COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLVI 1982 FASC. 1

OPÉRATEURS ASYMPTOTIQUEMENT LINÉAIRES SUR DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

PAR

GEORGE ISAC (SHERBROOKE, QUÉBEC)

1. Les opérateurs asymptotiquement linéaires introduits sur les espaces de Banach par Krasnoselskiĭ [6] interviennent fréquemment dans l'étude de certains problèmes non linéaires [1], [6], [8], [11].

Cette notion a été utilisée pour obtenir des théorèmes de surjectivité et de point fixe.

Récemment, à l'aide de la dérivée à l'infini le long d'un cône, des résultats d'analyse spectrale non linéaire ont été établis [1], [6], [8].

La dérivée asymptotique est utilisée dans l'étude des problèmes de bifurcations.

Dans cette note on introduit la dérivée à l'infini le long d'un cône dans les espaces localement convexes; notre démarche s'inspire d'une idée utilisée par Marinescu dans le calcul différentiel sur les espaces localement convexes [9], [10].

On démontre que dans les espaces localement convexes la dérivée à l'infini le long d'un cône conserve une sorte de contractions.

2. On appelle *espace localement convexe réel*, un espace vectoriel réel E qui a une topologie définie par une famille de semi-normes $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ ayant les propriétés suivantes:

(i) $(\forall x \in E)(x \neq 0)(\exists \alpha_0 \in \mathscr{A})(|x|_{\alpha_0} \neq 0)$;

(ii) $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{A})(\exists \alpha \in \mathscr{A})(|\cdot|_{\alpha_1}, |\cdot|_{\alpha_2} \leqslant |\cdot|_\alpha)$.

Soient $(E, \{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}})$ et $(F, \{|\cdot|_\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}})$ deux espaces localement convexes réels.

On sait [9], [10], qu'un opérateur linéaire $f\colon E \to F$ est continu si et seulement s'il existe une fonction $\psi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ telle que

$$|x|_{\psi(\beta)} = 0 \Rightarrow |f(x)|_\beta = 0$$

et

$$|f|_{\beta,\psi(\beta)} = \sup_{|x|_{\psi(\beta)}\neq 0} \frac{|f(x)|_\beta}{|x|_{\psi(\beta)}} < \infty \quad \text{pour tout } \beta \in \mathscr{B}.$$

Si $\mathscr{L}(E, F)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires et continus de E dans F, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est la réunion pseudotopologique des espaces $\mathscr{L}_\psi(E, F)$ où

$$\mathscr{L}_\psi(E, F) = \{f\colon E \to F \mid f \text{ linéaires et } |f|_{\beta,\psi(\beta)} < \infty \text{ pour tout } \beta \in \mathscr{B}\}.$$

Soit $K \subset E$ un cône convexe, c'est-à-dire un sous-ensemble ayant les propriétés suivantes:

(c_1) $K + K \subset K$;

(c_2) $(\forall \lambda \in R_+)(\lambda K \subset K)$.

On suppose toujours que le cône K est total par rapport à l'espace E, c'est-à-dire $\overline{K - K} = E$.

Définition 1. On dit que l'opérateur $f\colon K \to F$ est *asymptotiquement linéaire le long du cône* K s'il existe une fonction $\psi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ et un opérateur linéaire et continu $f'(\infty) \in \mathscr{L}_\psi(E, F)$ tels que

$$\lim_{\substack{x \in K \\ |x|_{\psi(\beta)} \to \infty}} \frac{|f(x) - f'(\infty)(x)|_\beta}{|x|_{\psi(\beta)}} = 0 \quad \text{pour tout } \beta \in \mathscr{B}.$$

Si $f\colon K \to F$ est asymptotiquement linéaire le long du cône K, alors $f'(\infty)$ s'appelle la *dérivée à l'infini le long du cône* K de l'opérateur f. Comme le cône K est total, $f'(\infty)$ est uniquement déterminée.

