctions continues sur un groupe localement compact abélien ont la propriété de Schur.

Les notations sont celles du livre de Rudin [9]. Nous les rappelons pour la commodité du lecteur.

On note:

G — un groupe topologique localement compact abélien (désigné par l.c.a.);

Γ ou $\hat{G}$ — son dual;

$\bar{\Gamma}$ — le compactifié de Bohr de Γ;

G_d — le groupe G muni de la topologie discrète;

G_pE — le sous-groupe de G_d engendré par un ensemble $E \subset G$;

$C(G)$ — l'espace des fonctions continues sur G, tendant vers 0 à l'infini;

$C_E(G)$ — le sous-espace de $C(G)$ formé des fonctions à spectre dans un ensemble $E \subset \Gamma$;

$L_E^\infty(G)$ — le sous-espace de $L^\infty(G)$ formé des fonctions à spectre dans un ensemble $E \subset \Gamma$;

$C_E(K)$ — la fermeture, pour la norme de $C(K)$, de l'espace quotient de $C_E(G)$ par le sous-espace des éléments nuls sur un compact $K \subset G$;

$M(G)$ — le dual de $C(G)$;

$PM(G)$ — l'espace transformé de Fourier de $L^\infty(\Gamma)$;

$A(G)$ — l'espace transformé de Fourier de $L^1(\Gamma)$;

$PM(E)$ — le sous-espace de $PM(G)$ formé des pseudomesures à support dans un fermé $E \subset G$; c'est aussi l'espace transformé de Fourier de $L_E^\infty(\Gamma)$;

$A(E)$ — l'algèbre quotient de $A(G)$ par l'idéal $I(E)$ des fonctions nulles sur un fermé $E \subset G$;

$l^1(E)$ — l'espace des mesures discrètes sur un ensemble $E \subset G$;

$\overline{l^1(E)}$ — sa fermeture pour la norme de $PM(G)$.

Le résultat essentiel de ce travail est le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit E un compact dénombrable dans un groupe G l.c.a. Alors l'espace $PM(E)$ a la propriété de Schur.*

On rappelle [4] que si E est compact dénombrable, l'espace $PM(E)$ est le dual de $A(E)$, et que l'espace $l^1(E)$ est dense pour la norme pseudomesure dans $PM(E)$. Il en résulte que $PM(E)$ est l'espace transformé de Fourier de $C_E(\bar{\Gamma})$. Pour étudier $PM(E)$ on peut se limiter au cas où G est métrique compact, comme le montre le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit E un compact dénombrable dans un groupe G l.c.a.*

(a) *Sur $l^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_pE)$ coïncident.*

(b) *Il existe un groupe métrique compact G_1 tel que G_pE soit dense dans G_1, tel que sur $l^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_1)$ coïncident et tel que E soit encore compact dénombrable dans G_1.*

La démonstration du lemme 1 est très simple. Nous la donnons pour la commodité du lecteur.

(a) Les espaces $C_E(\bar{\Gamma})$, $C_E(\bar{\Gamma}/(G_pE)^\perp)$, $C_E(G_pE)\hat{}$ sont isomorphes et sont fermés respectivement dans $L^\infty(\Gamma)$ et $L^\infty(G_pE)\hat{}$. Par transformation de Fourier, cela signifie que sur $l^1(E)$ les normes induites par $PM(G)$ et $PM(G_pE)$ coïncident.

(b) L'ensemble E est compact dénombrable dans $\bar{G}$, le compactifié de Bohr de G, et dans G_2, fermeture de G_pE dans $\bar{G}$. L'application canonique

$$\Gamma_2 \to \frac{\Gamma_2}{(G_pE)^\perp}$$

est injective, d'image dense dans $\Gamma_2/(G_pE)^\perp$ qui est un groupe métrique compact isomorphe à $(G_pE)^\wedge$.

Le groupe Γ_2 contient un sous-groupe dénombrable Γ_1, d'image dense dans $\Gamma_2/(G_pE)^\perp$. Son dual G_1 est métrique compact.

Les applications canoniques $G_pE \to G_2 \to G_1$ définissent une injection de G_pE dans G_1, d'image dense, et l'ensemble E devient un compact dénombrable de G_1.

En appliquant le résultat de (a) successivement à G_pE et G, puis à G_pE et G_1, on voit que sur $l^1(E)$ les normes induites par $PM(G_pE)$, $PM(G)$ et $PM(G_1)$ coïncident.

La définition suivante est due à Kahane (cf. [6], p. 114).

