COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIII 1975 FASC. 2

SUR LES FONCTIONS DONT L'ENSEMBLE DES POINTS DE CONTINUITÉ EST À LA FOIS FRONTIÈRE ET DENSE

PAR

F. M. FILIPCZAK (ŁÓDŹ)

Les fonctions considérées dans ce travail sont supposées réelles, finies et définies dans l'intervalle ouvert $I = (0, 1)$. Les relations seront étudiées entre les ensembles des points de discontinuité, ceux où il existe une dérivée infinie et ceux où il n'existe pas de dérivée unilatérale de ces fonctions. Les relations en question seront souvent établies pour des fonctions dont l'ensemble des points de continuité est en même temps frontière et dense dans I. Ces fonctions seront appelées ***du type a***. Elles ont été étudiées par Marcus dans son travail [5]. Les théorèmes qui vont être établis donnent réponse à 22 sur 30 problèmes dus à lui et cités ici. Ils ont été discutés au séminaire dirigé par le Professeur J. S. Lipiński.

1. Notations.

$f^-(x)$ et $f^+(x)$ — dérivées à gauche et à droite respectivement de la fonction f au point x.

$\underline{f}(x)$ et $\bar{f}(x)$ — dérivées inférieure et supérieure respectivement de la fonction f au point x.

$\underline{f}^-(x)$, $\bar{f}^-(x)$, $\underline{f}^+(x)$ et $\bar{f}^+(x)$ — dérivées de Dini de la fonction f au point x: inférieure à gauche, supérieure à gauche, inférieure à droite et supérieure à droite.

A_f — ensemble de tous les points ***de structure asymétrique*** de la fonction f, c'est-à-dire pour lesquels l'ensemble des limites partielles à gauche de la fonction f en tel point x ne coïncide pas avec celui de ses limites partielles à droite au même point.

C_f et D_f — ensemble de tous les points de continuité et de discontinuité respectivement de la fonction f.

$\Delta_f(a)$ — ensemble de tous les points x où $f'(x) = a$ existe.

$\Delta_f = \bigcup_{-\infty<a<+\infty} \Delta_f(a)$.

$\Delta_f(\infty) = \Delta_f(-\infty) \cup \Delta_f(+\infty)$.

$\Delta_f^* = \Delta_f \cup \Delta_f(\infty)$.

M_f — ensemble de tous les points x où il n'existe $f^-(x)$ finie ni infinie, pas plus que $f^+(x)$.

CI — famille de tous les sous-ensembles de l'intervalle I qui sont de puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$.

$d(E)$ — diamètre de l'ensemble E, c'est-à-dire le nombre $\sup\{|x-y|: x, y \in E\}$.

$\bar{E}$ — fermeture de l'ensemble E.

Tous les ensembles considérés sont supposés contenus dans l'intervalle I.

2. Problèmes de Marcus (voir [5]).

1. Existe-t-il une fonction f du type α telle que la dérivée de f existe et soit infinie en chaque point de continuité?

2. Si la réponse au problème précédent est négative, existe-t-il une fonction f du type α et telle que la dérivée de f existe — finie ou infinie — en chaque point de continuité?

3. Existe-t-il une fonction f du type α, telle que les ensembles $C_f \cap M_f$, Δ_f et $\Delta_f(\infty)$ soient partout denses?

4. Existe-t-il une fonction f du type α, telle que D_f soit indénombrable sur chaque intervalle et les ensembles $C_f \cap M_f$ et Δ_f soient de mesure positive sur chaque intervalle?

6. Soit β tel que $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Existe-t-il une fonction f du type α telle que Δ_f soit de mesure β et $C_f \cap M_f$ et $\Delta_f(\infty)$ soient partout denses?

Soit D un ensemble de première catégorie et du type F_σ.

8. Existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, tandis que Δ_f et $C_f \setminus \Delta_f^*$ soient partout denses?

9. Existe-t-il une fonction telle que $D_f = D$, $\Delta_f(\infty)$ soit dense et $\Delta_f(\infty) \subset C_f$?

10. Si la réponse au problème 9 est affirmative, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$ et $\Delta_f^* = C_f$?

11. Existe-t-il une fonction telle que $D_f = D$, tandis que $C_f \cap M_f$ et $\Delta_f(\infty)$ soient partout denses?

12. Existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, tandis que $C_f \cap M_f$ et Δ_f soient de mesure positive sur chaque intervalle?

13. Soit β la mesure de $D \subset I$ et soit γ positif et $\leqslant 1-\beta$. Existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, Δ_f soit de mesure γ et $C_f \cap M_f$ soit partout dense sur I?

15. Existe-t-il une fonction f monotone du type α, telle que $C_f \setminus \Delta_f = \Delta_f(\infty) \cup M_f$?

Soit B un ensemble de mesure nulle, du type G_δ.

16. Existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f(\infty) = B$?

17. Si la réponse au problème 16 est affirmative, existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f(\infty) = B$ et que Δ_f soit partout dense?

18. Si la réponse au problème 16 est affirmative, existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f(\infty) = B$ et $C_f \supset M_f$?

