COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 2

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПЕАНО

Г. И. БРОВКИН (ВАРШАВА) и Я. А. ГАБОВИЧ (ТАРТУ)

Пусть N — множество всех натуральных чисел. Взаимно однозначные отображения p множества $N\times N$ на все N называются *пеановскими отображениями*. Фиксируя некоторое пеановское отображение $c = p(a,b)$ определим две функции отображающие N в N следующим образом:

$$\sigma(c) = \sigma\big(p(a,b)\big) = a+b, \qquad \mu(c) = \mu\big(p(a,b)\big) = a\cdot b.$$

С. Улям [1] ставил вопрос существования такого пеановского отображения $p(a,b)$, что „сложение коммутирует с умножением" в том смысле, что $\sigma\mu(c) = \mu\sigma(c)$ для всех c из N, т. е. что $\sigma(a\cdot b) = \mu(a+b)$ для всех $a, b\in N$.

В настоящей заметке докажем, что *такого пеановского отображения нет*. Действительно, для $n>2$ имеем $\mu(n) = \mu\big((n-1)+1\big) = \sigma(n-1)$ и отсюда

$$\mu(n) = \mu\big((n-2)+2\big) = \sigma\big(2(n-2)\big) = \sigma(2n-4) = \mu(2n-3).$$

Рассмотрим возрастающую последовательность $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n-3$. Из $\mu(n) = \mu(2n-3)$ для $n>2$ следует, что $\mu(a_1) = \mu(a_2) = \ldots$ Иначе говоря, мы доказали, что существует бесконечно много представлений натурального числа $\mu(a_1)$ в виде произведения двух натуральных чисел. Ясно, что это невозможно.

---

[1] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, New York 1960.

Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1965