COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVIII 1973 FASC. 2

INTERPOLATION LINÉAIRE APPROCHÉE DES FONCTIONS BORNÉES DÉFINIES SUR UN ENSEMBLE DE SIDON

PAR

M. DÉCHAMPS-GONDIM (PARIS)

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soit Γ un groupe abélien localement compact métrisable et séparable, G son dual. Soit d une distance invariante sur Γ. Pour tout γ dans Γ et tout δ positif, posons

$$|\gamma| = d(0, \gamma), \qquad B_\delta = \{\gamma \in \Gamma, |\gamma| < \delta\}.$$

Pour toute partie fermée E de Γ, $B(E)$ désigne l'algèbre de Banach des restrictions à E des fonctions de l'algèbre $B(\Gamma)$ des transformées de Fourier des mesures de Radon bornées sur G, munie de la norme quotient.

DÉFINITION 1. La partie Λ de Γ est un *ensemble de Sidon* si toute fonction de $l^\infty(\Lambda)$ peut être prolongée sur Γ en une fonction de $B(\Gamma)$.

DÉFINITION 2. Soit K_0 un compact de G et C_0 une constante positive. Le couple (K_0, C_0) *est associé à* Λ si pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda(x, \lambda)$,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \leqslant C_0 \sup_{x\in K_0} |P(x)|.$$

DÉFINITION 3. Pour tout ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ le *pas* de Λ est le nombre

$$p(\Lambda) = \inf\{|\lambda-\lambda'|, \lambda\in\Lambda, \lambda'\in\Lambda, \lambda \neq \lambda'\}.$$

2. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous démontrons le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit Λ un ensemble de Sidon de Γ et K une partie compacte de Γ telle que*

$$(\lambda+K)\cap(\lambda'+K) = \emptyset \qquad (\lambda\in\Lambda, \lambda'\in\Lambda, \lambda \neq \lambda').$$

Alors il existe $C = C(\Lambda, K)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, toute fonction f de $A(\Gamma)$ à support dans K et tout b dans $l^\infty(\Lambda)$, il existe une fonction Φ dans $B(\Gamma)$ telle que

$$\|\Phi\|_{B(\Gamma)} \leqslant \varepsilon^{-1} C \|f\|_{A(\Gamma)} \|b\|_\infty, \tag{1}$$

$$\Phi(\gamma) = \sum_{\lambda \in \Lambda} b(\lambda) f(\gamma - \lambda), \qquad \gamma \in \Lambda + K, \tag{2}$$

$$|\Phi(\gamma)| \leqslant \varepsilon \|f\|_{A(\Gamma)} \|b\|_\infty, \qquad \gamma \in \Gamma \setminus (\Lambda + K). \tag{3}$$

Ce théorème complète des résultats antérieurs obtenus par Y. Meyer et S. Drury. Soit π l'application de $B(\Gamma)$ sur $l^\infty(\Lambda)$ définie par la restriction à Λ des éléments de $B(\Gamma)$. Tout d'abord Meyer [3] démontre l'existence d'une constante positive δ telle que π admette des sections L qui, composées avec l'application de passage au quotient de $B(\Gamma)$ sur $B(\Lambda + B_\delta)$, soient des applications linéaires et continues de $l^\infty(\Lambda)$ dans $B(\Lambda + B_\delta)$. Dans ce résultat on manque d'information sur l'ordre de grandeur de $L(b)$ en dehors de $\Lambda + B_\delta$, pour b dans $l^\infty(\Lambda)$. Un théorème plus précis, où apparait l'analogue de la condition (3) ci-dessus, est démontré dans [1], à l'aide d'une méthode introduite dans [2]. Il reste à déterminer quelles sont les meilleures valeurs possible de δ. Pour un ensemble de Sidon de nombres réels, Meyer ([4], p. 190-193) établit alors que l'on peut prendre $0 < \delta < 2^{-1} p(\Lambda)$. La démonstration faite dans [4] utilise des propriétés particulières à $\mathbf{R}$. Nous suivrons une autre méthode pour obtenir dans le cas général la propriété correspondante (4.1). Dans (4.2) nous résolvons le cas qui correspond à la valeur limite $\delta = 2^{-1} p(\Lambda)$.