3. Soit $(E, \{|\cdot|_a\}_{a \in \mathscr{A}})$ un espace localement convexe réel. Pour chaque $a \in \mathscr{A}$ et $\Omega \subset E$ on définit

$$\gamma_a(\Omega) = \inf\{d > 0 \mid \Omega \text{ peut être couvert par un nombre fini d'ensembles ayant le } |\cdot|_a\text{-diamètre} \leqslant d\},$$

$$\chi_a(\Omega) = \inf\{r > 0 \mid \Omega \text{ peut être couvert par un nombre fini de } |\cdot|_a\text{-sphères ayant le } |\cdot|_a\text{-rayon} \leqslant r\}.$$

Soit $\mathscr{C} = \{f\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]\}$ ordonné par l'ordre ponctuel. On définit les fonctions

$$\begin{aligned} \gamma\colon\ & 2^E \to \mathscr{C} \\ & \ \ \,\Omega \to \big(\gamma(\Omega)\big)(a) = \gamma_a(\Omega) \quad \text{pour tout } a \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi\colon\ & 2^E \to \mathscr{C} \\ & \ \ \,\Omega \to \big(\chi(\Omega)\big)(a) = \chi_a(\Omega) \quad \text{pour tout } a \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Comme les fonctions γ et χ ont des propriétés communes, on désigne par Φ ou bien la fonction γ ou bien la fonction χ.

Comme dans les travaux [1], [4], [12]-[15], [17], on peut démontrer que la fonction Φ a les propriétés suivantes:

(1) $\Phi(A \cup B) \leqslant \max\{\Phi(A), \Phi(B)\}$ pour tous $A, B \in 2^E$.

(2) $\Phi(A) = 0$ si et seulement si A est totalement borné.

(3) $\Phi(\overline{\mathrm{co}}(A)) = \Phi(A)$, où $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est l'enveloppe convexe et fermée de l'ensemble A.

(4) $A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \leqslant \Phi(B)$.

(5) Pour tout $\lambda \in R_+$ et tout $a \in \mathscr{A}$ on a

$$\gamma_a(\lambda A) = \lambda \gamma_a(A), \qquad \chi_a(\lambda A) = \lambda \chi_a(A),$$

donc

$$\Phi(\lambda A) = \lambda \Phi(A).$$

(6) Si on désigne par B_a la sphère ouverte de $|\cdot|_a$-rayon $= 1$, alors $\gamma_a(B_a) \leqslant 2$ et $\chi_a(B_a) \leqslant 2$, donc $\Phi(B_a)(a) \leqslant 2$.

(7) Pour tout $a \in \mathscr{A}$:

$$\gamma_a(A+B) \leqslant \gamma_a(A) + \gamma_a(B), \qquad \chi_a(A+B) \leqslant \chi_a(A) + \chi_a(B),$$

donc

$$\Phi(A+B) \leqslant \Phi(A) + \Phi(B).$$

Soient E, F deux espaces localement convexes réels ayant la propriété que la famille des semi-normes de l'espace F est indexée d'après le même ensemble $\mathscr{A}$ que la famille des semi-normes de l'espace E. Donc pour ces deux espaces on a le même ensemble $\mathscr{C}$.

On désigne par Φ_E (resp. Φ_F) la fonction obtenue selon la construction précédente pour l'espace E (resp. F), considérant simultanément la fonction γ ou bien la fonction χ.

Définition 2. Un opérateur $f: D \subset E \to F$ est une (a^*, Φ)-*contraction* si $\Phi_F(f(Q)) \leqslant a^* \Phi_E(Q)$ pour tout ensemble borné $Q \subset D$, où a^* est une application de $\mathscr{A}$ dans R_+.

THÉORÈME. *Soient E, F deux espaces localement convexes réels tels que la famille de semi-normes de l'espace F est indexée d'après le même ensemble $\mathscr{A}$ que la famille de semi-normes de l'espace E. Soient $K \subset E$ un cône convexe total et $f: K \to F$ une (a^*, Φ)-contraction. Si f est asymptotiquement linéaire le long du cône K, alors $f'(\infty)|_K$ est une (a^*, Φ)-contraction.*

Démonstration. On note $u = f'(\infty)$; soient $a \in \mathscr{A}$ et $A \subset K$ un sous-ensemble borné tel qu'il existe $\varrho > 0$ ayant la propriété que $|x|_{\varphi(a)} \geqslant \varrho$ pour tout $x \in A$.

On prend un nombre $\sigma > \sup\{|x|_{\varphi(a)} \mid x \in A\}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi.

On note $r = f - u$.