Soit A un ensemble de première catégorie et du type F_σ.

20. Existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f = A$?

Soient A et D des ensembles de première catégorie et du type F_σ, B un ensemble de mesure nulle et du type G_δ, $A \cap B = A \cap D = B \cap D = \emptyset$.

22. Existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$ et $\Delta_f(\infty) = B$?

23. Existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$ et $\Delta_f = A$?

24. Existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f = A$ et $\Delta_f(\infty) = B$?

25. Si les réponses aux problèmes 22, 23 et 24 sont affirmatives, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, $\Delta_f = A$ et $\Delta_f(\infty) = B$?

26. Si la réponse au problème 22 est affirmative, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $C_f \cap M_f$ soit partout dense?

27. Si la réponse au problème 23 est affirmative, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, $\Delta_f = A$ et $\Delta_f(\infty)$ et $C_f \cap M_f$ soient partout denses?

28. Si la réponse au problème 24 est affirmative, existe-t-il une fonction f du type a, telle que $\Delta_f = A$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $C_f \cap M_f$ soit partout dense?

29. Si la réponse au problème 25 est affirmative, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, $\Delta_f = A$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $C_f = \Delta_f^* \cup M_f$?

30. Si la réponse au problème 29 est affirmative, existe-t-il une fonction f telle que $D_f = D$, $\Delta_f = A$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $C_f = \Delta_f^*$?

3. Solutions. La réponse au problème 1 est négative en vertu du théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la fonction f admet une dérivée infinie en tout point de continuité, l'ensemble C_f est non dense et la fonction f n'est pas du type a.*

Démonstration. Rappelons le théorème suivant ([1], théorème 1, p. 76):

(1) *Si $D_f \in CI$, Δ_f^* est de première catégorie.*

On a $C_f \subset \Delta_f(\infty)$ par hypothèse. Vu que $|\Delta_f(\infty)| = 0$ (voir [6], p. 252-253) l'ensemble D_f est de mesure pleine dans I. Il résulte de (1) que Δ_f^* est de première catégorie et, en tenant compte de ce que $C_f \subset \Delta_f^*$ et $C_f \in G_\delta$, on a la thèse du théorème.

Si $C = C_f$ pour une fonction f admettant une dérivée infinie en tout point de continuité, on a $|C| = 0$ et $C \epsilon G_\delta$. Ces conditions et celle du théorème 1 ne sont pas suffisantes pour l'existence d'une fonction f telle que $C = C_f \subset \Delta_f(\infty)$, comme le montre l'exemple E qui va suivre.

Les conditions équivalentes à l'égalité $C = C_f = \Delta_f(\infty)$ seront établies dans le théorème 2.

Soient E un ensemble parfait de mesure nulle (l'ensemble de Cantor par exemple) et C un sous-ensemble de E tel que $C \epsilon G_\delta$, que C et $E \setminus C$ soient de puissance du continu dans toute portion de l'ensemble E, c'est-à-dire dans tout ensemble de la forme $\langle a, b\rangle \cap E$ où $(a, b) \cap E \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe une fonction f telle que $C = C_f \subset \Delta_f(\infty)$. En vertu de [2] (théorème 2, p. 77), on a alors $C = F \setminus G$ où $F \epsilon F_\sigma \cap G_\delta$ et G est un ensemble au plus dénombrable. On peut évidemment admettre que $F \cup G \subset E$. Alors l'ensemble F, étant un G_δ dense dans E, est résiduel dans E; étant un F_σ il contient donc une portion de l'ensemble E, soit $\langle a, b\rangle \cap E$. L'ensemble $\langle a, b\rangle \cap (E \setminus C) = \langle a, b\rangle \cap G$ est donc au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse que $E \setminus C$ est de puissance du continu sur toute portion de l'ensemble E.

THÉORÈME 2. *Si $C = C_f$ pour une fonction f admettant une dérivée infinie en tout point de continuité, on a*

$$|C| = 0 \quad \textit{et} \quad C = F \setminus G, \tag{2}$$

où $F \epsilon F_\sigma \cap G_\delta$ et G est un ensemble au plus dénombrable. Inversement, si l'ensemble C satisfait à (2), *il existe une fonction f telle que $C = C_f = \Delta_f(\infty)$.*

Démonstration. La première partie du théorème résulte du théorème de Denjoy-Young-Saks (voir [7], p. 421-422) et du théorème 2 de mon travail [2]. La démonstration de la seconde partie sera basée sur le théorème suivant ([2], théorème 1, p. 72):

Si les ensembles A, C, E et F satisfont aux conditions $A \subset C \subset E \subset F$, $A \epsilon F_\sigma$, $F \epsilon F_\sigma \cap G_\delta$, $|F \setminus A| = 0$ et l'ensemble $F \setminus C$ est au plus dénombrable, il existe une fonction f telle que $\Delta_f = A$, $C_f = C$ et $\Delta_f^* = E$.

Il suffit d'y poser $A = \emptyset$ et $E = C$ pour avoir $\Delta_f(\infty) = \Delta_f^* = C_f = C$.

