COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

INTERPOLATION PAR LES MESURES DIFFUSES

PAR

S. HARTMAN (WROCŁAW)

Soit G un groupe abélien compact et $\Gamma = \hat{G}$ son dual. Un ensemble $E \subset \Gamma$ est dit *de Sidon* si toute fonction bornée φ sur E peut être prolongée en la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ d'une mesure (complexe bornée) $\mu \in M(G)$. Drury [2] a prouvé que la réunion de deux ensembles de Sidon est de Sidon en resolvant ainsi un problème qui avait longtemps demeuré ouvert. Précisément, il a démontré le théorème suivant:

La fonction indicatrice d'un Sidon est approchable uniformément par une $\hat{\mu}$.

Le reste suit d'un théorème antérieur de Rudin ([6], p. 123) disant que E est de Sidon pourvu que l'algèbre $B(E)$ des restrictions $\hat{\mu}|_E$ $(\mu \in M(G))$ soit dense dans l'espace $C_b(E)$ des fonctions bornées (continues) sur E: $\overline{B(E)} = C_b(E)$. Nous nous proposons de mettre en évidence une simple conséquence du théorème de Drury:

THÉORÈME 1. *Toute fonction bornée définie sur un ensemble de Sidon dans un groupe abélien discret infini peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure diffuse* (*c'est-à-dire s'annulant pour tout ensemble à un point*).

Démonstration [1]. Si φ est une fonction bornée sur Γ, on dira que le nombre $M(\varphi)$ est la *valeur moyenne* de φ (précisément, la moyenne invariante), si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver des points $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma$ de manière à avoir

$$(1) \qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i+y)-M(\varphi)\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \Gamma.$$

Si $M(\varphi)$ existe, elle est unique (pour la preuve facile voir Maak [4], par exemple). Appelons *mince* („Nullmenge"; voir [4]) tout ensemble S

[1] Une autre démonstration de ce théorème m'a été communiquée par J.-P. Kahane. La nôtre nous semble plus élémentaire.

pour lequel la moyenne $M(c_S)$ de sa fonction indicatrice vaut 0. Le complément d'un ensemble mince soit dit *large*. La proposition suivante est immédiate:

(i) *Pour qu'un ensemble S soit mince il faut et il suffit que, quelle que soit la fonction φ bornée sur S et valant* 0 *dans* $\Gamma \setminus S$, *on ait* $M(\varphi) = 0$.

Ensuite, on prouve aisément:

(ii) *La condition suffisante et nécessaire pour que la moyenne d'une fonction bornée $\varphi \geqslant 0$ soit* 0 *est que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in \Gamma : \varphi(x) \geqslant \varepsilon\}$ soit mince.*

Pour tout groupe abélien localement compact G et tout voisinage V_a de son élément neutre on peut trouver une fonction continue f_a définie positive à support dans V_a et telle que $f_a(0) = 1$. On a alors $\hat{f} \geqslant 0$ et $\|\hat{f}\|_1 = 1$, donc l'expression $\int\limits_\Gamma \varphi(x)\hat{f}_a(x)\,dx$ représente une espèce de valeur moyenne approchée pour la fonction bornée φ, définie sur $\Gamma = \hat{G}$ (cf. [6], p. 118). En posant

$$\hat{\mu}_y(x) = \hat{\mu}(x+y) \qquad \text{et} \qquad F_a(y) = \int\limits_\Gamma \hat{f}_a(x)\,\hat{\mu}_y(x)\,dx \qquad (\mu \in M(G))$$

on a, pour V_a supposé symétrique,

$$F_a(y) = \int\limits_G f_a(-t)\overline{(y,t)}\,d\mu(t) = \int\limits_{V_a} f_a(-t)\overline{(y,t)}\,d\mu(t)$$
$$= f_a(0)\cdot\overline{(y,0)}\cdot\mu(\{0\}) + \int\limits_{V_a\setminus\{0\}} f_a(-t)\overline{(y,t)}\,d\mu(t).$$

