COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXI 1974 FASC. 1

ÜBER DIE n-TE TOTALE ABSOLUTKRÜMMUNG DER ORDNUNG β EINER IMMERSION

VON

TH. FRIEDRICH (WROCŁAW)

1. Einleitung. In dieser Arbeit zeigen wir, daß jede kompakte Mannigfaltigkeit eine Immersion in den euklidischen Raum besitzt, die beliebig kleine n-te totale Absolutkrümmung der Ordnung $\beta > 1$ im Sinne von Chen [1] hat.

Es sei $f\colon M^n \to E^{n+N}$ eine Immersion der kompakten, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n in den $(n+N)$-dimensionalen euklidischen Raum. Mit (N^1, π^1, M^n) bezeichnen wir das Einheitsnormalenbündel der Immersion f und $\nu^1\colon N^1 \to S^{n+N-1}$ sei die Gaußsche Normalenabbildung. N^1 ist eine orientierte, $(n+N-1)$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem Volumenelement μ^1. Sind $k_1, \ldots, k_n$ die Hauptkrümmungen der Immersion, so ist die a-te Krümmung durch

$$\binom{n}{a} K_a = \sum_{i_1 < \ldots < i_a} k_{i_1} \ldots k_{i_a} \quad \text{mit} \binom{n}{a} = \frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

definiert. K_1 und K_n sind entsprechend der mittleren und der Killing-Lipschitz-Krümmung gleich. Ist $d\Sigma_{n+N-1}$ das Volumenelement der Einheitssphäre S^{n+N-1}, so gilt $K_n \mu^1 = (\nu^1)^* d\Sigma_{n+N-1}$ (Einzelheiten siehe [1] und [2]).

Chen [1] definierte die a-te totale Absolutkrümmung der Ordnung β einer Immersion $f\colon M^n \to E^{n+N}$ durch

$$TA_a(f, \beta) = \frac{1}{C_{n+a\beta-1}} \int_{N^1} |K_a|^\beta \mu^1,$$

wobei C_m das Volumen von S^m ist, und bewies — ein Ergebniss von Willmore [4] und [5] verallgemeinernd — daß für jede Immersion $TA_1(f, n) \geqslant 2$ gilt. Bezeichnet $\mu(M^n)$ die Morse-Zahl der kompakten Mannigfaltigkeit M^n, so zeigen die Ergebnisse Kuiper's (vgl. [2]), daß

$$\inf_{f \in \mathrm{Im}(M^n)} TA_n(f, 1) = \mu(M^n)$$

gilt, wobei $\mathrm{Im}(M^n)$ die Menge aller Immersionen der Mannigfaltigkeit M^n in einen euklidischen Raum sei.

2. Hilfssätze. β bezeichne eine Zahl größer als 1.

Ist D die Menge aller singulären Werte der Abbildung $\nu^1\colon N^1 \to S^{n+N-1}$, so definieren wir $A_f^\beta\colon S^{n+N-1} \to R$ durch

$$A_f^\beta(z) = \begin{cases} \sum\limits_{e \in (\nu^1)^{-1}(z)} |K_n(e)|^{\beta-1} & \text{für } z \notin D, \\ 0 & \text{für } z \in D. \end{cases}$$

Die Funktion A_f^β ist korrekt definiert, weil $(\nu^1)^{-1}(z)$ für $z \notin D$ eine endliche Menge ist. Aus dem Satz von Sard folgt, daß D eine Nullmenge der Sphäre ist.