Définition 2. Soient G un groupe abélien compact, Λ une partie de son dual $\hat{G}$ et V une partie compacte de G. On dit que V est *associé à* $C_\Lambda(G)$ ou, plus simplement, *associé à* Λ, s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall f \in C_\Lambda(G) \quad \|f\|_{C(G)} \leqslant k \|f\|_{C(V)}.$$

Il est clair alors que les espaces $C_\Lambda(G)$ et $C_\Lambda(V)$ sont isomorphes, et que tout translaté de V est aussi associé à $C_\Lambda(G)$.

Définition 3. Dans les conditions de la définition 2, on dit que $C_\Lambda(G)$ est de *première espèce* s'il existe une constante k telle que, pour tout voisinage V de zéro dans G, il existe une partie finie $\Lambda_0 \subset \Lambda$ vérifiant

$$\forall f \in C_{\Lambda \setminus \Lambda_0}(G) \quad \|f\|_{C(G)} \leqslant k \|f\|_{C(V)}.$$

Un résultat essentiel pour la construction de compacts associés est un lemme de Varopoulos [11].

Proposition 1 (Varopoulos [11]). *Il existe une constante m_0 telle que pour tout groupe G compact abélien, tout fermé $E \subset G$, tout couple $(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma$ et tout élément $S \in PM(E)$*

$$(1) \qquad |\langle S, \gamma - \gamma' \rangle| \leqslant m_0 \|S\|_{PM(E)} \|\gamma - \gamma'\|_{C(E)}.$$

Pour démontrer le théorème 1 on aura besoin du théorème 2 et du lemme 2 qui suivent. La partie (a) du théorème 2 est due à Blei [2] et a été retrouvée indépendamment par l'auteur. Pour la clarté de l'exposé on en donnera cependant la démonstration.

Théorème 2. *Soit E un compact dénombrable ayant un seul point d'accumulation dans un groupe G l.c.a. Soit G_pE le sous-groupe discret engendré par E dans G. Alors on a*

(a) *l'espace* $C_E(G_p E)^{\wedge}$ *est de première espèce;*

(b) *l'espace* $PM(E)$ *a la propriété de Schur.*

LEMME 2. *Soit G un groupe abélien métrique compact, E un sous-ensemble de Γ, tel que $C_E(G)$ soit de première espèce. Alors $C_E(G)$ a la propriété de Schur.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in C_E(G)$ une suite de fonctions convergeant vers 0 pour la topologie $\sigma\big(C(G), M(G)\big)$. En particulier c'est une suite bornée telle que

$$\forall e \in E \ \hat{f}_n(e) \to 0.$$

Comme E est dénombrable, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, une suite $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in C_E(G)$, et une suite $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ strictement croissante d'entiers positifs telles que

(i) $\forall j \geqslant 1 \ \|f_{n_j} - \varphi_j\|_{C_E(G)} \leqslant 2^{-j}$,

(ii) $\forall j \geqslant 1 \ \operatorname{supp} \hat{\varphi}_j \subset \{e_{k_j+1}, \ldots, e_{k_{j+1}}\}$.

S'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 1 \ \|f_n\|_{C_E(G)} \geqslant m,$$

il est clair qu'il existe un entier j_1 tel que

$$\forall j \geqslant j_1 \ \|\varphi_j\|_{C_E(G)} \geqslant \frac{m}{2}.$$

On va montrer que c'est impossible.

Il existe $g_1 \in G$ tel que $\|\varphi_{j_1}\| = |\varphi_{j_1}(g_1)|$ et il existe un voisinage O_1 du zéro de G tel que

$$\forall g \in g_1 + \bar{O}_1 \ |\varphi_{j_1}(g)| \geqslant \frac{m}{2k},$$

où k est la constante de la définition 3.

Soit O_1' un voisinage du zéro de G tel que $\bar{O}_1' \subset O_1$. Il existe j_2 tel que $\bar{O}_1'$ soit associé (avec la constante k) à $C_{E \setminus \{e_1, \ldots, e_{k_{j_2}}\}}(G)$. Il existe $g_2 \in g_1 + \bar{O}_1'$ tel que

$$\|\varphi_{j_2}\|_{C(G)} \leqslant k \|\varphi_{j_2}\|_{C(g_1 + \bar{O}_1')} = k |\varphi_{j_2}(g_2)|$$

puis O_2 tel que $g_2 + \bar{O}_2 \subset g_1 + O_1$ et tel que

$$\forall g \in g_2 + \bar{O}_2 \ |\varphi_{j_2}(g)| \geqslant \frac{m}{2k}.$$

On construit ainsi par récurrence des suites $(\varphi_{j_l})_{l=1}^{\infty}$, $(g_l)_{l=1}^{\infty}$ et $(O_l)_{l=1}^{\infty}$. Soit g_0 un point d'accumulation de la suite $(g_l)_{l=1}^{\infty}$; il est dans $\bigcap_l (g_l + \bar{O}_l)$. Il en résulte que

$$\forall l \geqslant 1 \ |\varphi_{j_l}(g_0)| \geqslant \frac{m}{2k}.$$

Or la condition (i) entraîne que la suite $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ converge vers 0 ponctuellement sur G.

