COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIII 1971 FASC. 1

# UN ENSEMBLE REMARQUABLE DU POINT DE VUE DE L'ANALYSE DE FOURIER SUR $Q_p$

PAR

J.-P. SCHREIBER (ORSAY)

Soit $Q_p$ le groupe additif localement compact des nombres $p$-adiques, $Z_p$ le sous-groupe des entiers $p$-adiques. On désigne par $Z(p)$ le groupe des rationnels s'écrivant $q/p^r$ (où $q$ et $r$ sont des entiers relatifs). On notera parfois de la même manière, par abus de notations, les images canoniques de ce groupe dans $Q_p$ ou dans le groupe des réels $R$.

L'image dans $Q_p$ de $Z(p) \cap [0, 1[$ est un fermé de $Q_p$, régulièrement réparti dans le sens où toute boule de rayon 1 de $Q_p$ le rencontre en un point et un seul. On se propose de montrer ici que cet ensemble, qu'on notera $\Xi$, possède, du point de vue de l'analyse de Fourier beaucoup de propriétés analogues à celles du groupe des entiers $Z$, dans $R$.

On donne d'abord quelques propriétés des fonctions continues sur $Q_p$ à spectre dans $\Xi$, ce qui permet d'obtenir la propriété de synthèse spectrale pour les ensembles parfaits homogènes de $Q_p$ du type $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k p^k$, ($\varepsilon_k = 0$ ou 1). Ensuite (§ 5 et 6), par "enroulement" de $Q_p$ sur le solénoïde $p$-adique on étudie la fermeture de $\Xi$ dans le compactifié de Bohr ainsi que les limites uniformes sur $\Xi$ de caractères.

**1. L'ensemble $\Xi$ est un spectre régulier.** On choisit la mesure de Haar sur $Q_p$, $m$, de façon que $m(Z_p) = 1$; d'autre part $H_p$ désignant le caractère continu sur $Q_p$ valant $\exp 2i\pi\lambda$ pour tout $\lambda$ de $Z(p)$, on identifiera $Q_p$ avec son groupe dual en associant à $x$ de $Q_p$ le caractère $y \to (x, y) = H_p(xy)$.

Définition (cf. [1], p. 297). Une partie $\Lambda$ de $Q_p$ est un *spectre régulier* s'il existe un compact $K$ de $Q_p$ (compact associé à $\Lambda$) et un nombre $\varepsilon < 1$ tels que pour tout polynôme trigonométrique $P$ à spectre dans $\Lambda$, on ait

$$\sup_{x \in K} |P(x)| \geqslant (1-\varepsilon) \sup_{x \in Q_p} |P(x)|.$$

Pour $\Lambda = \Xi$, nous avons le

THÉORÈME 1. *Si $\Omega$ est un ouvert borné de $Q_p$, de mesure de Haar strictement supérieure à 1, sa fermeture $\overline{\Omega}$ est un compact associé à $\Xi$*

Quitte à remplacer $\Omega$ par un ouvert un peu plus petit on peut toujours supposer qu'il est réunion finie de boules ouvertes disjointes (et de mesure strictement supérieure à 1).

La démonstaration repose alors sur le lemme suivant:

LEMME. *Si $\Omega$ est une réunion finie de boules ouvertes bornées de $\boldsymbol{Q}_p$, l'image canonique de $\Omega \cap \boldsymbol{Z}(p)$ dans $\boldsymbol{R}$ est une suite régulière $\Sigma$ de densité uniforme $m(\Omega)$, c'est-à-dire:*

a) $\inf_{x,x' \in \Sigma} |x-x'| \geqslant \delta > 0,$

b) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{card}\{\sum \cap [a-T, a+T]\} = m(\Omega),$

*uniformément par rapport à a.*

Démonstration du lemme: Si $\Omega$ est une boule de rayon $p^{-N}$, $\Sigma$ est une progression arithmétique de différence $p^N$ donc de densité uniforme $p^{-N} = m(\Omega)$. On passe trivialement au cas d'une réunion de boules disjointes.

