COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVIII 1973 FASC. 2

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES MULTIPLICATIVES ET MULTIPLICATEURS DES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FONCTIONS DE PUISSANCE p-IÈME SOMMABLE

PAR

HEDI DABOUSSI ET JACQUES PEYRIÈRE (ORSAY)

On désigne par f une fonction définie sur $\boldsymbol{Z}$, paire, à valeurs réelles, multiplicative (c'est-à-dire telle que $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux) et telle que $\sup\{|f(n)|;\, n \in \boldsymbol{Z}\} = 1$. Une telle fonction est déterminée par les nombres $f(0)$ et $f(p^j)$ lorsque p parcourt l'ensemble P des nombres premiers et j l'ensemble des entiers positifs.

Pour chaque nombre premier p on désigne par $\boldsymbol{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, par $|\ |_p$ la valeur absolue p-adique et par F_p la fonction ainsi définie sur $\boldsymbol{Z}_p \setminus \{0\}$: $F_p(x) = f(|x|_p^{-1})$. Il est clair que pour tout entier n, non nul, on a

$$f(n) = \prod_{p \in P} F_p(n).$$

Soit G le groupe compact $\prod_{p \in P} \boldsymbol{Z}_p$; on appelle h l'*homomorphisme naturel* de $\boldsymbol{Z}$ dans G, h est continu injectif et d'image dense. Le groupe dual de $\prod_{p \in P} \boldsymbol{Z}_p$ est canoniquement isomorphe à $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ et l'homomorphisme dual de h est l'injection canonique de $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ dans $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \simeq \boldsymbol{T}$. La fonction $F = \bigotimes_{p \in P} F_p$ est définie sur G auquel on a enlevé l'ensemble E de mesure nulle constitué des points dont une au moins des coordonnées est nulle. Remarquons que $h^{-1}(E) \cap \boldsymbol{Z} = \{0\}$ et que $F \circ h(n) = f(n)$ pour tout entier rationnel non nul.

Soit H un groupe abélien localement compact, soit Λ le groupe dual de H et $\mathscr{F}: L^2(\Lambda) \mapsto L^2(H)$ la transformée de Fourier. Soit r un nombre réel supérieur à 1. La sous-algèbre $\mathscr{M}_r(H)$ de $L^\infty(H)$ est définie comme suit: $m \in \mathscr{M}_r(H)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément g de $L^2(\Lambda)$ et tout élément h de $L^2(\Lambda)$ la relation $\mathscr{F}h = m\mathscr{F}g$ entraîne $\|h\|_r \leqslant C\|g\|_r$. La norme de m dans $\mathscr{M}_r(H)$ est le infimum des constantes C possibles.

On démontre, d'après une idée d'Yves Meyer, le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Si $f: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{R}$ est paire, multiplicative et vérifie $|f|\leqslant 1$ et*

$$\sum_{p\in P}\frac{1-f(p)}{p}<+\infty,$$

alors, pour tout $r>1$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $$f\in\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}),$$

(b) $$F\in\mathscr{M}_r\Big(\prod_{p\in P}\boldsymbol{Z}_p\Big)$$

(F est définie à l'aide de f comme il est précisé dans l'introduction).

De plus, si l'on modifie convenablement $f(0)$, on a

$$\|f\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z})}=\|F\|_{\mathscr{M}_r(G)}.$$

La démonstration repose sur le théorème suivant de Lohoué [3]:

THÉORÈME 2. *Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts et $h: G_1\to G_2$ un homomorphisme continu, injectif et d'image dense.*

(a) *Pour toute fonction continue $F: G_2\to\boldsymbol{C}$ et tout $r>1$, $F\in\mathscr{M}_r(G_2)$ et $F\circ h\in\mathscr{M}_r(G_1)$ sont équivalents et de plus les normes de F et $F\circ h$ dans ces espaces sont égales.*

(b) *Plus généralement, soit $(\varphi_a)_{a\in A}$ une approximation de l'identité sur le groupe G_2 et soit $F: G_2\to\boldsymbol{C}$ une fonction borélienne bornée telle que $(F*\varphi_a)(x)\to F(x)$ suivant A pour tout x dans $h(G_1)$. Alors $F\in\mathscr{M}_r(G_2)$ entraîne $F\circ h\in\mathscr{M}_r(G_1)$ et $\|F\circ h\|_{\mathscr{M}_r(G_1)}\leqslant\|F\|_{\mathscr{M}_r(G_2)}$.*