Démonstration du théorème 2. D'après le lemme 1 on peut supposer que G est compact et que G_pE est dense dans G. On peut encore supposer que le point d'accumulation de E est le zéro de G. L'application canonique

$$\Gamma \to \bar{\Gamma} \to \frac{\Gamma}{(G_pE)^{\perp}} = (G_pE)\hat{}$$

est une injection d'image dense.

(a) Si O est un voisinage ouvert du zéro de $\Gamma/(G_pE)^{\perp}$, l'ensemble $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma+O$ est un recouvrement ouvert de ce groupe compact, dont on peut extraire un recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{i=N}\gamma_i+O$. Comme la topologie de G est la topologie de dual de Γ (voir [9], p. 10), l'ensemble

$$\left\{g\colon |\langle g,\gamma_i\rangle-1|<\frac{1}{2m_0},\ i=1,\ldots,N\right\}$$

est un voisinage ouvert du zéro de G (m_0 est la constante définie dans la proposition 1).

Il existe un ensemble fini de points isolés dans E, soit E_0, tel que $E\setminus E_0$ soit inclus dans ce voisinage. Pour toute pseudomesure

$$S\in PM(E\setminus E_0) \qquad \text{avec } S=\sum_{j=1}^{j=J}a_j\delta_{e_j},$$

il existe $\gamma_0\in\Gamma$ tel que

$$\|S\|_{PM(E)}\leqslant\frac{3}{2}\,|\hat{S}(\gamma_0)|$$

et il existe $i\in\{1,\ldots,N\}$ tel que $\gamma_0\in\gamma_i+O$.

En posant $\gamma_0=\gamma_i+\gamma'$ ($\gamma'\in O$) on a

$$\forall g\in G\ \ \langle\gamma_0,g\rangle=\langle\gamma_i,g\rangle\langle\gamma',g\rangle=\langle\gamma',g\rangle-\langle\gamma',g\rangle(1-\langle\gamma_i,g\rangle).$$

D'où

$$\hat{S}(\gamma_0)=\sum_{j=1}^{j=J}a_j\langle\gamma_0,e_j\rangle=\sum_{j=1}^{j=J}a_j\langle\gamma',e_j\rangle-\sum_{j=1}^{j=J}a_j\langle\gamma',e_j\rangle(1-\langle\gamma_i,e_j\rangle),$$

$$\|S\|_{PM(E)}\leqslant\frac{3}{2}\sup_{\gamma'\in\bar{O}}|\hat{S}(\gamma')|+\frac{3}{2}\,|\widehat{S\gamma'}(0)-\widehat{S\gamma'}(\gamma_i)|.$$

La relation (1) de la proposition 1 et la construction entraînent alors

$$|\widehat{S\gamma'}(0)-\widehat{S\gamma'}(\gamma_i)|\leqslant\frac{1}{2}\,\|S\gamma'\|_{PM(E)}=\frac{1}{2}\,\|S\|_{PM(E)}.$$

D'où

$$\|S\|_{PM(E)} = \|\hat{S}\|_{C_E(G_pE)\hat{}} \leqslant 6 \sup_{\gamma'\in\bar{O}} |\hat{S}(\gamma')|.$$

(b) Le groupe G_pE étant dénombrable, son dual $(G_pE)\hat{} = \Gamma/(G_pE)^{\perp}$ est métrique compact. Le lemme 2 et la partie (a) du théorème 2 entraînent que l'espace $C_E(G_pE)\hat{}$, qui est isomorphe à $PM(E)$, a la propriété de Schur.

COROLLAIRE 1. *Soit E un compact dénombrable dans un groupe G l.c.a. Si le dérivé E' de E est fini, l'espace $PM(E)$ a la propriété de Schur.*

Cela résulte immédiatement du théorème 2 et du facile

LEMME 3. *Sous les hypothèses du corollaire 1, l'espace $PM(E)$ est somme directe d'un nombre fini d'espaces $PM(E_i)$, où $E_i \subset E$ est un compact dénombrable ayant un seul point d'accumulation.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_N\}$ l'ensemble E'. On choisit des voisinages ouverts $v_1(e_1)$ et $w_1(\{e_2, \ldots, e_N\})$ dans G tels que $\bar{v}_1$ soit disjoint de $\bar{w}_1$. Il existe alors $\varphi_1 \in A(G)$ telle que $\varphi_1 = 1$ sur $\bar{v}_1$ et $\varphi_1 = 0$ sur $\bar{w}_1$, ceci parce que l'algèbre $A(G)$ est normale.

