

*SUR LA DÉRIVATION DE LIE
DANS LES VARIÉTÉS DE BANACH*

PAR

G. GHEORGHIEV (JASSY)

1. L'extension, proposée et étudiée dans la suite, de la notion de dérivée de Lie dans les variétés de dimension infinie, plus précisément dans les variétés modelées des espaces de Banach (VB), montre une fois de plus la fécondité de cette notion et l'importance du travail du Professeur Ślebodziński.

A ma connaissance, il n'existe à ce sujet que le travail de Craioveanu [3], où la dérivée de Lie fut introduite sur les variétés de dimension infinie au sens de Laugwitz [6], en utilisant le calcul avec des indices et en transposant la méthode employée par Yano [10]. Craioveanu montra que la dérivée de Lie d'un objet géométrique linéaire est aussi un objet linéaire et retrouva la formule $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] - \mathcal{L}_{[X, Y]} = 0$.

Le point de vue adopté ici est différent. Il consiste à considérer la dérivée de Lie comme un opérateur local de dérivation de grade 0 et subordonné à d'autres opérateurs; les résultats en sont présentés dans une forme invariante. Ainsi, la notion en question devient une extension naturelle, sur (VB), de la dérivation de Fréchet des espaces de Banach (SB). Aussi la liaison entre la dérivée de Lie et une loi de dérivation sur les variétés fibrés banachiques (FB) sera établie.

1. PRÉMISSSES ALGÈBRIQUES

2. Soit L une algèbre graduée sur un corps commutatif K (qui peut être considéré comme sous-espace vectoriel de la sous-algèbre L^0). L'algèbre L est anticommutative si on a

$$(1) \quad u_p v_q = (-1)^{pq} v_q u_p \quad \text{où } u_p \in L^p \text{ et } v_q \in L_q.$$

Si l'algèbre graduée L est anticommutative et associative, on a une algèbre extérieure. Un exemple en est l'algèbre extérieure $\Lambda(E)$ d'un K -module quand $\Lambda^p(E) = 0$ pour $p < 0$.

Définition. Un endomorphisme linéaire $D \in \text{End}(L)$ est appelé la *dérivation de grade* $p \in \mathbb{Z}$ si D vérifie les conditions:

- (2) (a) $DL^n \subset L^{n+p}$,
 (b) $D(u_m v_n) = Du_m v_n + (-1)^{pm} u_m Dv_n$ où $u_m \in L^m$ et $v_n \in L^n$.

Si L est une algèbre extérieure, on peut y poser par définition

$$[D, D'] = DD' - (-1)^{pq} D'D,$$

où D' est une dérivation de grade q . On voit aisément que le crochet $[D, D']$ est une dérivation de grade $p+q$ et on a

$$[D, D'] = (-1)^{pq+1} [D', D],$$

$$[[D, D'], D''] = [D, [D', D'']] - (-1)^{pq} [D', [D, D'']]$$

où D'' est la troisième dérivation.

Suivant que le grade p de la dérivation est impair ou pair, on dit que l'on ait une *antidérivation* ou *dérivation* proprement dite. Alors

- (a) Si D est une antidérivation, DD est une dérivation (ou zéro).
 (b) Si D et D' sont des antidérivations ou dérivations proprement dites, $DD' + D'D$ et $DD' - D'D$ sont des dérivations.
 (c) Si D est une dérivation et D' est une antidérivation, $DD' - D'D = [D, D']$ est une antidérivation.

Exemple. Si $\Lambda(E)$ est l'algèbre extérieure d'un K -module E , l'adjoint du produit extérieur est dit le produit intérieur. Si $X \in E$ et $\omega \in \Lambda^r(E^*)$, le produit intérieur i_X est donné par la formule

$$(3) \quad \langle X_2 \wedge \dots \wedge X_r | i_X \omega \rangle = \langle X \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_r | \omega \rangle$$

où $\langle u | \omega \rangle = r! \langle u; \omega \rangle$ où $u \in \Lambda^r(E)$ et $\omega \in \Lambda^r(E^*)$.