Si le système $\{V_a\}$ constitue une base de voisinages de 0, il en résulte

(2) $$\lim_a F_a(y) = \mu(\{0\}) \text{ uniformément en } y.$$

Comme $\hat{f}_a$ est intégrable, $\hat{\mu}$ est bornée et $\hat{\mu}$ est uniformément continue, $F_a(y)$ se laisse approcher, uniformément en y, par des sommes riemanniennes

$$\sum_{i=1}^n \hat{f}_a(x_i)\,\hat{\mu}(x_i+y)\,\delta_i, \qquad \text{où} \quad \sum_{i=1}^n \hat{f}_a(x_i)\,\delta_i = 1,\ \hat{f}_a(x_i) > 0.$$

En vertu de (2) il en est de même pour $\mu(\{0\})$. Ainsi, la définition (1) entraîne

(3) $$\mu(\{0\}) = M(\hat{\mu}).$$

En posant $\sigma = \mu * \mu^*$ (cf. encore [6], loc. cit.) il en résulte

$$M(\hat{\sigma}) = \sum_{t \in G} |\mu(\{t\})|^2.$$

Par conséquent, on a $M(|\hat{\mu}|^2) = 0$, si et seulement si μ est diffuse. Ce-ci est bien connu mais nous avons reproduit la démonstration pour accentuer l'existence et la valeur de la moyenne invariante de $\hat{\mu}$ et de $|\hat{\mu}|^2$. La condition (ii) permet de remplacer l'équation $M(|\hat{\mu}|^2) = 0$ par $M(|\hat{\mu}|) = 0$ est d'obtenir la proposition suivante:

Si μ est diffuse, l'ensemble $F = \{x\colon |\hat{\mu}(x)| < \varepsilon\}$ est large quel que soit $\varepsilon > 0$.

Nous aurons encore besoin de deux propositions.

(iii) *Tout ensemble de Sidon est mince.*

En effet, d'abord $\underline{M}(c_E)$ existe grâce à (3) et parce que la fonction c_E est un membre de $\overline{B(\Gamma)}$ (Drury). Ensuite, si l'on avait $M(c_E) > 0$, Γ serait la réunion d'un nombre fini d'ensembles de Sidon (translatés de E), ce qui contredirait le résultat de Drury.

(iv) *Si F est un ensemble large dans Γ, discret ou non, F est dense pour la topologie faible, c'est-à-dire celle du compactifié de Bohr $\tilde{\Gamma}$.*

S'il n'était pas ainsi, on pourrait construire une fonction continue ψ sur $\tilde{\Gamma}$, nulle sur F mais telle que $\int_{\tilde{\Gamma}} \psi dx > 0$. Pour la restriction (presque-périodique) $f|_\Gamma$ de n'importe quelle fonction dans $C(\tilde{\Gamma})$ on a

$$M(f) = M(f|_\Gamma) = \int_{\tilde{\Gamma}} f(x)\,dx$$

puisque cette intégrale se laisse approcher par des combinaisons convexes de translatées de $f|_\Gamma$ (sommes riemanniennes), donc on a $M(\psi|_\Gamma) > 0$, contrairement à (i).

Si E est de Sidon dans un Γ discret et si μ est une mesure sur G telle que $\|c_E - \hat{\mu}\|_\infty < \varepsilon$, soit $\mu = \mu_c + \mu_d$ la décomposition de μ en partie diffuse et en partie discrète respectivement. Comme E est mince (voir (iii)) et comme la réunion de deux ensembles minces est mince, l'ensemble $F = \{x \in E'\colon |\hat{\mu}_c(x)| < \varepsilon\}$ est large et on a à la fois $|\hat{\mu}(x)| < \varepsilon$ et $|\hat{\mu}_c(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in F$. Donc, il suit

$$|\hat{\mu}_d(x)| < 2\varepsilon \text{ partout dans } F. \tag{4}$$

Or, (iv) et (4) entraînent que $|\hat{\mu}_d(x)| \leqslant 2\varepsilon$ partout sur Γ. On en déduit $|c_E(x) - \hat{\mu}_c(x)| \leqslant 3\varepsilon$ partout sur Γ. Ainsi, on a démontré une version renforcée du théorème Drury, à savoir la version suivante:

LEMME. *La fonction indicatrice d'un Sidon dans un groupe abélien discret infini est approchable uniformément par les transformées de Fourier des mesures diffuses.*

Une conséquence simple de ce lemme est qu'il existe une mesure diffuse μ_0 pour laquelle $\hat{\mu}_0 = 1$ partout sur E. En effet, si ν est diffuse et si $|\hat{\nu}(x)-1| < \varepsilon < 1$ pour $x \in E$, il y a une mesure σ telle que $\hat{\sigma} = 1/\hat{\nu}$ sur E. Donc, il suffit de poser $\mu_0 = \nu * \sigma$.

Ensuite, étant donnée une fonction bornée φ sur E, on peut l'interpoler d'abord par la transformée d'une mesure μ (diffuse ou non) et ensuite convoler μ par μ_0 afin d'obtenir une mesure diffuse dont la transformée soit identique avec φ sur E, ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 1 se laisse transcrire pour les ensembles de Sidon „topologiques" situés dans $\boldsymbol{R}$. Si $E = \{x_n\}$ est un tel ensemble, il existe un intervalle $V = (-a, a)$ tel que toute suite $\{y_n\}$, où $y_n \in x_n + V$, est sidonienne [5]. Si l'on choisit $y_n = p_n/q (1 \leqslant n < \infty)$ où q est un dénominateur fixé, suffisamment élevé, on peut considérer la suite $\{y_n\}$ comme un ensemble de Sidon dans le groupe discret $\boldsymbol{Z}^{(q)} = \{p/q\}$ $(p \in \boldsymbol{Z})$, isomorphe à $\boldsymbol{Z}$, et appliquer (iii). Donc, $\{y_n\}$ est mince dans $\boldsymbol{Z}^{(q)}$. Il suit de là que, si $K(T, x)$ désigne le nombre de points de E situés dans l'intervalle $(-T+x, T+x)$, on a $K(T, x) = o(T)$ uniformément en x. Par conséquent,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} c_{E+V}(x+y)\,dx = 0$$

uniformément en y.

Bien sûr, on peut majorer c_{E+V} par une fonction bornée uniformément continue ψ pour laquelle encore

$$\operatorname{lim\,unif}_{T\to 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi(x+y)\,dx = 0.$$

Il vient $M(\psi) = 0$ (voir (1); on approchera les intégrales par des sommes riemanniennes). A plus forte raison, $M(c_{E+V}) = 0$, c'est-à-dire $E+V$ est mince. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe, d'après [1], une mesure μ $(= \mu_c + \mu_d)$ sur $\boldsymbol{R}$ telle que $\hat{\mu}(x_n) = 1$ $(1 \leqslant n < \infty)$ et $|\hat{\mu}(x)| < \varepsilon$ en dehors de $E+V$. On peut en déduire que $|\hat{\mu}_c(x)-1| < 3\varepsilon$ sur E (c'est une partie du Lemme pour $\boldsymbol{R}$ au lieu d'un Γ discret). En réalité, on n'a qu'à répéter le raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 1; il reste à relire sa partie finale (après le Lemme) pour arriver au résultat que voici:

THÉORÈME 2. *Toute fonction bornée sur un ensemble de Sidon dans $\boldsymbol{R}$ peut être interpolée par la transformée de Fourier d'une mesure diffuse.*

Rappelons encore que l'interpolation d'une $\varphi \in C_b(E)$ par la transformée d'une mesure discrète n'est pas toujours possible [3].

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Déchamps-Gondim, *Ensembles de Sidon topologiques*, Annales de l'Institut Fourier, à paraître.

[2] S. W. Drury, *Sur les ensembles de Sidon*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 271, Série A (1970), p. 162-163.

[3] J.-P. Kahane, *Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson*, Colloquium Mathematicum 15 (1966), p. 87-92.
[4] W. Maak, *Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 190 (1952), p. 34-48.
[5] J.-P. Méla, *Sur certains ensembles exceptionnels en analyse de Fourier*, Annales de l'Institut Fourier 18, 2 (1968), p. 31-71.
[6] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York-London 1962.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 28. 12. 1971