THÉORÈME 3. *Si $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, il existe une fonction f telle que D_f est dénombrable et dense dans I, $|\Delta_f| = \beta$ et chacun des ensembles Δ_f, $\Delta_f(\infty)$ et M_f est de puissance du continu dans tout sous-intervalle de I. De plus, si $\beta > 0$, on a $|\Delta_f \cap J| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas $0 < \beta \leqslant 1$. Soient A, B, C, D et E des ensembles satisfaisant aux conditions $D \subset B \subset A \cap C$, $A \cap E = C \cap E = \emptyset$, $A \epsilon F_\sigma$, $|A| = \beta$, $|A \cap J| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$, $B \epsilon F_\sigma \cap CI$, $C \epsilon G_\delta$, $|C| = 0$, D dénombrable et dense dans I et

$E \in F_\sigma \cap CI$. En vertu d'un théorème de Lipiński [3], il existe une fonction φ telle que

$$D_\varphi = D, \quad \Delta_\varphi = I \setminus C \quad \text{et} \quad \Delta_\varphi(\infty) = C,$$

et, en vertu de [8], il existe une fonction continue ψ telle que

$$\Delta_\psi = A \quad \text{et} \quad M_\psi = I \setminus A.$$

En posant $f = \varphi + \psi$, il vient

$$D_f = D_\varphi = D, \quad \Delta_f \supset \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi = A \setminus C,$$
$$\Delta_f(\infty) \supset \Delta_\varphi(\infty) \cap \Delta_\psi = A \cap C \supset B,$$
$$M_f \supset \Delta_\varphi \cap M_\psi = I \setminus (A \setminus C) \supset E, \quad \Delta_f \subset A \cup C,$$
$$|\Delta_f| = |A| = \beta \quad \text{et} \quad |\Delta_f \cap J| > 0$$

pour tout intervalle $J \subset I$. De plus, les ensembles Δ_f, $\Delta_f(\infty)$ et M_f sont de puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$, puisque leurs sous-ensembles $A \setminus C$, B et E le sont.

Considérons maintenant le cas $\beta = 0$. Soient A, B, C et D des ensembles satisfaisant aux conditions $A \cap B = A \cap D = \emptyset$, $A \cup B \cup D \subset C$, $A \in F_\sigma \cap CI$, $B \in F_\sigma \cap CI$, $C \in G_\delta$, $|C| = 0$, D étant dénombrable et dense dans I. Puisque $C \setminus A \in G_\delta$, $|C \setminus A| = 0$ et $D \subset C \setminus A$, il existe, en vertu des théorèmes de [3] et [8] mentionnés dans la première partie de la démonstration, des fonctions φ et ψ telles que

$$D_\varphi = D, \quad \Delta_\varphi(\infty) = C \setminus A, \quad \Delta_\varphi = I \setminus (C \setminus A),$$
$$\Delta_\psi = A \cup B, \quad M_\psi = I \setminus (A \cup B) \quad \text{et} \quad C_\psi = I.$$

La fonction $f = \varphi + \psi$ satisfait aux relations

$$D_f = D, \quad \Delta_f(\infty) \supset B, \quad M_f \supset I \setminus C \quad \text{et} \quad A \subset \Delta_f \subset C$$

qui entraînent la thèse du théorème dans le cas où $\beta = 0$.

Il s'ensuit du théorème 3 que les réponses aux questions 3 et 6 de Marcus sont affirmatives. Il en est de même de la question 2. Cela résulte de [3] (voir aussi [2], remarque 3, p. 78).

LEMME. *Les ensembles A et D étant disjoints de classe F_σ, il existe une fonction φ telle que*

(3) $$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \quad \textit{pour } x \in I,$$

(4) $$\liminf_{t \to x-} \varphi(t) < \varphi(x) > \liminf_{t \to x+} \varphi(t) \quad \textit{pour } x \in D,$$

(5) $$D_\varphi = \{x\colon \varphi(x) > 0\} = D,$$

(6) $$\Delta_\varphi(0) \supset A.$$

De plus, la fonction φ admet en tout point $x \in A$ une dérivée généralisée au sens de Peano d'ordre arbitraire.

Démonstration. Soient $B_0, B_1, B_2, \ldots$ des ensembles disjoints et denses dans I tels que

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Soient encore $a_0, a_1, \ldots$ et $a_{m,0}, a_{m,1}, \ldots$ $(m = 0, 1, \ldots)$ des suites de nombres satisfaisant aux conditions

$$0 < a_m < 1, \quad a_m \searrow 0, \quad a_m < a_{m,n} < a_{m-1} \quad \text{et} \quad a_{m,n} \underset{n}{\searrow} a_m.$$

On a par hypothèse

$$A = \bigcup_0^{\infty} A_m \quad \text{et} \quad D = \bigcup_0^{\infty} D_m$$

où $A_0 = D_0 = \emptyset$, A_m et D_m étant des ensembles fermés, $A_m \subset A_{m+1}$ et $D_m \subset D_{m+1}$ pour $m = 0, 1, \ldots$