Comme f est asymptotiquement linéaire le long du cône K, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ ayant la propriété $|x|_{\varphi(a)} \geqslant \delta$ on a

$$|r(x)|_a \leqslant \frac{\varepsilon |x|_{\varphi(a)}}{2\sigma}.$$

Si on note $B_a^F = \{x \in F |\ |x|_a < 1\}$, alors pour tout $\lambda \geqslant \delta/\varrho$ on obtient

$$r(\lambda A) \subset \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_a^F,$$

parce que

$$|\lambda x|_{\varphi(a)} = \lambda |x|_{\varphi(a)} \geqslant \frac{\delta}{\varrho} |x|_{\varphi(a)} \geqslant \delta.$$

Donc

$$u(\lambda A) \subset f(\lambda A) - r(\lambda A) \subset f(\lambda A) + \frac{\lambda\varepsilon}{2} B_a^F.$$

Cette relation implique

$$\lambda\gamma_a^F\big(u(A)\big) = \gamma_a^F\big(u(\lambda A)\big) \leqslant \gamma_a^F\big(f(\lambda A)\big) + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\gamma_a^F(B_a^F)$$

$$\leqslant a^*(a)\gamma_a^E(\lambda A) + \lambda\varepsilon = \lambda\big(a^*(a)\gamma_a^E(A) + \varepsilon\big).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement choisi on obtient

$$(*) \qquad \gamma_a^F\big(u(A)\big) \leqslant a^*(a)\gamma_a^E(A).$$

On suppose maintenant que $A \subset K$ est un ensemble borné arbitraire et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi.

Comme $u = f'(\infty) \in \mathscr{L}_\psi(E, F)$, où $\psi: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ est la fonction qui intervient aussi dans la définition de la continuité, on déduit

$$|u|_{a,\varphi(a)} = \sup_{|x|_{\varphi(a)} \neq 0} \frac{|u(x)|_a}{|x|_{\varphi(a)}} < \infty,$$

et si $|x|_{\varphi(a)} = 0$, alors $|u(x)|_a = 0$.

Pour les propriétés de $|u|_{a,\varphi(a)}$ voir [9] et [10].

Premièrement, on suppose que $|u|_{a,\varphi(a)} \neq 0$ et soit

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{2\,|u|_{a,\varphi(a)}}.$$

On définit $A_1 = A \cap \varrho B_{\varphi(a)}^E$ et $A_2 = A \setminus A_1$. Dans ce cas, on a

$$(**) \qquad u(A_1) \subset \frac{\varepsilon}{2} B_a^F.$$

Si $|u|_{a,\varphi(a)} = 0$, on prend $A_1 = A \cap B_{\varphi(a)}^E$ et $A_2 = A \setminus A_1$ et, tenant compte de la définition du $|u|_{a,\varphi(a)}$ et de la continuité de la fonction u, on obtient $(**)$.

Donc, dans ces deux situations, on a $\gamma_a^F\big(u(A_1)\big) \leqslant \varepsilon$.

De la première partie de la démonstration, on déduit

$$\gamma_a^F\big(u(A_2)\big) \leqslant a^*(a)\gamma_a^F(A_2) \leqslant a^*(a)\gamma_a^E(A).$$

Enfin:

$$\gamma_a^F\big(u(A)\big) = \gamma_a^F\big(u(A_1)\cup u(A_2)\big) \leqslant \max\big\{\gamma_a^F\big(u(A_1)\big),\, \gamma_a^F\big(u(A_2)\big)\big\}$$
$$\leqslant \max\{\varepsilon,\, a^*(a)\gamma_a^E(A)\}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement choisi, on a (*).

Passant à la fonction Φ, on obtient

$$\Phi_F\big(u|_K(A)\big) \leqslant a^*\Phi_E(A),$$

tenant compte du fait que le même raisonnement est valable aussi pour χ_a $(a \in \mathscr{A})$ et le théorème est démontré.

Remarque. Le théorème précédent est vrai dans le cas où E et F sont deux espaces de Fréchet ou dans le cas $E = F$.

4. On sait, que dans les espaces de Banach, il existe des relations entre les opérateurs asymptotiquement linéaires et les opérateurs quasi-bornés définis par Granas [5] qui a obtenu des théorèmes de point fixe pour des opérateurs quasi-bornés.

Cain, Jr., et Nashed [2] ont donné une extension de la notion d'opérateur quasi-borné aux espaces localement convexes dans le cas où $E = F$.

On propose ci-dessous une définition de la notion d'opérateur quasi-borné dans le cas général. Cette définition semble être très naturelle et elle permet d'établir des relations dans les espaces localement convexes entre les opérateurs quasi-bornés et les opérateurs asymptotiquement linéaires.

Soient $(E, \{|\cdot|_a\}_{a\in\mathscr{A}})$ et $(F, \{|\cdot|_\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}})$ deux espaces localement convexes et soit $f: E \to F$ un opérateur.