Le produit intérieur i_X par $X \in E$ est une antidérivation de grade $p = -1$, parce qu'il résulte de la définition

$$(4) \quad i_X(\Lambda^r(E^*)) \subset \Lambda^{r-1}(E^*), \quad i_X i_X = 0$$

et on montre par le calcul (voir [4]) que

$$(4') \quad i_X(u_p \wedge v_q) = i_X u_p \wedge v_q + (-1)^p u_p \wedge i_X v_q.$$

3. Définition. Une K -algèbre extérieure L est dite *différentielle* si une antidérivation d de grade $p = 1$ ($d(L^p) \subset L^{p+1}$) y est donnée et $dd = 0$. Alors (2) devient

$$(5) \quad d(u_p \wedge v_q) = du_p \wedge v_q + (-1)^p u_p \wedge dv_q.$$

L'antidérivation d est alors appelée la *différentielle extérieure* de l'algèbre L .

En particulier, si l'on suppose que l'algèbre $L = \Lambda(E^*)$ est pourvue d'une différentiation extérieure, il résulte de la propriété (b) que

$$(C) \quad \mathcal{L}_X = di_X + i_X d$$

est une dérivation de grade zéro et on peut l'appeler la *dérivée de Lie* suivant $X \in E$ associée à la différentielle extérieure d .

4. Remarque. Soient $U \subset E$ l'ensemble ouvert dans un SB réel, $A_p(U; R)$ l'espace de Banach des p -formes différentielles définies sur U avec les valeurs réelles et $\bigoplus_{p \geq 0} A_p(U; R) = A(E)$ l'algèbre extérieure de E (voir [2]). A l'aide de la dérivée de Fréchet et de l'opérateur d'alternation convenable, on définit la différentielle extérieure sur $A(E)$ par la formule (voir [2])

$$(6) \quad (d\omega_x)(X_0, \dots, X_p) \\ = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\omega'_x \cdot X_i)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \quad \text{où } x \in U \text{ et } X_i \in E.$$

On a pour $p = 0$ et $p = 1$

$$(df(x))(X) = f'(x) \cdot X$$

et

$$(d\omega_x)(X_1, X_2) = (\omega'_x \cdot X_1)(X_2) - (\omega'_x \cdot X_2)(X_1).$$

Puisque $i_X f = 0$, $i_X \omega = \langle X; \omega \rangle$ et, en particulier, $i_X df = \langle X; df \rangle = Xf$, il vient en utilisant la formule (C)

$$(7) \quad (\mathcal{L}_X f)(x) = f'(x) \cdot X = Xf|_x \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_X \omega|_x = \omega'_x \cdot X_x.$$

La dérivation de Lie sur SB se réduit donc à celle de Fréchet de l'application $\omega: U \rightarrow L(E, R)$.

2. LA DÉRIVATION DE LIE SUR LES VARIÉTÉS DE BANACH

5. Les VB de classe C^∞ sont définies usuellement par les atlas (complets) $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, c'est-à-dire par une famille de couples formés par les ensembles ouverts $U_i \subset B$ d'un espace de Hausdorff, tels que $\bigvee_{i \in I} U_i = B$ et par les homéomorphismes $\varphi_i: U_i \rightarrow E$ (SB modèle) compatibles C^∞ ; cela veut dire que, pour chaque couple $i, j \in I$, les applications

$$g_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_{ij}) \rightarrow \varphi_j(U_{ij}) \quad (U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset)$$

sont des difféomorphismes de classe C^∞ sur E .

L'ensemble $\Gamma = \{g_{ij} \in \text{Diff } E \mid g_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \text{ pour tous les couples } i, j \in I \text{ pour lesquels } U_{ij} \neq \emptyset\}$ est un pseudogroupe différentiable de groupe des difféomorphismes C^∞ de l'espace modèle E .

La réunion de tous les atlas d'une classe d'équivalence donne un atlas complet et une structure C^∞ de B .

L'espace modèle E est supposé un SB réel, réflexif, admettant des bases topologiques dénombrables bien ordonnées et assujetti au théorème de graphe fermé, ce qui permet de choisir des bases adéquates telles que les sous-espaces complémentaires soient munies de sous-bases supplémentaires. L'espace de Hilbert est un exemple de ce genre et B est alors une variété hilbertienne.