Posons

$$\varrho(E, F) = \begin{cases} \inf\{|x-y| : x \in E,\ y \in F\} & \text{si } E \neq \emptyset \neq F, \\ 1 & \text{si } E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in I \setminus D, \\ a_{m,n}\varrho^m(A_m, D_m) & \text{pour } x \in B_n \cap (D_m \setminus D_{m-1}) \text{ et } m, n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

La fonction φ satisfait évidemment à l'inégalité (3). Afin de prouver (4), considérons un point quelconque $x_0 \in D$. Il existe, pour ce point, des nombres m et n tels que $x_0 \in B_n \cap (D_m \setminus D_{m-1})$. On a $\varphi(x_0) = a_{m,n}\varrho^m(A_m, D_m) > 0$, puisque la distance entre les ensembles fermés et disjoints A_m et D_m est positive. L'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, où $\delta = \varrho(x_0, D_{m-1}) > 0$, ne contient pas de points de l'ensemble D_{m-1}; donc

$$(7) \qquad I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I \setminus D_{m-1} = (I \setminus D) \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} (D_k \setminus D_{k-1}).$$

Extrayons de l'ensemble $B_{n+1} \cap (x_0 - \delta, x_0)$ une suite (y_l) convergente vers x_0. Vu que les points y_l appartiennent à l'ensemble $I \setminus D$ ou aux ensembles $D_k \setminus D_{k-1}$ pour certains $k \geqslant m$, on a

$$\varphi(y_l) = 0$$

ou bien

$$\varphi(y_l) = a_{k,n+1}\varrho^k(A_k, D_k) \leqslant a_{m,n+1}\varrho^m(A_m, D_m).$$

Il en résulte que

$$\varphi(y_l) \leqslant a_{m,n+1}\varrho^m(A_m, D_m)$$

et

$$\liminf_{t\to x_0-} \varphi(t) \leqslant \liminf_{l\to\infty} \varphi(y_l) \leqslant a_{m,n+1}\varrho^m(A_m, D_m) < \varphi(x_0).$$

D'une façon analogue, on conclut, pour la suite (z_l) extraite de l'ensemble $B_{n+1}\cap(x_0, x_0+\delta)$ et convergente vers x_0, que

$$\liminf_{t\to x_0+} \varphi(t) \leqslant \liminf_{l\to\infty} \varphi(z_l) < \varphi(x_0),$$

ce qui achève la démonstration de l'inégalité (4). Elle entraîne l'inclusion $D \subset D_\varphi$.

Pour établir (5), il suffit donc de prouver l'inclusion $I\setminus D \subset C_\varphi$. Supposons que $x_0 \in I\setminus D$. Soit ε un nombre positif quelconque. Choisissons m tel que $a_{m,0} \leqslant \varepsilon$. Comme $x_0 \notin D_k$ pour $k = 0, 1, \ldots$, on a $\delta = \varrho(x_0, D_{m-1}) > 0$ et (7), dont on tire l'inégalité

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant a_{m,0}\varrho^m(A_m, D_m) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$

ce qui implique la relation $x_0 \in C_\varphi$.

Pour tout point x de l'ensemble A, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h^r} = 0 \quad \text{où } r = 1, 2, \ldots$$

En effet, si r est un nombre naturel, il existe un $m > r$ tel que $x \in A_m$. Si $0 < |h| < \varrho(A_m, D_m)$, on a

$$x+h \in I\setminus D_m = (I\setminus D) \cup \bigcup_{m+1}^{\infty} (D_k\setminus D_{k-1})$$

et

$$\varphi(x+h)\begin{cases} = 0 & \text{si } x+h \in I\setminus D, \\ \leqslant \varrho^k(A_k, D_k) \leqslant \varrho^k(x+h, A_k) & \text{si } x+h \in D_k\setminus D_{k-1} \ (k > m). \end{cases}$$

De là on tire successivement

$$0 \leqslant \varphi(x+h) \leqslant \varrho^m(x+h, A_m) \leqslant \varrho^m(x+h, x) = |h|^m,$$

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h^r}\right| = \left|\frac{\varphi(x+h)}{h^r}\right| \leqslant |h|^{m-r}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h^r} = 0,$$

ce qui entraîne (6) et l'existence des dérivées généralisées (au sens de Peano) de tout ordre en tout point de l'ensemble A.

Remarque. La fonction φ définie dans le lemme est intégrable dans l'intervalle I (à condition que les ensembles B_n soient mesurables).

On peut la considérer comme une distribution. La distribution φ n'est pas une fonction continue lorsque $D \neq \emptyset$. Cependant, elle-même et chacune de ses dérivées $\varphi^{(r)}$ s'annulent en tout point $x \in A$. Cela résulte d'un théorème de Łojasiewicz [4].