On choisit ensuite dans w_1 des voisinages $v_2(e_2)$ et $w_2(\{e_3, \ldots, e_N\})$ tels que $\bar{v}_2$ soit disjoint de $\bar{w}_2$, et on construit φ_2 à support dans $\bar{w}_1$ comme φ_1. En répétant ce processus un nombre fini de fois on obtient une partition de E,

$$E = E_0 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{i=N} \overline{v_i(e_i) \cap E}\Big) = E_0 \cup \bigcup_{i=1}^{i=N} E_i,$$

où E_0 est un ensemble fini. Pour tout élément S dans $PM(E \setminus E_0)$ on a

$$S = \sum_{i=1}^{i=N} S\varphi_i.$$

Pour la démonstration du théorème 1 on a besoin encore du

LEMME 4. *Soit E un espace topologique compact dénombrable. Il existe un ordinal dénombrable a tel que le dérivé $E^{(a)}$ soit un ensemble fini non vide.*

Démonstration (cf. [10], 8.6.8). D'après le théorème de Cantor-Bendixon il existe un ordinal dénombrable ν tel que le dérivé $E^{(\nu)}$ est vide. L'ensemble $D = \{\beta\colon E^{(\beta)} \neq \emptyset\}$ est une partie majorée de l'ensemble des ordinaux qui admet une borne supérieure a_0. L'ensemble $E^{(a_0)}$ ne peut contenir une infinité de points, car $E^{(a_0+1)}$ ne serait pas vide et l'on aurait $a_0 < \sup D$. Donc, ou bien $E^{(a_0)}$ est fini non vide, ou bien $E^{(a_0)}$ est vide. Dans ce cas a_0 a ou non un prédécesseur. Si a_0 a un prédécesseur, noté $a_0 - 1$, l'ensemble $E^{(a_0-1)}$ ne peut être que fini non vide. Si a_0 n'a pas de prédécesseur, par définition $E^{(a_0)}$ est l'ensemble $\bigcap_{\beta<a_0} E^{(\beta)}$. Les ensembles $E^{(\beta)}$ étant compacts, il existe $\beta_0 < a_0$ tel que $E^{(\beta_0)}$ est vide, ce qui contredit le fait que $a_0 = \sup D$.

Démonstration du théorème 1. A tout compact dénombrable E est associé d'après le lemme 4 un ordinal α tel que $E^{(\alpha)}$ est fini non vide. La démonstration se fait par récurrence transfinie sur α. Le corollaire 1 du théorème 2 résoud le cas $\alpha = 1$. Etant donné un $\alpha > 1$ on suppose démontré que pour tout compact dénombrable E ayant un dérivé fini non vide d'ordre $\alpha' < \alpha$ l'espace $PM(E)$ a la propriété de Schur. Soit maintenant E un compact dénombrable tel que $E^{(\alpha)}$ soit fini non vide. Pour alléger la démonstration, on se ramène, grâce au lemme 1, au cas où G est métrique compact.

Soit $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de norme 1 dans $PM(E)$, telle que $S_n \to 0$ pour $\sigma\big(PM(E), PM(E)'\big)$. On va montrer que cette situation est impossible. On note $(e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ une énumération de E, avec $E^{(\alpha)} = (e_1, \ldots, e_{k_1})$. On peut toujours supposer, comme dans la démonstration du lemme 2, qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\forall\, n > 1 \ \operatorname{supp} S_n \subset \{e_{k_n+1}, \ldots, e_{k_{n+1}}\}.$$

Soit $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite décroissante d'ouverts de G tels que

$$\forall i \geqslant 1 \ \ \bar{v}_{i+1} \subset v_i$$

et formant une base de voisinages de $E^{(\alpha)}$.

Soit $(\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de fonctions dans $A(G)$ telle que

(i) $\forall i \geqslant 1 \ \ \psi_i = 1$ dans $\bar{v}_i$,

(ii) $\forall i \geqslant 1 \ \ \psi_i = 0$ dans v_{i-1}^c.

On est dans l'alternative suivante:

(a) Ou bien

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists i_0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \ \|S_n(1-\psi_{i_0})\|_{PM(E)} > \varepsilon.$$

La suite $\big(S_n(1-\psi_{i_0})\big)_{n=N}^{\infty}$ est en fait dans $PM(E \cap v_{i_0}^c)$ et converge faiblement vers 0 dans cet espace. Or le dérivé d'ordre α de $E \cap v_{i_0}^c$ est vide. Cette situation est impossible d'après l'hypothèse de récurrence.