Cette étude complète le § 3 de [1]. Nous avons rappelé ici quelques définitions et résultats et renvoyons à [1] pour des éventuels compléments.

Je remercie Monsieur Y. Meyer qui m'a suggéré ce travail, Mme A. Bonami et Monsieur J. F. Méla qui m'ont conduit à simplifier quelques démonstrations, et Monsieur S. Hartman qui a corrigé maintes imperfections dans la rédaction.

3. *UN CAS PARTICULIER*

LEMME. *Soit Λ un ensemble de Sidon de Γ, K_1 et K_2 des parties compactes de Γ telles que $d(\Lambda + K_1, \Lambda + K_2) > 0$.*

Alors il existe une fonction Φ dans $B(\Gamma)$ telle que:

$$\Phi(\gamma) = 1, \qquad \gamma \in \Lambda + K_1, \tag{i}$$

$$\Phi(\gamma) = 0, \qquad \gamma \in \Lambda + K_2. \tag{ii}$$

La démonstration du lemme utilisera la proposition suivante, implicitement contenue dans les résultats de [1], § 2:

Proposition. *Soient Λ_1 et Λ_2 deux ensembles de Sidon. Etant donné $a > 0$, il existe un compact K_0' de G et une constante $C_0' > 0$ ayant les propriétés suivantes: pour tous γ_1 et γ_2 dans Γ tels que la distance séparant $\gamma_1 + \Lambda_1$ et $\gamma_2 + \Lambda_2$ dépasse a, le couple (K_0', C_0') est associé à la réunion de $\gamma_1 + \Lambda_1$ et $\gamma_2 + \Lambda_2$.*

Démonstration du lemme. Posons $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ et $a = d(\Lambda + K_1, \Lambda + K_2)$ dans la proposition qui précède, et soit (K_0', C_0') le couple correspondant à a. Le théorème „d'élargissement" ([1], théorème 1.2) fournit $\delta' = \delta'(K_0', C_0')$, $0 < \delta' < 2^{-1}a$, tel que pour tout ensemble de Sidon Λ' associé au couple (K_0', C_0') et tout $b \in l^\infty(\Lambda')$, il existe $\Phi' \in B(\Gamma)$ satisfaisant à la condition suivante:

$$\Phi'(\gamma) = b(\lambda) \qquad (\gamma \in \lambda + B_{\delta'}, \lambda \in \Lambda').$$

Pour tout x dans Γ, posons $B(x, \delta') = \{\gamma \in \Gamma, |\gamma - x| < \delta'\}$. Nous pouvons déterminer un recouvrement ouvert fini de l'ensemble compact $K_1 \cup K_2$ de la forme

$$\{B(k_i^1, \delta'), 1 \leqslant i \leqslant r\} \cup \{B(k_j^2, \delta'), 1 \leqslant j \leqslant s\},$$

où $k_1^1, \ldots, k_r^1$ sont dans K_1 et $k_1^2, \ldots, k_s^2$ sont dans K_2. La distance entre $(k_i^1 + \Lambda)$ et $(k_j^2 + \Lambda)$ est supérieure ou égale à a, donc l'ensemble de Sidon $(k_i^1 + \Lambda) \cup (k_j^2 + \Lambda)$ est associé à (K_0', C_0') et le théorème d'élargissement fournit $\Phi_{ij} \in B(\Gamma)$ telle que

$$\Phi_{ij}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in \Lambda + B(k_i^1, \delta'), \\ 0, & \gamma \in \Lambda + B(k_j^2, \delta') \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s).$$

La fonction produit

$$\Phi_i = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} \Phi_{ij}$$

vaut 1 sur $\Lambda + B(k_i^1, \delta')$ et est nulle sur $\Lambda + K_2$. La fonction

$$\Phi = 1 - (-1)^r \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (\Phi_i - 1)$$

remplit alors les conditions (i) et (ii).