6. Les FB. Soit (M, π, B) un espace fibré localement trivial de fibre F , de groupe structurel G et d'atlas fibré

$$A = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I} \quad \text{où } \psi_i: U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$$

sont des homéomorphismes des cartes locales. Si la fibre type F est un SB et l'action du groupe structurel G sur F est linéaire, l'espace fibré M est dit *fibré vectoriel de Banach*. Si, de plus, la base B est une VB de modèle E (en général distincte de F) et les changements de cartes $g_{ij}: U_{ij} \neq \emptyset \rightarrow G \subset GL(F)$ sont des applications différentiables C^∞ , on obtient FB de l'atlas vectoriel A . Les sections de FB, c'est-à-dire les applications C^∞ $\sigma: B \rightarrow M$ ou $s: U \subset B \rightarrow M$ telles que $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$ ou $\pi \circ s = \text{id}_U$ respectivement donnent les objets géométriques linéaires (homogènes) de la variété-base B . L'ensemble $\Sigma(U)$ des sections de M au-dessus de U est muni naturellement d'une structure de F -module sur l'anneau $F(U)$ des fonction différentiables C^∞ sur U . L'existence des sections au-dessus d'un $U \subset B$ ouvert peut être établie en utilisant les cartes vectorielles de M et en prolongeant les sections définies sur les domaines de ces cartes.

Remarque. On peut considérer l'espace affine $A(E)$ associé à un E qui est SB. Pareillement, l'espace projectif $P(E)$ peut être défini comme l'ensemble des variétés linéaires 1-dimensionnelles qui contiennent $0 \in E$ ou, autrement dit, qui est l'espace quotient de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence correspondante.

Maintenant, lorsqu'on considère dans la définition de FB qui vient d'être donnée la fibre $F = A(E)$ ou $F = P(E)$ et que l'on prend pour le groupe structurel un sous-groupe du groupe affine ou celui du groupe projectif respectivement, on obtient la définition des fibrés affines ou des fibrés projectifs sur B , et les sections dans ces fibrés nous donnent les objets géométriques linéaires (généraux) et projectifs respectivement.

7. L'exemple le plus important de FB est le fibré tangent $T(B) = \bigcup_{x \in B} T_x(B)$ ayant comme fibre le modèle E de B qui est un SB ou encore fibré cotangent $T^*(B)$ de fibre E^* . Une section $X(\omega)$ de $T(B)$ ou de $T^*(B)$

est appelée le *champ vectoriel* ou la *forme de Pfaff* respectivement, définis sur B et la valeur $\langle X_x, \omega_x \rangle$ pour chaque $x \in B$ est une fonction C^∞ (sur B); on la désigne par $\langle X; \omega \rangle = \omega(X)$.

Considérons à présent deux FB, $\pi: M \rightarrow B$ et $\pi': N \rightarrow B$, ayant la même base. Au-dessus d'un point $x \in B$, on a les fibres locales $\pi^{-1}(x) = M_x$ et $\pi'^{-1}(x) = N_x$ isomorphes avec les fibres type par $t_x: F \rightarrow M_x$ et $\tau_x: F' \rightarrow N_x$ respectivement. L'application

$$\begin{pmatrix} t_x & 0 \\ 0 & \tau_x \end{pmatrix}: F \times F' \rightarrow M_x \times N_x$$

est une isomorphie et on peut définir sur $M \oplus N = \sum_{x \in B} M_x \times N_x$ une structure FB, M_x , N_x et $M_x \times N_x$ étant des espaces de Banach.

Le FB $M \oplus N$ est appelé la *somme directe* ou *somme de Whitney* (voir [1]). De même, il y a lieu de considérer le SB $L(M_x, N_x)$ des applications linéaires continues. On peut montrer (voir [5]) que l'ensemble $L(M, N) = \bigcup_{x \in B} L(M_x, N_x)$ a une structure de FB au-dessus de B . En particulier, si $N = B \times R$, on obtient $L(M, N) = M^*$, le fibré dual de M .

Diverses autres variantes nous fournissent, outre les sommes directes (ou celles de Whitney), les fibrés d'applications multilinéaires, ceux d'applications multilinéaires alternées etc. Tous ces FB jouent un rôle important dans la géométrie des VB. Cependant, quant aux VB, bien que l'on puisse y introduire les champs tensoriels et les opérations tensorielles, ils ne jouent pas le même rôle que dans le cas de dimension finie, puisque le produit tensoriel des deux SB n'est pas en général un SB. Mais lorsqu'on considère, au lieu des tenseurs, les sections de FB des applications multilinéaires et que la composition en est possible, on obtient dans le cas de VB une extension naturelle des tenseurs et de leurs produits.