Montrons maintenant le théorème 1: Soit $\boldsymbol{R}$ un polynôme trigonométrique à spectre dans $\Xi$, et soit $\tilde{\boldsymbol{P}}$ le prolongement continu à $\boldsymbol{R}$ de la restriction de $P$ à $\boldsymbol{Z}(p)$. Ce prolongement est un polynôme trigonométrique sur $\boldsymbol{R}$ à spectre dans $\boldsymbol{Z}(p) \cap [0, 1[$. On a alors

$$\sup_{x\in \boldsymbol{Q}_p} |P(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{Z}(p)} |P(x)| = \sup_{x\in \boldsymbol{R}} |\tilde{P}(x)|.$$

Or il résulte du théorème de Paley et Wiener (cf. [5], § 5, th. 4) que pour toute suite $\Sigma$ régulière de densité uniforme strictement supérieure à 1, il existe une constante positive $c$ telle que

$$\sup_{x\in\Sigma} |\tilde{P}(x)| \geqslant c \sup_{x\in \boldsymbol{R}} |\tilde{P}(x)|.$$

D'où le résultat en appliquant le lemme:

$$\sup_{x\in\Omega} |P(x)| \geqslant c \sup_{x\in \boldsymbol{Q}_p} |P(x)|, \quad \text{et } \overline{\Omega} \text{ est associé à } \Xi.$$

Nous allons montrer maintenant que la taille des compacts associés à $\Xi$ donnée par le théorème 1 ne peut être améliorée, et cela en utilisant un théorème d'isomorphisme d'algèbres de restrictions (introduit dans [3]), pour prouver que $\boldsymbol{Z}_p$ n'est pas associé à $\Xi$.

Selon l'usage on désignera par $A(G)$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions intégrables sur le dual du groupe $G$ et, pour un fermé $E$ de $G$, par $A(E)$ l'algèbre des restrictions à $E$ des fonctions de $A(G)$ (cf. [6]).

PROPOSITION 2. *Si $p^N$ est le diamètre d'un compact $K$ associé à $\Xi$, et $B$ une boule de rayon $p^{-N}$, les algèbres $A(\Xi+B)$ et $A(\Xi\times B)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Suivant la méthode de [3], théorème 1, il suffit de montrer qu'il existe une constante $\varepsilon<1$ telle que, pour toute famille $\{f_\lambda\}$ de fonctions continues sur $Q_p$ tendant vers 0 à l'infini, et à spectre dans $B$ (i.e. dont la transformée de Fourier a son support dans $B$), $\lambda$ décrivant une partie finie quelconque de $\Xi$, on ait

$$(*)\qquad \sup_{x\in Q_p}\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x)(\lambda, x)\Big| > (1-\varepsilon)\sup_{x,y\in Q_p}\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x)(\lambda, y)\Big|.$$

Choisissant alors $x_0$ et $y_0$ tels que

$$\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x_0)(\lambda, y_0)\Big| > (1-\varepsilon)^{1/2}\sup_{x,y\in Q_p}\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x)(\lambda, y)\Big|,$$

on peut trouver, puisque $x_0+K$ est associé à $\Xi$, un point $y_0'$ vérifiant $|y_0'-x_0|_p\leqslant p^N$ et

$$\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x_0)(\lambda, y_0')\Big| > (1-\varepsilon)^{1/2}\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x_0)(\lambda, y_0)\Big|.$$

Mais les fonctions $f_\lambda$ ayant leur spectre dans $B$, leurs transformées de Fourier $\hat{f}_\lambda$ sont les translatées de fonctions à support dans la boule de centre 0 et de rayon $p^{-N}$. Or une fonction dont le spectre est dans cette boule est constante sur toute boule de rayon $p^N$. Donc il existe un caractère $\chi$ ne dépendant que de $B$ tel que

$$f_\lambda(a) = f_\lambda(b)\chi(a-b),$$

dès que $|a-b|_p\leqslant p^N$. Donc

$$\Big|\sum_\lambda f_\lambda(x_0)(\lambda, y_0')\Big| = \Big|\sum_\lambda f_\lambda(y_0')(\lambda, y_0')\Big|,$$

ce qui donne $(*)$.