THÉORÈME 4. *Pour des F_σ disjoints quelconques A et D, il existe une fonction f telle que*

(8) $$D_f = D, \quad \Delta_f = A \quad et \quad \Delta_f(\infty) \subset C_f.$$

De plus, si les ensembles A et D sont de première catégorie,

(9) *les ensembles $\Delta_f(\infty)$ et $C_f \cap M_f$ sont de puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$.*

Démonstration. Désignons par C un sous-ensemble F_σ de première catégorie de l'ensemble $I \setminus (A \cup D)$ tel que $|I \setminus (A \cup C \cup D)| = 0$. Si, en même temps, A et D sont de première catégorie, l'ensemble $I \setminus (A \cup C \cup D)$ est résiduel dans l'intervalle I et contient donc un ensemble $B \in F_\sigma \cap CI$. Dans le cas considéré, l'ensemble $I \setminus (A \cup B \cup C \cup D)$ en tant que résiduel dans I, contient un ensemble $E \in F_\sigma \cap CI$. Si au moins l'un des ensembles A et D est de seconde catégorie, posons $B = E = \emptyset$. Posons en outre

$$F = I \setminus (A \cup B \cup C \cup D \cup E).$$

Les ensembles $A \cup B \cup C \cup E$ et D étant des F_σ disjoints, il existe en vertu du lemme une fonction φ satisfaisant aux conditions (3)-(5) et à la suivante:

$$\Delta_\varphi \supset A \cup B \cup C \cup E.$$

Les ensembles $E \cup F$ et $C \cup E \cup F$ étant des G_δ, il existe évidemment un G_δ, soit G, de mesure nulle, contenu et dense dans $C \cup E \cup F$ et contenant $E \cup F$. Appliquons aux ensembles G et $C \cup E \cup F$ le théorème suivant de Zahorski (voir [8], théorème VII, p. 25):

(10) *Soient M et N des ensembles satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $M \in G_\delta$;

2° $N = N_1 \cup N_2$, *où* $N_1 \in G_\delta$, $N_2 \in G_{\delta\sigma}$ *et* $|N_2| = 0$;

3° *il existe un ensemble $M_1 \in G_\delta$ tel que $(M_1 \cap J) \setminus M$ est de puissance du continu pour tout intervalle $J \subset P$ où P est la somme de tous les intervalles ouverts sur lesquels M est de mesure pleine*;

4° $M \subset M_1 \subset N$;

5° *il existe un ensemble ouvert $Q \subset I \setminus \overline{M}$, dense dans $I \setminus \overline{M}$ et tel que* $|N \cap Q| = 0$.

Dans ces conditions il existe une fonction continue ψ ayant les propriétés suivantes:

$$\Delta_\psi = \Delta_\psi^* = I \setminus N;$$

$$\{x\colon \underline{\psi}^-(x) = \underline{\psi}^+(x) = -\infty \textit{ et } \overline{\psi}^-(x) = \overline{\psi}^+(x) = +\infty\} = M;$$

il existe pour tout $x \in (N \cap P) \setminus M$ au plus une dérivée unilatérale;

$$M_\psi \supset (N \setminus P) \setminus M.$$

Si $N \cap Q = \emptyset$ et $N \in G_\delta$, la fonction ψ satisfait de plus à la condition

$$\{x\colon \underline{\psi}^-(x) = -\infty,\ \overline{\psi}^+(x) = +\infty \textit{ et } \overline{\psi}^-(x) = \underline{\psi}^+(x) \neq \pm\infty\} \cup$$
$$\cup \{x\colon \overline{\psi}^-(x) = +\infty,\ \underline{\psi}^+(x) = -\infty \textit{ et } \underline{\psi}^-(x) = \overline{\psi}^+(x) \neq \pm\infty\} \supset$$
$$\supset (N \setminus P) \setminus M.$$

En posant dans ce théorème $M = G$ et $N = C \cup E \cup F$, on a $P = \emptyset$ et les ensembles $M_1 = M$ et $Q = I \setminus \overline{M}$ satisfont aux conditions 1°-5°. Il existe donc une fonction continue ψ telle que

$$\Delta_\psi = A \cup B \cup D,$$

$$\{x\colon \underline{\psi}^-(x) = \underline{\psi}^+(x) = -\infty \text{ et } \overline{\psi}^-(x) = \overline{\psi}^+(x) = +\infty\} = G \supset E \cup F,$$

$$M_\psi = C \cup E \cup F.$$

D'après [11], il existe une fonction croissante χ telle que

$$\Delta_\chi = A \cup C \cup D \cup E \quad \text{et} \quad \Delta_\chi(\infty) = B \cup F.$$

Définissons maintenant la fonction f comme il suit:

$$f = \varphi + \psi + \chi.$$

Elle a les propriétés

$$(11) \qquad \begin{aligned} &D_f = D_\varphi = D, \qquad \Delta_f \supset \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \Delta_\chi \supset A, \\ &\Delta_f(\infty) \supset \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi \cap \Delta_\chi(\infty) \supset B \quad \text{et} \quad M_f \supset \Delta_\varphi \cap M_\psi \cap \Delta_\chi \supset C \cup E \end{aligned}$$

dont la première est celle des égalités (8). Pour établir la seconde égalité (8), considérons un point quelconque $x \in F$. Ce point n'appartient pas à l'ensemble D; on a donc $\underline{\varphi}^+(x) \geqslant 0$ en vertu de (3) et (5). De plus $\overline{\psi}^+(x) = +\infty$ et $\chi'(x) = +\infty$, d'où $\overline{f}^+(x) = +\infty$ et $x \notin \Delta_f$. Il est ainsi démontré que $F \cap \Delta_f = \emptyset$, ce qui entraîne $\Delta_f = A$ en vertu des propriétés (11).