8. Opérateurs locaux sur les VB. Commençons par le produit intérieur. Soient X un champ vectoriel et ω une p -forme différentielle. Le produit intérieure de ω par X est une $(p-1)$ -forme donnée par (3) ou

$$(3') \quad (i_X \omega)(X_2, \dots, X_p) = \omega(X, X_2, \dots, X_p)$$

$$\text{pour } x \in B \text{ et } X_2, \dots, X_p \in \mathcal{F}'_0(B).$$

Il en résulte que i_X est un opérateur local jouissant des propriétés (4) et (4').

On peut définir d'une manière analogue l'opérateur d de la différentielle extérieure d'une p -forme différentielle par la $(p+1)$ -forme con-

venable (voir [5], chapitre V, § 2) comme il suit:

$$(8) \quad (d\omega)(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) + \\ + \sum_{i < j=0}^p (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p),$$

le crochet $[X_i, X_j]$ étant défini antérieurement (voir ibidem § 1). On en déduit aisément les propriétés de d formulées plus haut dans 3.

La dérivée de Lie d'une forme différentielle est l'opérateur donné par la formule (voir [8])

$$(C') \quad \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X(d\omega).$$

En utilisant (3') et (8), on obtient la formule invariante

$$(9) \quad (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ = X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p)$$

ou

$$(9') \quad (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ = \mathcal{L}_X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p).$$

Ici en résulte que

$$\mathcal{L}_X(f\omega) = (\mathcal{L}_X f)\omega + f\mathcal{L}_X \omega \quad \text{pour } f \in F(B).$$

En particulier, on a pour $p = 0$ et 1

$$(10) \quad \mathcal{L}_X f = Xf \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]).$$

En appliquant (10₁) à la fonction $\omega(X) = \langle X, \omega \rangle$, il vient pour tout $\omega \in \mathcal{F}_1^0(B)$

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = \langle Y, \mathcal{L}_X \omega \rangle + \langle \mathcal{L}_X Y, \omega \rangle$$

ou

$$X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y).$$

Il en résulte en vertu de (10₂) que

$$(C'') \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Remarque. Soient $U \subset E$ un ensemble ouvert de E qui est un SB et $v \in E$ — un vecteur donné. On peut considérer v comme un champ vectoriel constant sur U qui associe à chaque point $x \in U$ le vecteur de $T_x(E)$ correspondant à $v \in E$. Un champ vectoriel X peut être donné par l'application $\eta: U \rightarrow E$ qui associe à chaque $x \in U$ le vecteur $\eta(x)$ de E . En considérant maintenant $(\mathcal{L}_v \eta)_x = [v, \eta]_x = \eta'(x)v$, puisque $v'(x) = 0$, on voit que la dérivée de Lie dans ce cas se réduit à celle de Fréchet de l'application η . Ainsi, la dérivation de Lie des champs vectoriels est une extension naturelle, sur VB, de la dérivée de Fréchet de SB.

Nous pouvons à présent faire encore un pas, à savoir appliquer la dérivée de Lie à une section T dans FB, $\mathcal{L}_{(p+q)}(T^*(B), T(B); R)$ des applications $p+q$ linéaires. En effet, définissons T par la formule

$$(11) \quad (\mathcal{L}_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p; X_1, \dots, X_q) \\ = X(T(\omega^1, \dots, X_q)) - \sum_{i=1}^p T(\omega^1, \dots, \mathcal{L}_X \omega^i, \dots, X_q) - \\ - \sum_{j=1}^q T(\omega^1, \dots, \mathcal{L}_X X_j, \dots, X_q),$$

où

$$(11') \quad (\mathcal{L}_X \omega^i)(Y) = X(\omega^i(Y)) - \omega^i([X, Y]), \quad \mathcal{L}_X X_j = [X, X_j].$$

Dans le cas de dimension finie, T est un champ tensoriel de type (p, q) et on retrouve la formule globale de Vaisman [9].

Remarque. La dérivée de Lie d'un objet linéaire, c'est-à-dire d'une section quelconque $\pi: M \rightarrow B$ de FB, peut être définie directement comme il suit (voir [7]) pour le cas de dimension finie.