COROLLAIRE. *La boule $Z_p$ n'est pas un compact associé à $\Xi$.*

En effet, s'il en était ainsi, on aurait un isomorphisme continu de $A(\Xi\times Z_p)$ sur $A(\Xi+Z_p)$. Mais comme $\Xi+Z_p=Q_p$, il résulterait un homomorphisme continu surjectif de $A(Q_p\times Z_p)$ sur $A(Q_p)$. Or, d'après le théorème de P. J. Cohen, (cf. [6], 4.3.1.) cela n'est pas possible puisque l'application de $Q_p$ dans $Q_p\times Z_p$ définie par $\xi\to(\lambda,\zeta)$ avec $\lambda\in\Xi$, $\zeta\in Z_p$ et $\lambda+\zeta=\xi$, n'est pas affine.

**2. Application aux fonctions à spectre dans $\Xi$.** Une fonction $f$ sur $Q_p$ est à spectre dans $\Xi$ si c'est la transformée de Fourier d'une distribution $T$ portée par $\Xi$; du théorème 1 il résulte qu'une telle fonction est connue dès qu'on connait sa restriction à un ouvert de mesure supérieure à 1, comme le montre, en particulier, la

PROPOSITION 3. *Soit $T$ une distribution sur $\boldsymbol{Q}_p$, portée par $\Xi$ et $\hat{T}$ sa transformée de Fourier. Si la restriction de $\hat{T}$ à un ouvert $\Omega$ de mesure supérieure à 1 est une fonction continue $f$, $\hat{T}$ est une fonction uniforménent continue sur $\boldsymbol{Q}_p$.*

Démonstration. On peut toujours supposer $\Omega$ borné. Soit $\psi_n$ la fonction caractéristique de la boule $p^{-n}\boldsymbol{Z}_p$ et $T_n = \psi_n \cdot T$. Les polynômes trigonométriques $\hat{T}_n = \hat{\psi}_n * \hat{T}$ convergent uniformément vers $f$ sur un ouvert $\Omega'$, de mesure $> 1$, et réunion d'un nombre fini de boules ouvertes. Comme $\hat{T}_n$ est à spectre dans $\Xi$ et que d'après le théorème 1

$$\sup_{x \in \Omega'} |\hat{T}_n(x) - \hat{T}_m(x)| \geqslant C \sup_{x \in \boldsymbol{Q}_p} |\hat{T}_n(x) - \hat{T}_m(x)|$$

il résulte que les $\hat{T}_n$ convergent uniformément sur $\boldsymbol{Q}_p$ et donc que $\hat{T}$ est une fonction uniformément continue.

De la même manière, on montrerait, avec les hypothèses de la proposition 3, que si $\hat{T}$ satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $a$ sur un ouvert de mesure $> 1$, $\hat{T}$ est lipschitzienne d'ordre $a$ sur $\boldsymbol{Q}_p$.

On peut voir facilement d'autre part que si $K$ est un compact associé à $\Xi$, à toute mesure à support compact $\mu$, on peut faire correspondre une mesure $\tilde{\mu}$ portée par $K$, telle que $\int f d\mu = \int f d\tilde{\mu}$ pour toute fonction $f$ continue à spectre dans $\Xi$. En particulier, si on prend pour $K$ le sous groupe $1/p\,\boldsymbol{Z}_p$, on obtient:

PROPOSITION 4. *A tout élément $\lambda$ de $1/p\ \Xi$ on peut faire correspondre une mesure $\mu_\lambda$ portée par $1/p\ \boldsymbol{Z}_p$ telle que pour toute fonction continue $f$ à spectre dans $\Xi$ on ait*

$$\forall x,\ |x|_p \leqslant p\ \ f(\lambda + x) = \int_{\frac{1}{p}\boldsymbol{Z}_p} f(x+h)\, d\mu_\lambda(h),$$

*et de façon que si $\lambda + \lambda' \in 1/p\Xi$, alors $\mu_\lambda * \mu_{\lambda'} = \mu_{\lambda+\lambda'}$.*

**3. Application à la synthèse spectrale pour certains ensembles parfaits homogènes de $\boldsymbol{Q}_p$.** Pour un entier $l$, $0 < l \leqslant p$, on note $E_l$ l'ensemble des sommes $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k p^k$, où $\varepsilon_k$ est entier et $0 \leqslant \varepsilon_k < l$. On a alors la proposition suivante.