La troisième des formules (8) résulte des égalités

$$\overline{f}^-(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \underline{f}^+(x) = -\infty \quad \text{pour } x \in D$$

que l'on déduit facilement de l'inégalité (4) et de l'inclusion $D \subset \Delta_\psi \cap \Delta_\chi$.

Les relations (8) sont ainsi établies. Les relations (9), dans le cas où les ensembles A et B sont de première catégorie, résultent de l'inclusion (11) et de la définition des ensembles B et E.

COROLLAIRE 1. *Si l'ensemble D est un F_σ de première catégorie, il existe une fonction f telle que $D_f = D$ et que les ensembles Δ_f, $\Delta_f(\infty)$ et $C_f \cap M_f$ sont denses dans I et de puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$.*

Ce corollaire résulte du théorème 4, en y choisissant l'ensemble A de manière à avoir $A \in F_\sigma \cap CI$, A — de première catégorie et $A \cap D = \emptyset$.

COROLLAIRE 2. *Si l'ensemble A est un F_σ de première catégorie, il existe une fonction f du type a telle que $\Delta_f = A$.*

Pour déduire ce corollaire du théorème 4, il suffit, l'ensemble A étant donné, de choisir l'ensemble $D \in F_\sigma$ de façon que $D \subset I \setminus A$ soit à la fois dense et frontière dans I.

Le corollaire 1 est une réponse positive aux problèmes 8 et 11. Le corollaire 2 l'est au problème 20. Le théorème 4 entraîne directement des réponses positives aux problèmes 9, 23 et 27. La réponse positive au problème 13 résulte du théorème 4 en y choisissant l'ensemble A de première catégorie et tel que $|A| = \gamma$. Le problème 12 n'admet une réponse positive que si l'ensemble $I \setminus D$ est de mesure positive sur tout intervalle $J \subset I$. On peut alors établir le

THÉORÈME 5. *Lorsque l'ensemble D est un F_σ et que l'on a $|J \setminus D| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$, il existe une fonction f satisfaisant aux conditions*

$D_f = D$;

$|\Delta_f \cap J| > 0$ et $|C_f \cap M_f \cap J| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$;

$\Delta_f(\infty)$ est de la puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$.

Démonstration. Soit $C \subset I \setminus D$ un F_σ frontière dans I et de même mesure que l'ensemble $I \setminus D$. Nous allons prouver qu'il existe un F_σ, soit $A \subset C$, tel que $|A \cap J| > 0$ et $|(C \setminus A) \cap J| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$. Représentons pour cela l'ensemble C sous la forme

$$C = \bigcup_1^\infty C_n,$$

où C_n sont des ensembles fermés, non denses, disjoints et tels que

$$\lim_{n\to\infty} d(C_n) = 0.$$

Les ensembles fermés non denses C_n peuvent être représentés sous la forme $C_n = A_n \cup B_n$ où A_n et B_n sont fermés, $A_n \cap B_n = \emptyset$ et $|A_n| \cdot |B_n| > 0$ si $|C_n| > 0$. L'ensemble

$$A = \bigcup_1^\infty A_n$$

a alors les propriétés requises.

Les ensembles A et D étant des F_σ disjoints et de première catégorie, il existe, en vertu du théorème 4, une fonction f satisfaisant aux conditions (8) et (9). En outre, on a $|\Delta_f \cap J| = |A \cap J| > 0$ pour tout intervalle $J \subset I$. Il résulte du théorème de Denjoy-Young-Saks (voir [7], p. 421-422) que presque chaque point de l'ensemble $C_f \setminus \Delta_f$ appartient à M_f, d'où, en tenant compte de (8),

$$|C_f \cap M_f \cap J| = |(J \setminus D) \setminus A| = |(C \setminus A) \cap J| > 0$$

pour tout intervalle $J \subset I$.

COROLLAIRE 3. *Il existe une fonction f du type a telle que D_f est de puissance du continu dans tout intervalle $J \subset I$ et que les ensembles Δ_f et $C_f \cap M_f$ sont de mesure positive sur tout intervalle $J \subset I$.*

En choisissant dans le théorème 5 l'ensemble D tel que $D \in F_\sigma \cap CI$ et $|D| = 0$, la fonction f satisfait bien au corollaire 3, ce qui apporte la réponse affirmative au problème 4 de Marcus.

Quant à son problème 10, remarquons que si $D \in F_\sigma \cap CI$ et si l'ensemble D est de première catégorie et la fonction f satisfait à la condition $D_f = D$, l'ensemble Δ_f^* est, en vertu de (1), de première catégorie, tandis que l'ensemble C_f est résiduel dans I et par suite différent de Δ_f^*. Cela montre que la réponse au problème 10 de Marcus est négative. Plus généralement, il résulte des théorèmes 1 et 2 de mon travail [2] que

La condition $D = D_f$ pour une fonction satisfaisant à la condition $C_f = \Delta_f^*$ équivaut à la condition $D = K \cup P$ où $K \in F_\sigma \cap G_\delta$ et P est un ensemble au plus dénombrable.