(b) Ou bien

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall i \ \forall N \ \exists n_i \geqslant N \ \ \|S_{n_i}(1-\psi_i)\|_{PM(E)} \leqslant \varepsilon.$$

On construit alors une sous-suite $(S_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ telle que

$$\forall i \geqslant 1 \ \ \|S_{n_i}(1-\psi_i)\|_{PM(E)} \leqslant \frac{1}{2^i}.$$

Le support (fini) de chaque élément $S_{n_i}\psi_i$ est dans $v_{i-1} \cap E$. La réunion de ces supports a ses points d'accumulation dans E. La suite $(S_{n_i}\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ est en fait dans un espace $PM(F) \subset PM(E)$ où F est un compact dénombrable ayant un nombre fini de points d'accumulation. Or elle converge faiblement vers 0, et est minorée en norme par $\frac{1}{2}$. Cette situation est impossible d'après le corollaire 1 du théorème 2.

Le théorème 1 peut être utile même dans le cas des groupes discrets comme le montre la

PROPOSITION 2. *Soit G un groupe abélien localement compact, $K \subset G$ un ensemble compact et dénombrable, $PM(K)$ l'espace de Banach des distributions portées par K et dont la transformée de Fourier est bornée, G_d le groupe G muni de la topologie discrète et $PM(K_d)$ l'espace de Banach des distributions portées par $K \subset G_d$ et dont la transformée de Fourier est bornée sur le compactifié de Bohr de $\hat{G}$. Alors $PM(K_d) = PM(K)$.*

Pour prouver cette proposition, nous remarquerons d'abord que pour une mesure μ, à valeurs complexes, dont le support est une partie finie de K, les normes de μ dans $PM(K)$ ou $PM(K_d)$ sont égales. D'autre part, d'après un théorème de Loomis, tout élément $S \in PM(K)$ est limite, pour la norme de $PM(K)$, d'une suite μ_n, $n \geqslant 1$, de mesures à support fini. On a donc $PM(K) \subset PM(K_d)$ et la norme de $PM(K)$ est induite par celle de $PM(K_d)$.

Soit H le sous-groupe dénombrable de G_d engendré par K et soit D_n, $n \geqslant 1$, une approximation de l'identité pour $A(H)$; c'est-à-dire que

(1) $D_n(x) \to 1$ $(n \to \infty)$ pour tout $x \in H$,

(2) le support de D_n est une partie finie $F_n \subset H$,

(3) $\|D_n\|_{A(H)} \leqslant C$.

Alors on peut, dans le théorème de Loomis mentionné ci-dessus, choisir pour μ_n le produit $D_n S$. Ce produit a bien un sens car $PM(K_d)$ est un $A(H)$-module.

Pour prouver que $PM(K_d) = PM(K)$, soit $\mu \in PM(K_d)$ et $\mu_n = D_n \mu$. On a

$$\|D_n \mu\|_{PM(K)} = \|D_n \mu\|_{PM(K_d)} \leqslant C \|\mu\|_{PM(K_d)}.$$

Enfin $PM(K)$ est l'espace dual de $A(K)$ car tout compact dénombrable est un ensemble de synthèse spectrale. De la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, bornée dans $PM(K)$, on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, convergente vers $S \in PM(K)$, au sens de la topologie $\sigma(PM(K), A(K))$.

Soit ν la différence $\mu - S$. Pour tout ordinal dénombrable α, appelons $K^{(\alpha)}$ le dérivé d'ordre α de K et soit I l'ensemble des ordinaux dénombrables α tels que le support de ν (qui est une partie de K) soit contenu dans $K^{(\alpha)}$. Nous allons démontrer que I est l'ensemble de tous les ordinaux dénombrables; alors il existera un $\alpha \in I$ tel que $K^{(\alpha)} = \emptyset$ ce qui entraînera $\mu - S = 0$.

Il suffit de prouver que $\alpha \in I \Rightarrow \alpha+1 \in I$ et que $\beta = \sup I \in I$.

Supposons donc que ν soit porté par $K^{(\alpha)}$ et montrons que ν est portée par $K^{(\alpha+1)}$, le dérivé de $K^{(\alpha)}$:

Soit $x_0 \in K^{(\alpha)} \setminus K^{(\alpha+1)}$ et soit $f \in A(K)$, égale à 1 en x_0 et à 0 en tout $x \in K^{(\alpha)}$, distinct de x_0. Une telle fonction existe car x_0 est un point isolé dans $K^{(\alpha)}$.