THÉORÈME 5. *Les ensembles $E_l$ sont de synthèse spectrale dans $\boldsymbol{Q}_p$.*

Si $l = p$, $E_l = \boldsymbol{Z}_p$ qui est un sous-groupe de $\boldsymbol{Q}_p$. Si $l < p$, $E_l$ est un ensemble parfait, homogène (cf. [2], chap. I pour les définitions).

Pour chaque entier positif $n$ notons $\chi_n$ la fonction valant $p^n$ sur le sous-groupe $p^n\boldsymbol{Z}_p$ et nulle ailleurs, $\chi_n^\lambda(x) = \chi_n(x - \lambda)$, et $\Lambda_n$ l'ensemble des $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k p^k$ où $0 \leqslant \varepsilon_k < l$. La mesure de Dirac au point $\lambda$ est notée $\delta^\lambda$. A toute pseudo-mesure $S$ portée par $E_l$ associons les suites de mesures

$$S_n = \frac{1}{p^n} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \langle S, \chi_n^\lambda \rangle \chi_n^\lambda \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{p^n} \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \langle S, \chi_n^\lambda \rangle \delta_\lambda.$$

Soit $\varphi$ une fonction de $A(Q_p)$, constante et égale à $c_\lambda$ sur l'ensemble $\lambda + p^m Z_p$, pour chaque $\lambda \in \Lambda_m$. Pour $n \geqslant m$ on peut décomposer tout élément $\lambda$ de $\Lambda_n$ en somme: $\lambda = \lambda_m + \varepsilon_m$ où $\lambda_m \in \Lambda_m$ et $|\varepsilon_m|_p \leqslant p^{-m}$. On a alors pour $n \geqslant m$

$$\varphi = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} c_{\lambda_m} p^{-n} \chi_n^\lambda,$$

et

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} c_{\lambda_m} p^{-n} \langle S, \chi_n^\lambda \rangle.$$

D'où, d'une part

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} p^{-n} \langle S, \chi_n^\lambda \rangle \langle \delta^\lambda, \varphi \rangle = \langle T_n, \varphi \rangle,$$

et d'autre part

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \langle S, \chi_n^\lambda \rangle p^{-n} \int \chi_n^\lambda(x) \varphi(x) dm(x) = \langle S_n, \varphi \rangle.$$

Ces fonctions localement constantes forment un ensemble dense dans $A(Z_p)$; il suffit donc de montrer que les normes $\|T_n\|_{\text{p.m.}} = \sup_{\xi \in Q_p} |\hat{T}_n(\xi)|$ sont uniformément bornées pour déduire que $T_n \underset{n\to\infty}{\to} S$ dans la topologie faible des pseudo-mesures. On aura alors obtenu que toute pseudo-mesure $S$ portée par $E_l$ est limite faible d'une suite de mesures portées par $E_l$, (et même ici d'une suite de mesures définies à partir de $S$ par un procédé linéaire explicite), ce qui entraîne la propriété de synthèse spectrale (cf. [2], p. 115). De même $\|S_n\|_{\text{p.m.}}$ uniformément borné entrainera $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Or on a $\|S_n\|_{\text{p.m.}} = \|S * \chi_n\|_{\text{p.m.}} \leqslant \|S\|_{\text{p.m.}}$, ce qui donne déjà, pour le cas $l = p$, une suite simple de mesures portées par $E_l$, convergeant vers $S$ faiblement. Pour le cas $l < p$, montrons qu'il existe une constante positive $C$ telle que, pour tout $n$ et tout $a_\lambda$ complexes, on ait:

$$\Big\| \sum_{\lambda \in \Delta_n} a_\lambda \chi_n(x-\lambda) \Big\|_{\text{p.m.}} \geqslant C \Big\| \sum_{\lambda \in \Delta_n} a_\lambda \delta(x-\lambda) \Big\|_{\text{p.m.}}.$$