Remarquons que la fonction F vérifie les hypothèses du théorème 2(b). En effet, le produit

$$\prod_{p\in P}\int_{\boldsymbol{Z}_p}F_p(t)\,dt$$

est convergent, donc, étant donné $\varepsilon>0$, il existe une partie finie, P_1, de P telle que

$$\Big|\prod_{p\notin P_1}\int_{\boldsymbol{Z}_p}F_p(t)\,dt-1\Big|<\varepsilon.$$

D'autre part, pour chaque $p\in P_1$ et pour $x\neq 0$,

$$p^j\int_{p^j\boldsymbol{Z}_p}F_p(x+t)\,dt$$

tend vers $F_p(x)$ lorsque j tend vers $+\infty$. C'est dire qu'il existe une suite de nombres entiers, N_k, tels que χ_k/N_k désignant la fonction caractéristique de $\overline{h(N_k\boldsymbol{Z})}$, on ait

$$\lim_{k\to\infty} F*\chi_k(x) = F(x)$$

pour tout x dont aucune des projections n'est nulle. Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $F*\chi_k(0)$, lorsque k tend vers $+\infty$, a une limite que nous prenons pour nouvelle définition de $f(0)$.

On en déduit que si F est multiplicateur, f l'est aussi, et que $\|f\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})} \leqslant \|F\|_{\mathcal{M}_r(G)}$.

Supposons maintenant que f appartienne à $\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})$. Posons $G_n = \overline{h(N_n\boldsymbol{Z})}$; nous savons que

$$G_n = \prod_{p\in P} G_{n,p}$$

où $G_{n,p}$ est un sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{Z}_p$ et l'on a

$$F*\chi_n\big(h(j)\big) = \prod_{p\in P} \frac{1}{|G_{n,p}|} \int_{G_{n,p}} F_p\big(h(j)-t\big)\,dt.$$

Or d'après un théorème de Delange [1] la fonction f a une moyenne sur toute progression arithmétique et le produit précédent n'est autre que la moyenne de f sur la progression $N_n\boldsymbol{Z}+j$,

$$F*\chi_n\big(h(j)\big) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(j+kN_n),$$

ce qui montre que $(F*\chi_n)\circ h$ est dans l'ensemble convexe fermé de $\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})$ engendré par f et ses translatées, par suite

$$\|(F*\chi_n)\circ h\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})} \leqslant \|f\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})}.$$

Nous pouvons appliquer le théorème 2(a) à la fonction $F*\chi_n$:

$$\|F*\chi_n\|_{\mathcal{M}_r(G)} \leqslant \|(F*\chi_n)\circ h\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})} \leqslant \|f\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})}.$$

On en conclut que $\|F\|_{\mathcal{M}_r(G)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{M}_r(\boldsymbol{Z})}$ car $F*\chi_n$ converge vers F pour la topologie $\sigma\big(L^\infty(G), L^1(G)\big)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Le même théorème, avec la même démonstration, est valable à plusieurs dimensions: suivant Delange [2], une fonction de deux variables est multiplicative si $f(m_1, n_1)f(m_2, n_2) = f(m_1m_2, n_1n_2)$ lorsque m_1n_1 et m_2n_2 sont premiers entre eux; le groupe G est alors $\prod_{p\in P} (\boldsymbol{Z}_p \times \boldsymbol{Z}_p)$.

Nous donnerons deux applications:

COROLLAIRE 1. *f étant une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème 1, nous supposerons que, pour chaque nombre premier p, il existe une valeur $f(p^j)$, $j = 1, 2, \ldots$, différente de 1. Soit a_p la première de ces valeurs. Si* $\sup(a_p) < 1$, *la fonction f n'est multiplicateur des coefficients de Fourier des fonction de $L^r(\boldsymbol{T})$ que lorsque r est égal à 2.*

On va montrer que, lorsque $r \neq 2$, le produit $\prod_{p \in P} \|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)}$ diverge vers $+\infty$, ce qui prouvera que F n'est pas multiplicateur des transformées de Fourier des éléments de $l^r(\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z})$.

Evaluons $\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)}$ quand $1 < r < 2$, cas auquel on peut toujours se restreindre. Pour tout ensemble E, 1_E désignera la fonction caractéristique de E. On a

$$F_p = 1_{\boldsymbol{Z}_p \setminus p^n \boldsymbol{Z}_p} + a_p 1_{p^n \boldsymbol{Z}_p \setminus p^{n+1} \boldsymbol{Z}_p} + \Phi_p$$

pour un entier n convenable et une fonction Φ_p à support dans $p^{n+1}\boldsymbol{Z}_p$. La norme de F_p dans $\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)$ peut être minorée de la façon suivante: soit φ la fonction $1_{p^{n-1}\boldsymbol{Z}_p \setminus p^{n+1}\boldsymbol{Z}_p}$; alors

$$\varphi F_p = 1_{p^{n-1}\boldsymbol{Z}_p \setminus p^n \boldsymbol{Z}_p} + a_p 1_{p^n \boldsymbol{Z}_p \setminus p^{n+1}\boldsymbol{Z}_p}.$$