On a $\langle(\mu - S)D_n, f\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$. En effet, $\|SD_n - S\|_{PM(K)} \to 0$, et $\langle \mu D_n, f\rangle \to \langle S, f\rangle$ $(n \to \infty)$ pour tout $f \in A(K)$.

D'autre part, puisque le support de $\mu - S$ est contenu dans $K^{(\alpha)}$, le choix de f montre que $\langle(\mu - S)D_n, f\rangle \to \nu\{x_0\}$. On a bien $\nu\{x_0\} = 0$ et ν est portée par $K^{(\alpha+1)}$.

Puisque le support L de ν vérifie $L \subset K^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in I$, il vérifie

$$L \subset \bigcap_{\alpha \in I} K^{(\alpha)} = K^{(\beta)}.$$

THÉORÈME 3. *Soit H un groupe abélien dénombrable, E une partie de H et Δ le groupe compact dual de H. Supposons qu'il existe un groupe abélien localement compact G, une partie compacte et dénombrable $K \subset G$ et un homomorphisme h: $H \to G$, injectif, tel que $h(E) \subset K$. Alors l'espace $C_E(\Delta)$ des fonctions continues sur Δ à spectre dans E a la propriété de Schur et est égal à $L_E^\infty(\Delta)$.*

En effet, $L_E^\infty(\Delta)$ s'identifie au sous-espace de $PM(K_d)$ formé des μ nuls en tout $x \in K$, $x \notin h(E)$. L'égalité $PM(K_d) = PM(K)$ entraîne que $\|\mu D_n - \mu\|_{PM(K)} \to 0$ $(n \to \infty)$, où D_n, $n \geqslant 1$, est une approximation de l'identité pour $A\big(h(H)\big)$. On a donc $L_E^\infty(\Delta) = C_E(\Delta)$.

Exemples. 1. Soit d_k, $k \geqslant 1$, une suite d'entiers naturels tendant vers l'infini, telle que $d_1 \geqslant 1$ et que d_k divise d_{k+1} pour tout $k \geqslant 1$. Supposons qu'une partie $\Lambda \subset \boldsymbol{Z}$ ait la propriété suivante: pour tout $k \geqslant 1$, il y a une partie finie $F_k \subset \boldsymbol{Z}$ telle que $\Lambda \subset F_k \cup d_k\boldsymbol{Z}$. Alors $C_\Lambda(\boldsymbol{T}) = L_\Lambda^\infty(\boldsymbol{T})$ et cet espace de Banach a la propriété de Schur.

En effet, soit G le groupe quotient de $\bar{\boldsymbol{Z}}$ par le sous-groupe $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{d_k\boldsymbol{Z}}$ et soit $h: \boldsymbol{Z} \to G$ l'homomorphisme canonique. Alors $h(\Lambda)$ est une suite d'éléments de G tendant vers 0. Le théorème 3 s'applique donc.

2. Partons de l'ensemble Λ construit ci-dessus et appelons $k\Lambda$ l'ensemble des sommes $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ où $\lambda_j \in \Lambda$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Alors $C_{k\Lambda}(\boldsymbol{T}) = L_{k\Lambda}^\infty(\boldsymbol{T})$ et cet espace de Banach a la propriété de Schur.

L'exemple 1 est dû à Y. Meyer qui m'en a donné une preuve différente. Le théorème 1 admet la réciproque suivante:

PROPOSITION 3. (a) *Soit E un ensemble compact métrisable dans un groupe G l.c.a. Si $PM(E)$ a la propriété de Schur, l'ensemble E est dénombrable; en particulier, $l^1(E)$ est dense en norme dans $PM(E)$.*

(b) *Soit E un ensemble dans un groupe discret dénombrable Γ. Si $PM(E) \subset PM(\Gamma)$ a la propriété de Schur, $l^1(E)$ est dense en norme dans $PM(E)$.*

En d'autres termes, si G est un groupe métrique compact et si $L_E^\infty(G)$ a la propriété de Schur, on a $L_E^\infty(G) = C_E(G)$.

Démonstration. (a) Il résulte de [12], chapitre 4, § 3, que tout compact parfait métrisable E dans un groupe G l.c.a. (non discret) contient un compact parfait E_1 qui est un ensemble de Helson, c'est-à-dire que

$M(E_1)$ est fermé dans $PM(E_1)$. Or cet espace $M(E_1)$ n'a pas la propriété de Schur. Si $PM(E)$ a la propriété de Schur, l'ensemble E ne peut contenir aucun parfait donc est dénombrable.