Le champ vectoriel X de la base B détermine sur un voisinage U de chaque point $x \in B$ le groupe local $\{a_t\}$ à un paramètre. Pour chaque t , la difféomorphie $a_t: U \rightarrow U_t = a_t(U)$ permet de transporter la structure de U sur U_t , ce qui induit une transformation locale sur FB, à savoir $a_t: \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U_t)$ de M , qui est compatible avec la structure fibrée. A la section σ de M vient correspondre celle $\sigma_t = \sigma_t(\sigma)$ de M au-dessus de U_t .

Définition. On appelle la dérivée de Lie de σ (en $x \in B$) suivant X l'expression

$$(\mathcal{L}_X \sigma)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{a_t(\sigma) - \sigma_x\}.$$

Si $\sigma = \omega$ (forme différentielle), on a $a_t \sigma = a_t^* \omega$; si $\sigma = Y$, on a $a_t \sigma = a_t \cdot Y$, et ainsi de suite. Il en résulte que $\mathcal{L}_X \sigma$ est une nouvelle section dans le même FB M ; si $\mathcal{L}_X \sigma = 0$ (section nulle), on dit que l'objet σ est *invariant* par rapport aux difféomorphies du groupe a_t généré par X .

3. LES CONNEXIONS LINÉAIRES SUR FB ET LA DÉRIVATION DE LIE

9. Soient B une VB C^∞ , F l'anneau des fonctions C^∞ sur B , $\pi: M \rightarrow B$ un FB et $\Sigma(U)$ le F -module des sections C^∞ au-dessus de l'ensemble ouvert $U \subset B$.

Définition. Une loi de dérivation D dans $\Sigma(U)$ est une application $D: \mathcal{F}_0^1(U) \times \Sigma(U) \rightarrow \Sigma(U)$, désignée par D_X . Admettons que D est locale, F -linéaire par rapport aux champs vectoriels et se comporte comme une dérivation (de type spécial) en vérifiant la formule

$$(12) \quad D_X(f\sigma) = fD_X\sigma + Xf\sigma \quad \text{pour } f \in \mathcal{F} \text{ et } \sigma \in \Sigma.$$

En particulier, on a $\Sigma = F$ pour $M = B \times R$ et on peut convenir que $D_X f = Xf$ pour $f \in F$.

On remarque immédiatement que la différence $D - D'$ de deux lois de dérivation de Σ est une section dans le FB $L(T(B), M; M)$, tandis que D_X (ou D'_X) en est une section en $L(M; M)$.

Deux FB, soit M^1 et M^2 , étant donnés sur la même base B avec les lois de dérivation D^1 et D^2 en Σ^1 et Σ^2 respectivement, on démontre facilement que l'on a la loi D donnée sur FB $L(M^1, M^2)$ par la formule

$$(D_X \omega)(\sigma) = D_X^2(\omega(\sigma)) - \omega(D_X^1 \sigma)$$

pour $\sigma \in \Sigma^1$, $X \in \mathcal{F}'_0$ et $\omega \in L(\Sigma^1, \Sigma^2)$.

Cela revient à vérifier la validité de la relation (12).

En particulier, si $M^1 = M$ et $M^2 = B \times R$, on a $\Sigma^2 = F$ et $L(\Sigma^1, \Sigma^2) = \Sigma^*$. Alors

$$(13) \quad (D_X \omega)(\sigma) = X(\omega(\sigma)) - \omega(D_X \sigma).$$

Plus généralement, on a pour les p -formes différentielles de B à valeurs dans un F -module Σ de FB M

$$(14) \quad (D_X \omega)(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \\ = X(\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(\sigma_1, \dots, D_X \sigma_i, \dots, \sigma_p) \quad \text{pour } \sigma_i \in \Sigma.$$

On obtient ainsi une nouvelle section dans le FB $A_p(T(B); M)$.

Définition. L'expression $R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]}$ où $X, Y \in \mathcal{F}'_0(B)$ et $D_X \in L(M, N)$ s'appelle la *courbure* de la dérivation D .

Vu que $R(X, Y)(f\sigma) = fR(X, Y)\sigma$, il en résulte que $R(X, Y)$ est une section en $L(M; M)$, plus précisément en $A_2(T(B); L(M; M))$; par conséquent, R est une 2-forme différentielle à valeurs dans $L(M; M)$.

