COLLOQUIMU MATHEMATICUM

VOL. XLIII 1980 FASC. 2

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DES IDEMPOTENTS

PAR

J. F. MÉLA (PARIS)

G désigne un groupe abélien localement compact et Γ son groupe de caractères. La transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de Radon bornée μ sur G est définie par

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma d\mu \quad (\gamma \in \Gamma).$$

THÉORÈME (H. Helson et P. J. Cohen). *Soit $\mu \neq 0$ une mesure de Radon bornée sur G. Si $\hat{\mu}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs (entières), μ est une combinaison linéaire finie de mesures γm, où γ est un caractère et m la mesure de Haar d'un sous-groupe compact de G.*

(1) Le sous-groupe des caractères γ tels que $\gamma\mu = \mu$, qui n'est autre que le stabilisateur de $\hat{\mu}$, est ouvert et fermé dans Γ. La mesure μ est supportée par son orthogonal H qui est un sous-groupe compact de G. Tout caractère de H se prolongeant en un caractère de G, on peut supposer pour démontrer le théorème, que $G = H$.

(2) Notons $\boldsymbol{\Gamma}(\mu)$ l'adhérence dans $L^\infty(\mu)$, des caractères de G, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$. On vérifie immédiatement que $\boldsymbol{\Gamma}(\mu)$ est contenu dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$ et est stable par multiplication et conjugaison. On munit $\boldsymbol{\Gamma}(\mu)$ de la topologie faible et de la relation d'ordre naturelle de $L^\infty(\mu)$. Si on suppose $G = H$ comme on l'a dit en (1), Γ est plongé injectivement dans $\boldsymbol{\Gamma}(\mu)$.

(3) Soit $\chi \in \boldsymbol{\Gamma}(\mu)$. On voit, par passage à la limite faible, que la transformée de Fourier-Stieltjes de la mesure $\chi\mu$

$$(\chi\mu)^\wedge(\gamma) = \int \gamma\chi d\mu \quad (\gamma \in \Gamma)$$

est également à valeurs entières. En particulier, pour deux éléments distincts χ et χ' de $\boldsymbol{\Gamma}(\mu)$, $\chi\mu \neq \chi'\mu$, et il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$\|\chi - \chi'\|_{L^1(\mu)} \geqslant \left| \int \gamma\chi d\mu - \int \gamma\chi' d\mu \right| = |(\chi\mu)^\wedge(\gamma) - (\chi'\mu)^\wedge(\gamma)| \geqslant 1.$$

(4) Toute suite $(\varphi_j)_{j\geqslant 0}$, $\varphi_0 = 1$, décroissante, d'éléments positifs de $\Gamma(\mu)$ est stationnaire. Sinon, pour tout $n \geqslant 0$, on pourrait écrire, d'après (3),

$$\int d|\mu| \geqslant \int (1-\varphi_n)\,d|\mu| = \sum_{j=1}^{n} \int (\varphi_{j-1}-\varphi_j)\,d|\mu| \geqslant n.$$

(5) Tout élément φ de $\Gamma(\mu)$ est tel que $|\varphi|^2 = |\varphi|$. Sinon, la suite $|\varphi|^{2j} = \varphi^j\bar{\varphi}^j$ contredirait la propriété (4).

(6) Dans l'ensemble des éléments positifs de $\Gamma(\mu)$, il existe ψ minimal non nul. C'est une conséquence évidente de (4). Alors 1 est minimal non nul dans l'ensemble des éléments positifs de $\Gamma(\psi\mu)$ et, par suite, tout élément non nul de $\Gamma(\psi\mu)$ est de module 1.

(7) Il suffit de démontrer le théorème pour la mesure $\psi\mu$. Dans le cas où $\mu \neq \psi\mu$ on pourra reprendre le raisonnement avec $\mu' = \mu - \psi\mu$ qui a la même propriété que μ. De plus, comme $\psi^2 = \psi$,

$$\int d|\mu'| = \int d|\mu| - \int d|\psi\mu| \leqslant \int d|\mu| - 1$$

et on est assuré de conclure après un nombre fini d'étapes.

(8) On est donc ramené à démontrer le théorème dans le cas où tout élément non nul de $\Gamma(\mu)$ est de module 1. On va voir que, dans ce cas, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ pour lesquels $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$ est fini (et le théorème est alors évident). En effet, soit γ_a une suite généralisée de caractères tels que $\hat{\mu}(\gamma_a) \neq 0$, qui converge vers χ dans $\Gamma(\mu)$. Comme $\left|\int \gamma_a d\mu\right| \geqslant 1$, à la limite $\left|\int \chi d\mu\right| \geqslant 1$; en particulier, $\chi \neq 0$, donc $|\chi| = 1$. On en déduit

$$\lim \|\chi - \gamma_a\|_{L^2(\mu)} = \lim \int (2 - \bar{\chi}\gamma_a - \chi\bar{\gamma}_a)\,d|\mu| = 0.$$

On aura aussi

$$\lim \|\chi - \gamma_a\|_{L^1(\mu)} = 0,$$

ce qui implique, d'après (3), que γ_a est constant à partir d'un certain rang. Ceci termine la démonstration.

N o t e. La démonstration précédente est une version (un tout petit peu plus naïve) de celle mise au point dans les comptes rendus du Séminaire sur l'analyse harmonique des mesures (Villetaneuse 1978), et reprend pour l'essentiel un exposé, fait à Trzebieszowice, dans le cadre de la Conférence d'Analyse Harmonique de Août — Septembre 1978.

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1978