(b) Soit $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ une approximation de l'identité dans l'algèbre $A(E)$, définie comme celle pour $A(H)$ dans la démonstration de la proposition 2. Si une sous-suite de (K_n) pouvait engendrer dans $A(E)$ un sous-espace isomorphe à l^1, l'espace dual $PM(E)$ contiendrait d'après [8] un sous-espace isomorphe à $M(T)$ et n'aurait pas la propriété de Schur. Il résulte du profond théorème de Rosenthal [7] qu'on peut extraire de $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite $(K_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ de Cauchy pour la topologie $\sigma(A(E), PM(E))$. Tout élément $S \in PM(E)$ est limite pour la topologie $\sigma(PM(E), A(E))$ de la suite $(SK_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Comme l'application (continue) $A(E) \to PM(E)$: $f \mapsto Sf$ transforme la suite (K_{n_i}) en suite de Cauchy faible, c'est-à-dire pour $\sigma(PM(E), PM(E)')$, et comme chaque K_{n_i} est à support fini, $(SK_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\overline{l^1(E)}$ pour $\sigma(\overline{l^1(E)}, \overline{l^1(E)}')$ donc converge en norme dans $\overline{l^1(E)}$, nécessairement vers S.

Un dernier résultat complète le théorème 3. Soit Λ une partie de $\boldsymbol{Z}$ et pour tout $k \geqslant 1$ appelons $k\Lambda$ l'ensemble de toutes les sommes $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, $\lambda_j \in \Lambda$.

THÉORÈME 4. *Supposons que pour tout $k \geqslant 1$ l'espace $C_{k\Lambda}(\boldsymbol{T})$ ne contienne pas de sous-espaces fermés isomorphes à c_0. Alors tout intervalle fermé de $\boldsymbol{T}$, non réduit à un point, est associé à $C_\Lambda(\boldsymbol{T})$.*

Dans la preuve du théorème 4, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$, la loi du groupe $\boldsymbol{T}$ est notée additivement et un intervalle fermé de $\boldsymbol{T}$ est noté $a \leqslant x \leqslant b$ lorsque $b - a < 2\pi$; en fait l'intervalle considéré est l'image modulo $2\pi\boldsymbol{Z}$ de cet intervalle de $\boldsymbol{R}$.

La preuve du théorème 4 nécessite les lemmes suivants.

LEMME 5. *Soit I un ensemble métrisable compact, x_0 un élément de I e $f_n: I \to \boldsymbol{C}$ une suite de fonctions continues sur I telles que*

(a) $0 < C_1 \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C_2$;

(b) $f_n(x_0) \to 0$ *et pour toute partie compacte $J \subset I$, ne contenant pas x_0,*

$$\sup_J |f_n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Alors on peut trouver une partie infinie $\Lambda \subset \boldsymbol{N}$ et deux constantes C_3 et C_4 telles que

$$C_3 \sup_{n\in\Lambda} |c_n| \leqslant \sup_I \Big| \sum_{n\in\Lambda} c_n f_n(x) \Big| \leqslant C_4 \sup_{n\in\Lambda} |c_n|.$$

Il s'agit du phénomène classique de la „bosse glissante".

LEMME 6. *On conserve les notations et les hypothèses du lemme 5 mais on supprime la condition $f_n(x_0) \to 0$. Alors on peut trouver deux suites $n_1 < m_1 < n_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$ telles qu'en posant $g_k(x) = f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x)$*

on ait

$$C_3 \sup_{k\geqslant 0} |c_k| \leqslant \sup_I \Big| \sum_{k\geqslant 0} c_k g_k(x) \Big| \leqslant C_4 \sup_{k\geqslant 0} |c_k| .$$

Ou bien $f_n(x_0) \to 0$ et le lemme 5 s'applique. Sinon, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $f_n(x_0) \to l \neq 0$. Alors la sous-suite extraite n'est pas une suite de Cauchy dans $C(I)$. Il existe donc un $\delta > 0$ et deux suites n_k $(k \geqslant 0)$ et $m_k \geqslant 0$ telles que

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots \quad \text{et} \quad \sup_I |f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \delta .$$

La suite $g_k(x)$, $k \geqslant 0$, vérifie donc les hypothèses du lemme 5.

LEMME 7. *Les notations étant celles du lemme 5, soit X un sous-espace fermé de $C(I)$, ne contenant aucun sous-espace fermé isomorphe à c_0. Alors pour tout $x_0 \in I$ il existe un voisinage ouvert $V(x_0)$ de x_0 tel qu'en posant $J = I \setminus V(x_0)$ les normes $\sup_I |f|$ et $\sup_J |f|$ soient équivalentes sur X.*

Supposons en effet que la conclusion du lemme 7 ne soit pas satisfaite: il existerait donc un système fondamental V_n, $n \geqslant 1$, de voisinages de x_0 et une suite $f_n \in X$ telle que

$$\sup_{V_n} |f_n| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{I \setminus V_n} |f_n| \to 0 .$$

Les hypothèses du lemme 6 sont donc satisfaites et X contient un sous-espace fermé isomorphe à c_0.