Für $e \in (\nu^1)^{-1}(z)$ und $z \notin D$ sei

$$\varepsilon(e) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \nu^1 \text{ die Orientation in } e \text{ erhält}, \\ -1 & \text{falls } \nu^1 \text{ die Orientation in } e \text{ umkehrt}. \end{cases}$$

HILFSSATZ 1. *Es gilt*

$$\int_{N^1} |K_n|^\beta \mu^1 = \int_{S^{n+N-1}} A_f^\beta(z)\, d\Sigma_{n+N-1}.$$

Beweis. Wir haben

$$\int_{N^1} |K_n|^\beta \mu^1 = \int_{N^1} |K_n|^{\beta-1} (\operatorname{sgn} K_n)(\nu^1)^* d\Sigma_{n+N-1}.$$

Wenden wir auf das letzte Integral den Satz von Fubini an (vgl. [3]), so erhalten wir

$$\int_{N^1} |K_n|^\beta \mu^1 = \int_{S^{n+N-1}} F(z)\, d\Sigma_{n+N-1},$$

wobei

$$F(z) = \begin{cases} \sum\limits_{e \in (\nu^1)^{-1}(z)} |K_n(e)|^{\beta-1} \big(\operatorname{sgn} K_n(e)\big)\, \varepsilon(e) & \text{für } z \notin D, \\ 0 & \text{für } z \in D. \end{cases}$$

Aber $\operatorname{sgn} K_n(e) = \varepsilon(e)$. Damit gilt $F(z) = A_f^\beta(z)$ und die Behauptung ist bewiesen.

Mit Hilfe der Immersion f kann man auf M eine Riemannsche Metrik g_f induzieren.

Für $z \notin D$ ist $\langle z, f\rangle$ eine Morse-Funktion, wobei $\langle,\rangle$ das Skalarprodukt in E^{n+N} bezeichnet [2]. Ist p ein kritischer Punkt dieser Morse-Funktion, so sei $\operatorname{hess}_p \langle z, f\rangle$ die Hessesche Form im Punkt p.

HILFSSATZ 2. *Es sei $z \notin D$ und $p_1, \ldots, p_\varrho$ alle kritischen Punkte der Funktion $\langle z, f\rangle$. In jedem Tangentialraum $T_{p_i}M^n$ $(1 \leqslant i \leqslant \varrho)$ wählen wir eine orthonormale Basis v_i^a $(1 \leqslant a \leqslant n)$ bezüglich g_f aus. Dann gilt*

$$A_f^\beta(z) = \sum_{i=1}^{\varrho} \left|\det\left(\operatorname{hess}_{p_i}\langle z, f\rangle(v_i^a, v_i^b)\right)\right|^{\beta-1}.$$

Beweis. Ist $(\nu^1)^{-1}(z) = \{e_1, \ldots, e_\varrho\}$, so gilt [2] bei entsprechender Nummerierung $p_i = \pi^1(e_i)$. Ist l_{e_i} die zweite Fundamentalform der Immersion f in e_i, so gilt

$$K_n(e_i) = \det\left(l_{e_i}(v_i^a, v_i^b)\right).$$

Jedoch $l_{e_i} = -\operatorname{hess}_{p_i}\langle z, f\rangle$ [2], woraus

$$K_n(e_i) = (-1)^n \det\left(\operatorname{hess}_{p_i}\langle z, f\rangle(v_i^a, v_i^b)\right)$$

folgt.

Die Behauptung erhalten wir jetzt aus der Definition der Funktion A_f^β.

Ist $f\colon M^n \to E^{n+N}$ eine Immersion und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl, so ist $f_\lambda = \lambda f$ ebenfalls eine Immersion. Für die auf M^n induzierten Metriken gilt $g_{f_\lambda} = \lambda^2 g_f$.

HILFSSATZ 3. *Es gilt*

$$TA_n(f_\lambda, \beta) = \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} TA_n(f, \beta).$$

Beweis. Sind D und D_λ die Mengen der singulären Werte der Gaußschen Normalenabbildungen ν^1, ν_λ^1 für f und f_λ, so ist $\tilde{D} = D \cup D_\lambda$ eine Nullmenge in S^{n+N-1}. Demzufolge

$$TA_n(f_\lambda, \beta) = \frac{1}{C_{N+n\beta-1}} \int\limits_{S^{n+N-1}-\tilde{D}} A_{f_\lambda}^\beta d\Sigma_{n+N-1},$$

$$TA_n(f, \beta) = \frac{1}{C_{N+n\beta-1}} \int\limits_{S^{n+N-1}-\tilde{D}} A_f^\beta d\Sigma_{n+N-1}$$

und es genügt für $z \notin \tilde{D}$ die Formel

$$A_{f_\lambda}^\beta(z) = \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} A_f^\beta(z)$$

zu zeigen.

