COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XX 1969 FASC. 1

SUR UNE CLASSE DE PARTIES ÉVITABLES

PAR

D. ROTENBERG (PARIS)

Le but de cet article est d'améliorer un résultat de P. Erdös et S. Hartman sur les parties évitables ([1]) en donnant une solution de leur problème P 594.

Dans la suite on considérera une partie infinie A de l'ensemble des entiers positifs N. On notera par $D(A)$ l'ensemble des différences, prises en valeur absolue, de deux éléments distincts de A. On dira qu'une partie B de $D(A)$ est *évitable* s'il existe une partie infinie A' de A telle que $D(A')$ soit disjoint de B. On rappelle qu'une partie L de l'ensemble des entiers positifs est dite *lacunaire* (pour l'ensemble des entiers positifs) si ou bien L est finie, ou bien les éléments de L étant ordonnés en une suite croissante, la suite des différences, prises en valeur absolue, d'éléments consécutifs tend vers l'infini.

On va démontrer que toute partie B de $D(A)$ lacunaire pour l'ensemble des entiers positifs est évitable; la démonstration donnera en plus une construction de proche en proche de l'ensemble évitant A'. Pour cela on aura besoin de la propriété de A énoncée dans la proposition suivante.

Pour tout élément a_0 de A, on notera par $d(a_0, A, B)$ l'ensemble des éléments de A distincts de a_0, dont la différence avec a_0, prise en valeur absolue, n'est pas un élément de B; c'est-à-dire,

$$d(a_0, A, B) = A - \{a_0\} - \{a \in A:\ |a - a_0| \in B\}.$$

PROPOSITION. *Si B est lacunaire pour l'ensemble des entiers positifs, il existe alors un élément a_0 de A tel que $d(a_0, A, B)$ soit infini.*

On remarque que d'une manière générale:

1. si l'un des deux ensembles $d(a_0, A, B)$ et $\{a \in A:\ |a - a_0| \in B\}$ est fini, l'autre est nécessairement infini;

([1]) P. Erdös and S. Hartman, *On sequences of distances of a sequence*, Colloquium Mathematicum 17 (1967), p. 191-193.

2. pour tout couple d'éléments distincts de A, soit a_0, a_0', les deux ensembles $\{|a-a_0|:\ a\in A\}$ et le translaté

$$\{|a-a_0'|+(a_0'-a_0):\ a\in A\} = \{|a-a_0'|:\ a\in A\}+\{(a_0'-a_0)\}$$

ne diffèrent que par un nombre fini d'éléments;

3. pour tout ensemble L et pour tout entier non-nul k, l'intersection des deux ensembles L et la translaté $L+\{k\}$ est fini.

D'après ces trois remarques et l'hypothèse, s'il existe un élément a_0 de A tel que $d(a_0, A, B)$ soit fini, pour tout autre élément a_0' de A, $d(a_0', A, B)$ est infini.

THÉORÈME. *Pour toute partie infinie A de l'ensemble des entiers positifs, toute partie B de $D(A)$ lacunaire pour l'ensemble des entiers positifs est évitable.*

En effet, posons $A_0 = A$, $A_0' = \emptyset$ (l'ensemble vide). A_0 et A_0' ont respectivement les propriétés suivantes: A_0 est une partie infinie de l'ensemble des entiers positifs, A_0' est une partie de A telle que $D(A_0')$ soit disjoint de B.

Pour tout entier strictement positif n, on suppose construits A_{n-1} et A_{n-1}' possédant les propriétés de A_0 et A_0' respectivement.

On définit A_n et A_n' de la manière suivante: soit a_{n-1}' un élément de A_{n-1} tel que $d\big(a_{n-1}', A_{n-1}, B\cap D(A_{n-1})\big) = A_n$ soit infini.

On pose

$$A_n' = A_{n-1}' \cup \{a_{n-1}'\} = \bigcup_{m=1}^{n} a_{m-1}'.$$

On vérifie aisément que les hypothèses de récurrence sont satisfaites, et que A_n' contient n éléments, dont ceux de A_{n-1}'. On pose

$$A' = \bigcup_{n\in N} A_n' = \bigcup_{m\geqslant 1} a_{m-1}';$$

A' est visiblement une partie infinie de A et par construction $D(A')$ est disjoint de B; c'est-à-dire, B est évitable, c.q.f.d.

Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1967