LEMME 8. *Soit Λ une partie de $\boldsymbol{Z}$ et E l'ensemble $\Lambda + \Lambda$. On suppose que $C_E(\boldsymbol{T})$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0. Soit $[-L, L]$ un intervalle associé à $C_E(\boldsymbol{T})$. Alors, pour tout $l > L/2$, $[-l, l]$ est un intervalle associé à $C_\Lambda(\boldsymbol{T})$.*

Remarquons d'abord qu'en appliquant le lemme 7 à $X = C_E(\boldsymbol{T})$ et $I = [-\pi, \pi]$ où $-\pi$ et π sont identifiés à x_0, on vérifie qu'il existe un $L < \pi$ tel que $[-L, L]$ soit associé à E. En prenant $x_0 = 0$, on montre qu'il y a un $\varepsilon > 0$ tel que la réunion de $[-L, -\varepsilon]$ et de $[\varepsilon, L]$ soit associée à $E = \Lambda + \Lambda$.

Soit d la borne inférieure des longueurs des intervalles associés à Λ. On a évidemment $0 \leqslant d \leqslant 2L \leqslant 2\pi$.

En raisonnant par l'absurde, supposons $d > L$. Soit $\eta > 0$ un nombre assez petit pour que $d > L + \eta$, $\eta < \varepsilon/2$ et $\eta < d/3$; considérons les deux intervalles $I_1 = [-d, -\eta]$ et $I_2 = [-d, \eta]$ de $\boldsymbol{T}$. Alors I_1 n'est pas associé à Λ tandis que I_2 l'est avec la constante $C(\eta)$. Il existe donc une suite $f_n \in C_\Lambda(\boldsymbol{T})$ telle que

$$\sup_{I_1} |f_n| \to 0, \quad f_n(x_n) = 1, \quad -\eta \leqslant x_n \leqslant \eta, \quad \text{et} \quad \sup_{\boldsymbol{T}} |f_n| \leqslant C(\eta) .$$

Formons $g_n(x) = f_n(x+x_n)$. On a

$$\sup_{[-d+\eta,-2\eta]} |g_n| \to 0, \quad g_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_T |g_n| \leqslant C(\eta).$$

Posons $h_n(x) = \overline{g_n(-x)}$; $h_n \in C_A(T)$,

$$\sup_{[2\eta,d-\eta]} |h_n| \to 0, \quad h_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_T |h_n| \leqslant C(\eta).$$

Alors $F_n = g_n h_n \in C_E(T)$ converge uniformément vers 0 sur la réunion de $[-d+\eta, -2\eta]$ et de $[2\eta, d-\eta]$ et vaut 1 en 0. Comme $[2\eta, d-\eta] \supset [\varepsilon, L]$, ceci contredit le fait que $[-L, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, L]$ soit associé à $C_E(T)$.

La preuve du théorème 4 est maintenant évidente. Partant de $[-\pi, \pi]$ associé à $C_{2^k A}(T)$, on déduit, par applications répétées du lemme 8, que $[-\pi/2^k, \pi/2^k]$ est associé à $C_A(T)$.

L'idée d'utiliser le produit $F_n = g_n h_n$ dans la preuve du théorème 4 est due à J.-F. Méla.

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence o series in Banach spaces*, Studia Mathematica 17 (1958), p. 165-174.

[2] R. Blei, *On subsets with associated compacts in discrete abelian groups*, Proceedings of the American Mathematical Society 37 (1973), p. 453-455.

[3] A. Grothendieck, *Sur les applications faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canadian Journal of Mathematics 5 (1953), p. 129-173.

[4] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer 1970.

[5] F. Lust, *Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon*, Colloquium Mathematicum 32 (1975), p. 285-289.

[6] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, North Holland 1972.

[7] E. Odell and H. Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing l^1*, Israel Journal of Mathematics 20 (1975), p. 375-384.

[8] A. Pełczyński, *On Banach spaces containing $L^1(\mu)$*, Studia Mathematica 30 (1968), p. 231-246.

[9] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Publishers 1962.

[10] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Vol. I, Warszawa 1971.

[11] N. Varopoulos, *Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 260 (1965), p. 3831-3834.

[12] — *Tensor algebras and harmonic analysis*, Acta Mathematica 119 (1967), p. 51-112.

Reçu par la Rédaction le 27. 9. 1975;
en version modifiée le 26. 1. 1978