Par changement de variable, cela équivaut à

$$\Big\| \sum_{\lambda \in p^{-n}\Delta_n} a_\lambda \chi_0(x-\lambda) \Big\|_{\text{p.m.}} \geqslant C \Big\| \sum_{\lambda \in p^{-n}\Delta_n} a_\lambda \delta(x-\lambda) \Big\|_{\text{p.m.}}.$$

Or la fonction $f$, transformée de Fourier de $\sum_{\lambda \epsilon p^{-n}\Lambda_n} a_\lambda \delta(x-\lambda)$ et la fonction $g$, transformée de Fourier de $\sum_{\lambda \epsilon p^{-n}\Lambda_n} a_\lambda \chi_0(x-\lambda)$ coincident sur $\boldsymbol{Z}_p$. D'autre part, la fonction $f$ ayant son spectre dans l'ensemble

$$\boldsymbol{Z}(p) \cap \left[0, \frac{l-1}{p-1}\right[,$$

et $\boldsymbol{Z}_p$ ayant la mesure 1, on voit comme au théorème 1 que, pour $l < p$, il existe une constante $C$ telle que

$$\sup_{x \epsilon \boldsymbol{Z}_p} |f(x)| \geqslant C \sup_{x \epsilon \boldsymbol{Q}_p} |f(x)|$$

d'où

$$\sup_{x \epsilon \boldsymbol{Q}_p} |g(x)| \geqslant C \sup_{x \epsilon \boldsymbol{Q}_p} |f(x)|.$$

Finalement on obtient, pour tout $n \geqslant 1$, en prenant $a_\lambda = \hat{S}(\lambda))$,

$$C\|T_n\|_{\text{p.m.}} \leqslant \|S_n\|_{\text{p.m.}} \leqslant \|S\|_{\text{p.m.}},$$

ce qui prouve que lorsque $l < p$, les mesures discrètes $T_n$ portées par $E$ tendent faiblement vers $S$.

**4. Fermeture de $\Xi$ dans le compactifié de Bohr de $\boldsymbol{Q}_p$.** Pour la topologie induite sur $\boldsymbol{R}$ par celle de son compactifié de Bohr, les seuls points de $\boldsymbol{R}$ adhérents à $\boldsymbol{Z}$ sont les points de $\boldsymbol{Z}$ lui-même. Nous allons voir maintenant que $\Xi$ possède, à un point près, cette propriété.

Posons $\Xi^* = \boldsymbol{Z}(p) \cap [0, 1]$.

PROPOSITION 6. *Dans la topologie induite sur $\boldsymbol{Q}_p$ par celle de son compactifié de Bohr $\boldsymbol{Q}_p$, les points d'accumulation de $\Xi$ sont les points de $\Xi^*$.*

Montrons d'abord que $\Xi^*$ n'a pas de point isolé pour la topologie de Bohr sur $\boldsymbol{Q}_p$.

Il suffit pour cela de montrer que 0 n'est pas un point isolé de $\Xi^*$; et pour voir cela il suffit de se donner un homomorphisme continu quelconque, $h$, de $\boldsymbol{Q}_p$ dans une puissance du cercle $T^N$, et de considérer que pour tout voisinage $\vartheta$ de 0 dans $T^N$ on peut trouver $a$ et $\beta$ dans $\Xi^*$, avec $a-\beta \epsilon \Xi^*$, $a-\beta \neq 0$ et $h(a-\beta) \epsilon \vartheta$.