10. On peut maintenant étendre les opérateurs locaux i_X, d et \mathcal{L}_X à F -algèbre \mathfrak{A} des formes différentielles extérieures définies sur B à valeurs dans un M qui est un FB.

Les formules (3'), (8) et (9) du § 2 sont formellement les mêmes si l'on adopte pour les formes de grade 0 la loi de dérivation canonique $D_X f = Xf$, pour laquelle on a évidemment $R(X, Y)f = 0$. Ainsi, la dérivée de Lie d'une p -forme se trouve donnée par l'égalité

$$(9') \quad (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ = X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p).$$

Remarque 1. En considérant le fibré tangent $M = T(B)$, on voit que

$$\mathcal{L}_{fX} Y = [fX, Y] = f[X, Y] - YfX,$$

d'où il s'ensuit que la dérivation de Lie sur $T(B)$ n'est pas une loi de dérivation. En comparant les formules (14) et (3'), on constate que ce résultat négatif subsiste encore pour les FB $A_p(T(B); M)$ et ainsi de suite.

Remarque 2. En considérant la différence $D_X - \mathcal{L}_X = A_X$, on voit que $A_X f = 0$ puisque $D_X f = \mathcal{L}_X f = Xf$ pour $f \in F$. On parvient ainsi à un nouvel opérateur local, la restriction duquel aux fonctions scalaires sur B est 0.

Remarque 3. En appliquant deux fois de suite les trois opérateurs considérés, on établit facilement les formules de liaison suivantes:

$$(15) \quad i_X^2 = 0, \quad [\mathcal{L}_X, i_Y] - i_{[X, Y]} = 0, \quad dR = 0,$$

$$(16) \quad \begin{aligned} &([\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] - \mathcal{L}_{[X, Y]})\omega = R(X, Y)\omega, \\ &[\mathcal{L}_X, d]\omega = i_X R \wedge \omega \quad \text{et} \quad d^2 \omega = R \wedge \omega, \end{aligned}$$

bien connues dans le cas de dimension finie (voir [4] et [7]).

En particulier, pour le fibré trivial $M = B \times R$ ou, plus généralement, pour $M = B \times F$, la courbure R de la dérivation est nulle et on a alors le zéro dans les membres droits des formules (16), valables pour les formes différentielles ayant leurs valeurs dans un SB donné F .

4. LA FONCTION DE CONNEXION ET LES COORDONNÉES LOCALES

11. Définition. On appelle l'application

$$(17) \quad \Gamma: \mathcal{T}'_0 \times \Sigma^* \times \Sigma \rightarrow F \text{ donnée par } \Gamma(X, \Theta, t) = \Theta(D_X t)$$

fonction de connexion de la loi D de dérivation.

En tenant compte de la définition de D , on a les propriétés suivantes de Γ :

- (1) Γ est une fonction F -linéaire en deux premiers arguments,
- (2) $\Gamma(X, \Theta, t_1 + t_2) = \Gamma(X, \Theta, t_1) + \Gamma(X, \Theta, t_2)$,
- (3) $\Gamma(X, \Theta, ft) = f\Gamma(X, \Theta, t) + (Xf)\Theta(t)$.

Dans le cas de dimension finie et de $M = T(B)$, on retrouve la fonction de connexion de la connexion linéaire ∇ de Vaisman (voir [9]).

La courbure $R(X, Y)$ étant par définition une section de $L(M, M)$, on peut écrire

$$(18) \quad R(X, Y)(\Theta, t) = \Theta(R(X, Y)t),$$

d'où en vertu des formules (1)-(3)

$$(19) \quad \Theta(R(X, Y)t) = \Gamma(X, \Theta, D_Y t) - \Gamma(Y, \Theta, D_X t) - \Gamma([X, Y], \Theta, t).$$

12. Les expressions dans les coordonnées locales. Quel que soit le point $x \in B$, on a une carte locale (U, φ) autour de x et une carte vectorielle (U, ψ, F) de FB $\pi: M \rightarrow B$. Dans chaque $y \in U$, on a le repère naturel ∂ et le corepère dual \bar{d} , tandis que dans tous les points de la fibre M_y au-dessus de y , on a les mêmes bases duales t et Θ de la fibre.