Définition 3. L'opérateur f s'appelle *quasi-borné* s'il existe une fonction ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ telle que les nombres

$$|f|_{\beta,\psi(\beta)} = \inf_{0<\varrho<\infty}\left[\sup_{|x|_{\psi(\beta)}\geqslant\varrho} \frac{|f(x)|_\beta}{|x|_{\psi(\beta)}}\right]$$

sont finis quel que soit $\beta \in \mathscr{B}$.

Les propositions suivantes sont des conséquences directes de la définition 3.

PROPOSITION 1. *Si l'opérateur f: $E \to F$ est quasi-borné, alors il existe une fonction ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ telle que*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\varrho > 0)\big((\forall x \in E)\, |x|_{\psi(\beta)} > \varrho\big)\big(|f(x)|_\beta \leqslant (|f|_{\beta,\psi(\beta)} + \varepsilon)\,|x|_{\psi(\beta)}\big).$$

PROPOSITION 2. *S'il existe une fonction ψ: $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ et s'il existe pour chaque $\beta \in \mathscr{B}$ deux constantes $k_{1,\psi(\beta)} \geqslant 0$ et $k_{2,\psi(\beta)} \geqslant 0$ telles que $|f(x)|_\beta \leqslant k_{1,\psi(\beta)}|x|_{\psi(\beta)} + k_{2,\psi(\beta)}$ pour tout $x \in E$, alors f est quasi-borné et $|f|_{\beta,\psi(\beta)} \leqslant k_{1,\psi(\beta)}$.*

PROPOSITION 3. *Si f: $E \to F$ est asymptotiquement linéaire à l'opérateur linéaire τ: $E \to F$ le long du cône $K = E$, alors f est quasi-borné et* $|f|_{\beta,\nu(\beta)} = |\tau|_{\beta,\nu(\beta)}$, *où* $|\tau|_{\beta,\nu(\beta)}$ *est la semi-norme utilisé dans* [9] *pour définir la structure pseudotopologique de l'espace* $\mathscr{L}(E, F)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Amann, *Fixed points of asymptotically linear maps in ordered Banach spaces*, Journal of Functional Analysis 14 (1973), p. 162-171.

[2] G. L. Cain, Jr., and M. Z. Nashed, *Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces*, Pacific Journal of Mathematics 39 (1971), p. 581-592.

[3] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova 24 (1955), p. 84-92.

[4] D. E. Edmunds, A. J. B. Potter and C. A. Stuart, *Non-compact positive operators*, Proceedings of the Royal Society, Series A, 328 (1972), p. 67-81.

[5] A. Granas, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I)*, Rozprawy Matematyczne 30 (1962), p. 1-93.

[6] M. A. Krasnoselskiĭ, *Positive solutions of operators equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[7] C. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 301-309.

[8] T. Laetsch, *Asymptotic branch points and multiple positive solutions of non-linear operator equations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis 6 (1) (1975).

[9] G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Berlin 1963.

[10] — *Traité d'analyse fonctionelle* (en roumain), Vol. I, 1970, Vol. II, 1972, Bucarest.

[11] J. Mawhin, *Degré de coïncidence et problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires et fonctionnelles*, Séminaires de mathématique appliquée et mécanique, Rapport Nr. 64, juillet 1973.

[12] W. V. Petryshyn, *Fixed point theorems for various classes of 1-set-contractive and 1-ball-contractive mappings in Banach space*, Transactions of the American Mathematical Society 182 (1973), p. 323-352.

[13] — *Fredholm alternative for non-linear K-ball-contractive mappings with applications*, Journal of Differential Equations 17 (1) (1975), p. 82-95.

[14] — and P. M. Fitzpatrick, *A degree theory, fixed point theorems and mappings theorems for multivalued non-compact mappings*, Transactions of the American Mathematical Society 194 (1974), p. 1-25.

[15] — *Fixed point theorems for multivalued non-compact acyclic mappings*, Pacific Journal of Mathematics 54 (1975), p. 17-23.

[16] A. J. B. Potter, *A fixed point theorem for positive K-set-contractions*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 19 (1974), p. 93-102.

[17] B. N. Sadovsky, *Measures of non-compactness and condensing operators*, Проблемы математического анализа сложных систем 2 (1968), p. 89-119.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
SHERBROOKE, QUÉBEC

Reçu par la Rédaction le 6. 9. 1978