Montrons maintenant que $\Xi^*$ n'a pas d'autre point d'accumulation que ses propres points. Pour cela soit $\Sigma_p$ le groupe compact dual du groupe discret $\boldsymbol{Z}(p)$ et $j_p$ (resp. $j_0$) l'injection de $\boldsymbol{Q}_p$ dans $\Sigma_p$ (resp. de $\boldsymbol{R}$ dans $\Sigma_p$) duale de l'injection canonique de $\boldsymbol{Z}(p)$ dans $\boldsymbol{Q}_p$ (resp. de $\boldsymbol{Z}(p)$ dans $\boldsymbol{R}$). On peut tracer le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\mathbf{Q}}_p \arrow[dd, "\tilde{j}_p"] \\
 & \mathbf{Q}_p \arrow[ur] \arrow[dr, "j_p"] & \\
\mathbf{Z}(p) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma_p \\
 & \mathbf{R} \arrow[ur, "j_0"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{j}_p$ est le prolongement canonique de $j_p$ à $\tilde{\boldsymbol{Q}}_p$.

Soit $E$ l'adhérence dans $\Sigma_p$ de $j_p(\Xi^*)$. Comme dans la première partie on voit que $E = j_0([0, 1])$. Or $j_p(\boldsymbol{Q}_p) \cap j_0([0, 1]) = j_p(\Xi^*)$. En relevant $E$ dans $\tilde{\boldsymbol{Q}}_p$ à l'aide de $\tilde{j}_p$, on obtient donc que les seuls points de $\boldsymbol{Q}_p$ adhérents à $\Xi^*$ pour la topologie de Bohr sont les points de $\Xi^*$ lui-même.

**5. Approximation uniforme sur $\Xi$ des caractères non continus de $\boldsymbol{Q}_p$.** Rappelons une dernière propriété de $\Xi$, plus forte que celle d'être un spectre régulier (cf. [5], § 1, Théorème 1), et que $\boldsymbol{Z}$ possède trivialement:

PROPOSITION 7 ([7], prop. 1). *Tout caractère faible (homomorphisme non nécessairement continu de $\boldsymbol{Q}_p$ dans $\boldsymbol{T}$) est limite uniforme sur $\Xi$ de caractères continus.*

Une preuve très élémentaire figure dans [8]; nous allons ici appliquer les méthodes géometriques du § 4. La restriction à $\Xi$ d'un caractère faible de $\boldsymbol{Q}_p$ est déterminée par la donnée d'un caractère sur le groupe discret $\boldsymbol{Z}(p)$ engendré par $\Xi$, c'est à dire par un point $\sigma$ de $\Sigma_p$.

Soit $k$ un entier et $V(k)$ l'ensemble des éléments $\psi$ de $\Sigma_p$ vérifiant $|\psi(\lambda) - 1| \leqslant p^{-k}$ pour tout $\lambda$ de $\Xi$; $V(k)$ est un compact qui contient en particulier $j_p(p^{-k}\Xi)$. Il en résulte que le compact $V(k) + j_p(p^{-k}\boldsymbol{Z}_p)$ contient $j_p(\boldsymbol{Q}_p)$ qui est dense dans $\Sigma_p$, et donc contient $\Sigma_p$ tout entier.

Au caractère $\sigma$ on peut donc associer un $\chi$ de $p^{-k}\boldsymbol{Z}_p$ tel que

$$\sigma - j_p(\chi) \in V(k)$$

c'est-à-dire

$$\sup_{\lambda \in \Xi} |\sigma(\lambda) - \chi(\lambda)| \leqslant p^{-k};$$

ce qui prouve la proposition.

## *TRAVAUX CITÉS*

[1] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyennes—périodiques bornées,* Annales de l'Institut Fourier 7 (1957), p. 293 - 314.
[2] — et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques,* Paris 1963.
[3] Y. Meyer, *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions,* Annales de l'Institut Fourier 18 (1968), p. 73 - 86.
[4] — *Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique,* à paraître aux Studia Mathematica.
[5] — *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique,* Collège de France, Cours Peccot 1969. Lecture notes in math. n° 117, Berlin 1970.
[6] W. Rudin, *Fourier analysis on groups.*
[7] J.-P. Schreiber, *Sur les nombres de Chabauty-Pisot-Salem des extensions algébriques de $Q_p$,* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1969, t. 269, p. 71.
[8] — *Application de la méthode d'Y. Meyer à une caractérisation des nombres de Pisot-Chabauty,* Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris 1969.

*Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1969*