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'INTERPOLATION LINÉAIRE APPROCHÉE

4.1. Première étape. Démontrons le théorème sous l'hypothèse supplémentaire suivante: il existe $a > 0$ tel que si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$ et $\lambda \neq \lambda'$, la distance entre $\lambda + K$ et $\lambda' + K$ dépasse a.

Etant donnés un compact K_0 de G et une constante positive C_0, la propriété d'élargissement démontrée dans [1] (corollaire 3.1) fournit

$\delta_0 = \delta_0(K_0, C_0)$ et $C' = C'(C_0)$ tels que: pour tout ensemble de Sidon Λ' associé à (K_0, C_0), pour tout $\varepsilon > 0$, $b' \in l^\infty(\Lambda')$ et f' dans $A(\Gamma)$ à support dans B_{δ_0}, il existe une fonction $\Phi \in B(\Gamma)$ avec les propriétés suivantes:

$$\|\Phi\|_{B(\Gamma)} \leqslant \varepsilon^{-1} C' \|f'\|_{A(\Gamma)} \|b'\|_\infty, \tag{1'}$$

$$\Phi(\gamma) = \sum_{\lambda \in \Lambda'} b'(\lambda) f'(\gamma - \lambda), \quad \gamma \in \Lambda' + B_{\delta_0}, \tag{2'}$$

$$|\Phi(\gamma)| \leqslant \varepsilon \|f'\|_{A(\Gamma)} \|b'\|_\infty, \quad \gamma \in \Gamma \setminus (\Lambda' + B_{\delta_0}). \tag{3'}$$

Soit $\delta_1 = \min(\delta_0, 2^{-1}a)$. On peut déterminer un recouvrement ouvert fini de K de la forme $\{B(k_i, \delta_1), 1 \leqslant i \leqslant p\}$ où $k_1, \ldots, k_p$ sont dans K. Soit $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une partition de l'unité dans $A(\Gamma)$ subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire: pour $1 \leqslant i \leqslant p$, g_i est une fonction de $A(\Gamma)$ à support dans $B(k_i, \delta_1)$, et $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} g_i(\gamma) = 1$ pour γ dans K. Notons K_i le support de g_i et posons $K_i' = K \setminus B(k_i, \delta_1)$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, le lemme fournit une fonction $\tau_i \in B(\Gamma)$ telle que

$$\tau_i(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in \Lambda + K_i, \\ 0, & \gamma \in \Lambda + K_i'. \end{cases}$$

Posons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon (p \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} \|\tau_i\|_{B(\Gamma)} \|g_i\|_{A(\Gamma)})^{-1}.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, la propriété d'élargissement ci-dessus nous donne une fonction $\Phi_i \in B(\Gamma)$ satisfaisant (1′), (2′) et (3′), avec $\Lambda', B_{\delta_0}, f'$ et ε remplacés par $k_i + \Lambda$, B_{δ_1}, $(g_i f)_{k_i}$ et ε_1, respectivement ($(g_i f)_{k_i}$ désigne la translatée de $g_i f$ définie par $(g_i f)_{k_i}(\gamma) = (g_i f)(\gamma + k_i)$, pour tout γ dans Γ). En plus, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et λ dans Λ, on pose $b'(\lambda + k_i) = b(\lambda)$, où b est une fonction dans $l^\infty(\Lambda)$. On vérifie facilement que la fonction $\Phi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \Phi_i \tau_i$ satisfait aux conditions (1), (2) et (3), où C est une constante convenable, indépendante de ε, f et b.

4.2. Deuxième étape. Pour obtenir le théorème lorsque $a = 0$, nous rappelons que tout ensemble de Sidon Λ de Γ est une réunion finie d'ensembles de Sidon $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ dont le pas tend vers l'infini ([1], corollaire du lemme 6.2).