La loi de dérivation est connue dès que la fonction Γ de D , à savoir $\Gamma(\partial, \Theta, t) = \Theta(D_\partial t)$ est donnée; la courbure est alors définie localement par l'égalité

$$R(\partial, \partial)(\Theta, t) = \Theta(R(\partial, \partial)t).$$

Par exemple, une section $\sigma \in \Sigma(U)$ est donnée dans $x \in B$ par l'égalité $\sigma(x) = \bar{\sigma}(x)t$ et le champ vectoriel X par l'égalité $X = \bar{X}\partial$. On a donc localement

$$D_X \sigma = \bar{X}(\partial \bar{\sigma} + \Gamma(\partial, \Theta, t)\bar{\sigma})t.$$

En appliquant la formule (11') pour la dérivée de Lie d'une forme de Pfaff, on arrive à l'égalité

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = (\bar{X}\partial \bar{\omega} + \bar{X}\Gamma(\partial, \Theta, t)\bar{\omega} + \bar{\omega}\partial \bar{X})\bar{Y}t$$

où $\omega = \bar{\omega}dt$ et $Y = \bar{Y}\partial$. Les formules locales obtenues peuvent être spécifiées à l'aide des indices; ce qui conduit dans le cas de dimension finie aux formules dues à Oproiu (voir [4]).

On a pour les coefficients de la loi de dérivation

$$(20) \quad D_{\partial_i} t_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta t_\beta,$$

d'où

$$(21) \quad D_X \sigma = X^i(\partial_i \sigma^\alpha + \Gamma_{i\beta}^\alpha \sigma^\beta) t_\alpha.$$

La courbure de D est donnée localement par les composantes

$$R(\partial_i, \partial_j)t_a = R_{aij}^\beta t_\beta.$$

En appliquant (19), on arrive à la formule

$$(22) \quad R_{aij}^\beta = \partial_i \Gamma_{ja}^\beta - \partial_j \Gamma_{ia}^\beta + \Gamma_{is}^\beta \Gamma_{ja}^s - \Gamma_{js}^\beta \Gamma_{ia}^s.$$

Enfin, les trois opérateurs i_X , d et \mathcal{L}_X , appliqués à une p -forme à valeurs en Σ , s'expriment localement par les formules

$$(23) \quad (i_X \omega)_{i_2 \dots i_p} = X^i \omega_{i_2 \dots i_p},$$

$$(24) \quad d\omega = \frac{1}{p!} (\partial_j \omega_{i_1 \dots i_p}^a + \Gamma_{j\beta}^a \omega_{i_1 \dots i_p}^\beta) t_a dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$(25) \quad (\mathcal{L}_X \omega)_{i_1 \dots i_p} = \left(X^j \partial_j \omega_{i_1 \dots i_p}^a + \sum_{a=1}^p \partial_{i_a} X^j \omega_{i_1 \dots i_{a-1} j i_{a+1} \dots i_p}^a + X^j \Gamma_{j\beta}^a \omega_{i_1 \dots i_p}^\beta \right) t_a,$$

où

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

avec les coefficients $\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega_{i_1 \dots i_p}^a t_a$.

Notons que les derniers termes dans (24) et (25) sont ajoutés au cas ordinaire.

TRAVAUX CITÉS

- [1] N. Bourbaki, *Variétés différentielles*, XXXIII, Paris 1967.
- [2] H. Cartan, *Formes différentielles*, Paris 1967.
- [3] M. Craioveanu, *Objets géométriques et dérivée de Lie sur des variétés de dimension infinie*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza” din Iaşi 13 (1967), p. 381-391.
- [4] G. Gheorghiev et V. Oproiu, *Geometrie diferenţială I, II*, Iaşi 1971.
- [5] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, New York 1962.
- [6] D. Laugwitz, *Über unendliche kontinuierliche Gruppen I*, Mathematische Annalen 130 (1955), p. 337-350; *II*, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Abhandlungen, 1956, p. 261-286.
- [7] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Paris 1968.
- [8] W. Ślebodziński, *Exterior forms and their applications*, Monografie Matematyczne 52, Warszawa 1970.
- [9] I. Vaisman, *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*, Commentarii Mathematici Helvetici 4 (1966-1967), p. 73-87.
- [10] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, Groningen 1957.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1971