Il suffit maintenant de calculer les normes γ et δ de $\mathscr{F}^{-1}(\varphi)$ et de $\mathscr{F}^{-1}(\varphi F_p)$ dans $L^r(\hat{\boldsymbol{Z}}_p)$ pour écrire $\delta \leqslant \gamma \|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)}$, ce qui fournit la minoration cherchée. Plus précisément, désignant par Γ_j l'orthogonal dans $\hat{\boldsymbol{Z}}_p$ de $p^j\boldsymbol{Z}_p$, nous avons

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{p^{n-1}}\left(1_{\Gamma_{n-1}} - \frac{1}{p^2} 1_{\Gamma_{n+1}}\right),$$

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi F_p) = \frac{1}{p^{n-1}}\left[1_{\Gamma_{n-1}} - \frac{1}{p} 1_{\Gamma_n} + a_p\left(\frac{1}{p} 1_{\Gamma_n} - \frac{1}{p^2} 1_{\Gamma_{n+1}}\right)\right],$$

donc

$$\gamma^r = \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^r \left[\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^r p^{n-1} + \frac{1}{p^{2r}}(p^{n+1} - p^{n-1})\right]$$

$$= \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^r + \frac{1}{p^{2(r-1)}}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right] = \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{p^{2(r-1)}}\right)\right]$$

et, tenant compte du fait que r est strictement compris entre 1 et 2,

$$\delta^r = \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^r \times$$

$$\times\left[\left|1 - \frac{1-a_p}{p} - \frac{a_p}{p^2}\right|^r p^{n-1} + \left|\frac{1-a_p}{p} + \frac{a_p}{p^2}\right|^r (p^n - p^{n-1}) + \left(\frac{a_p}{p^2}\right)^r (p^{n+1} - p^{n-1})\right]$$

$$=\left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[\left|1-\frac{1-a_p}{p}-\frac{a_p}{p^2}\right|^r+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}\left|1+\frac{a_p}{p(1-a_p)}\right|^r\left(1-\frac{1}{p}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{|a_p|^r}{p^{2(r-1)}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[1-r\frac{1-a_p}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[1+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)\right],$$

d'où

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)}\geqslant\frac{\delta^r}{\gamma^r}\geqslant 1+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)$$

et le produit infini $\prod_{p\in P}\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(F_p)}$ diverge vers $+\infty$.

Ceci prouve, par exemple, que la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres quadratfrei n'est multiplicateur de $\mathscr{F}(L^r(T))$ que lorsque r égale 2.

COROLLAIRE 2. *La fonction caractéristique, dans $\boldsymbol{Z}^2$, de l'ensemble des couples de nombres premiers entre eux n'est un multiplicateur de $\mathscr{F}(L^r(T^2))$ que lorsque r égale 2.*

De la même façon, on montre que

$$\prod_{p\in P}\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p)}=+\infty\quad\text{lorsque } 1<r<2.$$

Cette fois

$$F_p=1-1_{p\boldsymbol{Z}_p\times p\boldsymbol{Z}_p}$$

et pour évaluer la norme de F_p il suffit de se placer sur le quotient $(\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p)/(p\boldsymbol{Z}_p\times p\boldsymbol{Z}_p)$. On a la situation suivante: si $D=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$, on appelle Δ la diagonale de $D\times D$ et $\hat{D}$ le dual de D. Soit φ la fonction caractéristique de la diagonale, sa transformée de Fourier est $1_{\Delta^\perp}/p$, où $\Delta^\perp$ est l'orthogonal de Δ; appliquons à φ le multiplicateur $1-1_{\{0\}}$: par transformée de Fourier nous obtenons $1_{\Delta^\perp}/p-1/p^2$, par suite

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p)}\geqslant\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\right)^r p+\frac{1}{p^{2r}}(p^2-p)\right]\Big/p^{1-r},$$

d'où

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p)}\geqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)^r+\frac{1}{p^{r-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=1+\frac{1}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right),$$

ce qui assure

$$\prod_{p\in P}\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p\times\boldsymbol{Z}_p)}=+\infty\quad\text{si } 1<r<2.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Annales d'École Normale Supérieure, 3-ème série, 78 (1961), p. 273-304.

[2] — *On some sets of pairs of positive integers*, Journal of Number Theory 1 (1969), p. 261-279.

[3] N. Lohoué, *Algèbres A_p et convoluteurs de L^p*, Orsay 1972 (thèse), à paraître dans les Annales de l'Institut Fourier.

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1972