Posons $H = K + K - K + \bar{B}_{1/2}$. On constate que K est contenu dans H et que la propriété suivante est vérifiée: si λ et λ' sont deux points distincts de Λ et si $d(\lambda + K, \lambda' + K) < 1/2$, alors $\lambda + K \subset \lambda' + H$. Ce choix de H va nous permettre d'obtenir la deuxième étape à partir de la première, appliquée à des parties convenables de Λ.

Comme le pas de chaque Λ_i tend vers l'infini, il existe une partie finie Λ_i^0 de Λ_i telle que

$$\inf\{d(\lambda + H, \lambda' + H), \lambda, \lambda' \in \Lambda_i \setminus \Lambda_i^0, \lambda \neq \lambda'\} \geqslant 1/2 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

L'ensemble $\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0$ et le compact H satisfont la condition supplémentaire de 4.1 (avec $a = 1/2$), donc étant donnés f, b et ε selon l'hypothèse du théorème, il existe $\Phi_i \in B(\Gamma)$ satisfaisant à (1) et telle que

$$\Phi_i(\gamma) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_i \setminus \Lambda_i^0} b(\lambda) f(\gamma - \lambda), & \gamma \in (\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) + K, \\ 0, & \gamma \in (\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) + (H \setminus K), \end{cases}$$

$$|\Phi_i(\gamma)| \leqslant \varepsilon \|f\|_{A(\Gamma)} \|b\|_\infty, \quad \gamma \in \Gamma \setminus \big((\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) + H\big).$$

Notons $\Lambda_i^j = \{\lambda \in \Lambda_j \setminus \Lambda_j^0,\ \lambda + K \not\subset (\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) + H\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Alors, d'après le choix de H,

$$\inf\{d(\lambda + K, \lambda' + K),\ \lambda, \lambda' \in (\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) \cup \Lambda_i^j,\ \lambda \neq \lambda'\} \geqslant 1/2.$$

L'ensemble $(\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) \cup \Lambda_i^j$ et le compact K satisfont aussi l'hypothèse supplémentaire de 4.1, d'où l'existence de $C' > 0$ et de Φ_i^j dans $B(\Gamma)$ telle que $\|\Phi_i^j\|_{B(\Gamma)} \leqslant C'$,

$$\Phi_i^j(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in (\Lambda_i \setminus \Lambda_i^0) + K, \\ 0, & \gamma \in \Lambda_i^j + K, \end{cases}$$

$$|\Phi_i^j(\gamma)| \leqslant m^{-(m-1)^{-1}} \quad \text{ailleurs}.$$

Posons

$$\Psi_i = \Phi_i \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} \Phi_i^j, \quad \Psi = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \Psi_i, \quad \Lambda_0 = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \Lambda_i^0.$$

La fonction Ψ satisfait aux conditions voulues, pour λ dans $\Lambda \setminus \Lambda_0$. D'après 4.1 appliqué à l'ensemble fini Λ_0 et au compact K, on peut déterminer une fonction Ψ_0 de $B(\Gamma)$ remplissant les conditions exigées pour λ dans Λ_0. Etant donné que

$$d\big(\Lambda_0 + K, (\Lambda \setminus \Lambda_0) + K\big) > 0,$$

on peut trouver g dans $A(\Gamma)$ telle que $g(\gamma) = 1$ si $\gamma \in \Lambda_0 + K$, $g(\gamma) = 0$ si $\gamma \in (\Lambda \setminus \Lambda_0) + K$ et $0 \leqslant g(\gamma) \leqslant 1$ pour tout γ dans Γ. La fonction $\Phi = g\Psi_0 + (1-g)\Psi$ remplit alors toutes les conditions requises.

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Déchamps-Gondim, *Ensembles de Sidon topologiques*, Annales de l'Institut Fourier 22 (1972), p. 51-79.
[2] S. W. Drury, *Sur les ensembles de Sidon*, Comptes Rendus 271 (1970), p. 162.
[3] Y. Meyer, *Elargissement des ensembles de Sidon sur la droite*, Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay, 1967-1968, Exposé № 2.
[4] — *Algebraic numbers and harmonic analysis*, Amsterdam - London 1972.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1972