THÉORÈME 6. *Il existe une fonction monotone du type a telle que $C_f = \Delta_f^*$.*

Ce théorème résulte du lemme 6 de mon travail [2].

Pour une fonction monotone f, l'ensemble $D_f \cap M_f$ étant vide, le théorème 6 entraîne la réponse affirmative au problème 15 de Marcus.

Le théorème suivant se rapporte à la caractérisation de l'ensemble M_f pour les fonctions monotones et les fonctions à variation bornée. Il entraîne, dans le cas où l'ensemble B est dense, des solutions affirmatives aux problèmes 16-18 du même auteur.

THÉORÈME 7. *Lorsque*

$$\underset{I}{\mathrm{Var}} f(x) < +\infty$$

(c'est-à-dire que la fonction f est à variation bornée dans tout intervalle $\langle a, b \rangle \subset I$), on a $M_f \in G_{\delta\sigma}$ et $|M_f| = 0$. Inversement, si les ensembles quelconques B, C et D satisfont aux conditions $B \in G_\delta$, $|B| = 0$, $C \in G_{\delta\sigma}$, $|C| = 0$, $B \supset D$ et $B \cap C = \emptyset$, où D est au plus dénombrable, il existe une fonction croissante f telle que $D_f = D$, $\Delta_f = I \setminus (B \cup C)$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $M_f = C$.

Démonstration. L'ensemble

$$C_f \cap M_f = \bigcup_{p<q} [C_f \cap \{x\colon \underline{f}^-(x) \leqslant p\} \cap \{x\colon \bar{f}^-(x) \geqslant q\}] \cap$$

$$\cap \bigcup_{p<q} [C_f \cap \{x\colon \underline{f}^+(x) \leqslant p\} \cap \{x\colon \bar{f}^+(x) \geqslant q\}],$$

où p et q sont des nombres rationnels quelconques, est, en vertu du lemme 8 de Zahorski [9], du type $G_{\delta\sigma}$. Vu que $D_f \cap M_f = \emptyset$ pour toute fonction f à variation bornée, on a $M_f \in G_{\delta\sigma}$ et $|M_f| = 0$ en vertu d'un théorème de Lebesgue. La première partie du théorème est ainsi établie.

Pour en établir la seconde, notons qu'il existe d'après [3] une fonction non décroissante φ telle que $D_\varphi = D$, $\Delta_\varphi(\infty) = B$ et $\Delta_\varphi = I \setminus B$, en même temps qu'il existe d'après [10] une fonction ψ satisfaisant à la condition de Lipschitz avec constante 1 et telle que $\Delta_\psi = I \setminus C$ et $M_\psi = C$. Posons

$$f(x) = 2x + \varphi(x) + \psi(x).$$

La fonction f est croissante et on a

$$D_f = D_\varphi = D, \qquad \Delta_f \supset \Delta_\varphi \cap \Delta_\psi = I \setminus (B \cup C),$$

$$\Delta_f(\infty) \supset \Delta_\varphi(\infty) \cap \Delta_\psi = B \quad \text{et} \quad M_f \supset \Delta_\varphi \cap M_\psi = C.$$

Les ensembles Δ_f, $\Delta_f(\infty)$ et M_f étant disjoints et la somme de leurs sous-ensembles $I \setminus (B \cup C)$, B et C remplissant l'intervalle I, on a $\Delta_f = I \setminus (B \cup C)$, $\Delta_f(\infty) = B$ et $M_f = C$.

Soient $D \in F_\sigma \cap CI$ un ensemble de première catégorie et $B \in G_\delta$ un ensemble de mesure nulle, dense dans I et disjoint de l'ensemble D. Pour toute fonction f telle que $D_f = D$, l'ensemble Δ_f^* est de première catégorie. L'ensemble B, résiduel dans I, ne peut donc être égal à l'ensemble $\Delta_f(\infty)$. Il en résulte que les réponses aux problèmes 22, 26, 29 et 30 de Marcus sont négatives.

Si, pour une fonction f, l'ensemble Δ_f est vide, tandis que l'ensemble $\Delta_f(\infty)$ est un G_δ résiduel dans I, l'ensemble $\Delta_f^* = \Delta_f(\infty)$ est de mesure nulle. En vertu du théorème 4 de mon travail [1], l'ensemble Δ_f^* est donc de première catégorie, contrairement à l'hypothèse que l'ensemble $\Delta_f(\infty)$ est résiduel dans I. Il en résulte que les réponses aux problèmes 24, 25 et 28-30 de Marcus sont négatives.

Le théorème suivant impose aux ensembles A, B et D des conditions supplémentaires sous lesquelles les réponses aux problèmes 22 et 25 de Marcus sont affirmatives.