Ist z ein Element der Menge $S^{n+N-1} - \tilde{D}$, so haben die Morse-Funktionen $\langle z, f\rangle$ und $\langle z, f_\lambda\rangle$ die gleichen kritischen Punkte $p_1, \ldots, p_\varrho$. Wir wählen eine orthonormale Basis v_i^a bezüglich g_f in jedem der Tangentialräume $T_{p_i}M^n$ $(1 \leqslant i \leqslant \varrho)$ aus. Dann ist v_i^a/λ eine orthonormale Basis bezüglich g_{f_λ} in $T_{p_i}M^n$. Nach Hilfssatz 2 gilt

$$\begin{aligned} A^\beta_{f_\lambda}(z) &= \sum_{i=1}^{\varrho} \left|\det\left(\mathrm{hess}_{p_i}\langle z, f_\lambda\rangle\left(\frac{v_i^a}{\lambda}, \frac{v_i^b}{\lambda}\right)\right)\right|^{\beta-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\varrho} \left|\det\left(\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{hess}_{p_i}\langle z, f\rangle(v_i^a, v_i^b)\right)\right|^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} \sum_{i=1}^{\varrho} \left|\det\left(\mathrm{hess}_{p_i}\langle z, f\rangle(v_i^a, v_i^b)\right)\right|^{\beta-1} = \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} A_f^\beta(z). \end{aligned}$$

3. Folgerungen aus den Hilfssätzen. $\mathrm{Im}^N(M^n)$ sei die Menge der Immersionen $f\colon M^n \to E^{n+N}$.

SATZ. *Ist die Menge* $\mathrm{Im}^N(M^n)$ *nicht leer, so gilt für* $\beta > 1$

$$\inf\{TA_n(f, \beta)\colon f \in \mathrm{Im}^N(M^n)\} = 0.$$

Beweis. Natürlich ist das Infimum nicht negativ. Ist f ein Element aus $\mathrm{Im}^N(M^n)$, so $f_\lambda = \lambda f$ ebenfalls. Demzufolge

$$0 \leqslant \inf\{TA_n(f, \beta)\colon f \in \mathrm{Im}^N(M^n)\} \leqslant TA_n(f_\lambda, \beta) = \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} TA_n(f, \beta)$$

für jedes $\lambda > 0$. M ist kompakt, also $TA_n(f, \beta) < +\infty$.
Daher gilt

$$0 \leqslant \inf\{TA_n(f, \beta)\colon f \in \mathrm{Im}^N(M^n)\} \leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda^{n(\beta-1)}} TA_n(f, \beta) = 0.$$

FOLGERUNG. *Es sei* M *eine kompakte Mannigfaltigkeit und* $\beta > 1$. *Dann gilt*

$$\inf\{TA_n(f, \beta)\colon f \in \mathrm{Im}(M^n)\} = 0.$$

LITERATURNACHWEIS

[1] B. Y. Chen, *On the total curvature of immersed manifolds I: an inequality of Fenchel-Borsuk-Willmore*, American Journal of Mathematics 93 (1971), S. 142-153.

[2] D. Ferus, *Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -Topologie*, Lecture Notes (1968).

[3] R. Sulanke und P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Berlin 1972.

[4] T. J. Willmore, *Note on embedded surface*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi, Secţinnea I a Matematică, 11 (1965), S. 493-496.

[5] — *Mean curvature of immersed surface*, ibidem 14 (1968), S. 99-103.

Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1973