COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIII 1975 FASC. 2

PRODUITS TENSORIELS INJECTIFS D'ESPACES FAIBLEMENT SÉQUENTIELLEMENT COMPLETS

PAR

FRANÇOISE LUST (ORSAY)

Les définitions et notations sont celles de l'article précédent [1]. Une question qui se pose naturellement est la suivante: soient E et F des Banach tels que toute suite bornée contienne soit une sous-suite faiblement convergente, soit une sous-suite de Sidon. L'espace $E\hat{\hat{\otimes}}F$ a-t-il la même propriété?

D'après un résultat récent de Rosenthal [2] ces espaces sont exactement les espaces de Banach faiblement séquentiellement complets. D'autre part, les espaces ayant la propriété de Schur sont des espaces de Sidon.

La réponse à la question est en général négative:

L'espace $l^2\hat{\hat{\otimes}}l^2$ a des sous-espaces fermés isomorphes à C_0 (par exemple le sous-espace diagonal engendré par $(e_i\otimes e_i)$ où (e_i) désigne la base canonique de l^2). Or C_0 n'est pas faiblement séquentiellement complet.

De même $L^1[0,1]\hat{\hat{\otimes}}L^1[0,1]$ a des sous-espaces fermés isomorphes à $l^2\hat{\hat{\otimes}}l^2$ et n'est pas faiblement séquentiellement complet.

On a cependant le

THÉORÈME. *Le produit tensoriel injectif d'un Banach faiblement séquentiellement complet et d'un Banach ayant la propriété de Schur est faiblement séquentiellement complet.*

Soient E et F des Banach faiblement séquentiellement complets, et (u_k) une suite bornée dans $\mathscr{L}(E_s', F_s)$ telle que, pour tout $e'\in E'$ et tout $f'\in F'$, $u_k(e',f')$ soit une suite de Cauchy. Il est bien connu qu'il existe $u\in\mathscr{L}(E_s', F_s)$ telle que

$$u_k(e',f')\to u(e',f').$$

D'après [1], si E a la propriété de Schur, $\mathscr{L}(E_s', F_s)$ muni de sa norme est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}\big(B_1(E')_s\times B_1(F')_s\big)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

D'après le théorème de Lebesgue la suite (u_k) converge faiblement dans $\mathscr{C}\big(B_1(E')_s\times B_1(F')_s\big)$, donc converge faiblement dans $\mathscr{L}(E_s', F_s)$.

Remarque. Sans utiliser le théorème de Rosenthal, en reprenant presque mot pour mot la démonstration de [1], il est facile de voir que si F est de Sidon et si E a la propriété définie dans la première question, $\mathscr{L}(E_s', F_s)$ l'a aussi.

TRAVAUX CITÉS

[1] F. Lust, *Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon*, Colloquium Mathematicum 32 (1975), p. 285-289.
[2] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 71 (1974), p. 2411-2413.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUE
ORSAY - 91405
FRANCE

Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1974