THÉORÈME 8. *Pour des ensembles quelconques A, B, C et D satisfaisant aux conditions*

$$\begin{gathered} A, D \in F_\sigma, \quad B, C \in G_\delta, \quad |B| = |C \setminus D| = 0, \quad D \subset C, \\ A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset, \end{gathered} \tag{12}$$

(13) $$I \setminus (A \cup B) = G \cup H, \quad \textit{où } G \in G_\delta,\ H \in G_{\delta\sigma} \textit{ et } |H| = 0,$$

il existe une fonction f ayant les propriétés suivantes:

(14) $$\varDelta_f = A, \quad \varDelta_f(\infty) = B, \quad D_f = D, \quad M_f \supset I \setminus (A \cup B \cup C),$$

(15) $$\{x\colon \underline{f}(x) = -\infty \textit{ et } \bar{f}(x) = +\infty\} \supset C.$$

Démonstration. La fonction f sera définie sous forme de la somme de trois fonctions φ, ψ et χ (cf. la démonstration du théorème 4), dont la première, φ, satisfait aux conditions (3)-(5) du lemme et à la condition $\varDelta_\varphi \supset I \setminus C$.

Vu que $G \cup H = I \setminus (A \cup B) \supset C$, on peut supposer que $G \supset C$; sinon on remplacerait l'ensemble G par l'ensemble $G_1 = C \cup G$. Désignons par E un G_δ quelconque, de mesure nulle, sous-ensemble dense dans l'ensemble G et contenant l'ensemble $C \setminus D$. En vertu de (10), il existe pour les ensembles E et $I \setminus (A \cup B)$ une fonction ψ telle que

$$\varDelta_\psi = A \cup B, \quad M_\psi = I \setminus (A \cup B),$$

$$\{x\colon \underline{\psi}^-(x) = \underline{\psi}^+(x) = -\infty \text{ et } \bar{\psi}^-(x) = \bar{\psi}^+(x) = +\infty\} = E.$$

La fonction χ sera choisie de façon qu'elle soit continue et que l'on ait

$$\varDelta_\chi = I \setminus B \quad \text{et} \quad \varDelta_\chi(\infty) = B.$$

L'existence de la fonction χ qui satisfait à ces conditions résulte de [11]. Les fonctions φ, ψ et χ étant ainsi définies, leur somme f a les propriétés (14) et (15). On a en effet

(16) $$D_f = D, \quad \varDelta_f \supset A, \quad \varDelta_f(\infty) \supset B \quad \text{et} \quad M_f \supset I \setminus (A \cup B \cup C).$$

De plus, la condition (4) entraîne pour $x \in D$ les inégalités

$$\liminf_{t \to x-} f(t) < f(x) > \liminf_{t \to x+} f(t),$$

d'où $\bar{f}^-(x) = +\infty$ et $\underline{f}^-(x) = -\infty$. En même temps, pour $x \in C \setminus D \subset E$, on a $\bar{\varphi}^-(x) \leqslant 0$, $\underline{\varphi}^+(x) \geqslant 0$, $\underline{\psi}^-(x) = -\infty$, $\bar{\psi}^+(x) = +\infty$ et $\chi'(x) \neq \pm\infty$, d'où $\underline{f}^-(x) = -\infty$ et $\bar{f}^+(x) = +\infty$. On a donc

$$\{x\colon \underline{f}(x) = -\infty \text{ et } \bar{f}(x) = +\infty\} \supset C,$$

et, en tenant compte de (16), on obtient finalement $\varDelta_f = A$ et $\varDelta_f(\infty) = B$.

Remarque. La condition (13) est nécessaire pour que la conclusion du théorème 8 soit vraie, car, d'après le théorème IV de Zahorski [8], l'ensemble $I \setminus (A \cup B) = I \setminus \varDelta_f^*$ est de la forme $G \cup H$ où $G \in G_\delta$, $H \in G_{\delta\sigma}$ et $|H| = 0$.

TRAVAUX CITÉS

[1] F. M. Filipczak, *On the derivative of a discontinuous function*, Colloquium Mathematicum 13 (1964), p. 73-79.

[2] — *Sur la structure de l'ensemble des points de discontinuité des fonctions qui admettent une dérivée aux points de continuité*, Fundamenta Mathematicae 60 (1967), p. 59-79.

[3] J. S. Lipiński, *Sur quelques problèmes de S. Marcus relatifs à la dérivée d'une fonction monotone*, Revue de Mathématiques Pures et Appliquées, Académie de la République Populaire Roumaine, 8 (1963), p. 449-454.

[4] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, Studia Mathematica 16 (1957), p. 1-36.

[5] S. Marcus, *Sur les propriétés différentielles des fonctions dont les points de continuité forment un ensemble frontière partout dense*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3), 79, 1 (1958), p. 1-21.

[6] S. Saks, *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930.

[7] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, t. 1, Warszawa 1958.

[8] Z. Zahorski, *O zbiorze punktów nieróżniczkowalności funkcji dowolnej*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 21 (1950), p. 23-26.

[9] — *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society 69 (1950), p. 1-54.

[10] — *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 91.

[11] — *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist*, Tohôku Mathematical Journal 48 (1941), p. 321-330.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 29. 3. 1974