COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XL 1979 FASC. 2

INTERPOLATION HARMONIQUE SUR LES COMPACTS

PAR

S. HARTMAN (WROCŁAW) ET Y. MEYER (PARIS)

1. Le problème suivant a été étudié dans [2]: Soit E un ensemble isolé dans $\boldsymbol{R}$ à adhérence compacte. Sous quelles conditions l'algèbre A_0 des restrictions $f|\bar{E}$ de transformées de Fourier nulles sur E' s'identifie avec l'algèbre C_0 des fonctions continues sur $\bar{E}$ nulles sur E'?

Le but du présent travail est de répondre à deux questions posées dans [2] et d'y ajouter quelques résultats en considérant un problème plus général que voici:

Soit E un ensemble infini isolé et K un compact dans $\boldsymbol{R}$, disjoint de E. Soit $E' \subset K$. On introduit les espaces de Banach suivants:

C_0 — le sous-espace fermé de $C(\bar{E})$ composé de fonctions s'annulant sur E';

A_0 — le sous-espace fermé de $A(\bar{E})$ composé de fonctions s'annulant sur E';

A_{00} — l'espace des fonctions sur $\bar{E}$ prolongeables en membres de $A(\boldsymbol{R})$ nuls sur K, muni de la norme induite par $A(K\cup E)$ moyennant la bijection canonique

$$A_{00} \leftrightarrow N = \{f \in A(K\cup E) : f|K = 0\}.$$

Il est évident que $A_{00} \subset A_0 \subset C_0$ et que A_{00} est dense dans C_0. Sous quelles conditions peut-on remplacer les inclusions par les égalités?

Pour un fermé $F \supset E'$ désignons par $\mathring{A}(F)$ l'espace $\{f \in A(F): f|E' = 0\}$. L'identité $A_{00} = A_0$ signifie alors que l'espace $\mathring{A}(K\cup E)$ est la somme directe de ses deux sous-espaces fermés N et $\{f \in A(K\cup E): f|\bar{E} = 0\}$. Ceci équivaut par dualité à

$$\mathring{A}^*(K\cup E) = \mathring{A}^*(K\cup E)/\mathring{A}^*(K) \oplus \mathring{A}^*(K\cup E)/\mathring{A}^*(\bar{E}) \tag{1}$$
$$\simeq A^*(\bar{E})/A^*(E') \oplus A^*(K)/A^*(E').$$

Pour avoir $A_0 = C_0$ il faut et il suffit qu'on ait

$$A^*(\bar{E})/A^*(E') = C_0^* = l_1(E),$$

donc l'égalité

$$(\mathrm{o}) \qquad A_{00} = C_0$$

se présente si et seulement si

$$(\mathrm{s}) \qquad A^*(K \cup E) = A^*(K) + l_1(E).$$

Lorsque $E \in \mathrm{Sid}_d$ (c'est-à-dire lorsque E est un Sidon sur l'axe réel discret $\boldsymbol{R}_d$) et lorsque K est un Helson, $K \cup E$ est encore un Helson ([2], Theorem 4), donc on a (o). Un exemple dans [2] montre qu'il peut arriver $A_0 = C_0$ sans que $K = E'$ soit un Helson. Dans cet exemple E' est dénombrable et indépendant de E. Voici un autre dans lequel E' n'est ni dénombrable ni indépendant de E, d'où la solution de P 942 dans [2].

On commence par définir E'. En fait E' sera l'ensemble de toutes les sommes

$$6 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 9^{-k} \qquad (\varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1).$$

Evidemment, cet ensemble n'est pas un Helson (voir [4], p. 146). Soit V le compact, ensemble de toutes les sommes

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 9^{-k}, \qquad \text{où } a_k = 4 \text{ ou } 5.$$

Ainsi, V est contenu dans l'intervalle $[1/2, 5/8] \subset (1/12, 2/3)$. Soit (x_n) une suite de nombres indépendants tels qu'on ait

$$x_1 \in V, \qquad x_2 \in \frac{V}{9}, \qquad x_3 \in \frac{2}{3} + \frac{V}{9},$$

$$x_4 \in \frac{V}{9^2}, \qquad x_5 \in \frac{6}{9^2} + \frac{V}{9^2}, \qquad x_6 \in \frac{6}{9} + \frac{V}{9^2}, \qquad x_7 \in \frac{6}{9} + \frac{6}{9^2} + \frac{V}{9^2}$$

et ainsi de suite. On pose $E = (x_n)$. Clairement E' est en réalité l'ensemble dérivé de E. Le groupe engendré par E' est $\boldsymbol{R}$ tout entier (cela étant le cas pour l'ensemble triadique de Cantor), donc E' n'est pas indépendant de E. Le théorème suivant donne immédiatement (s), donc $A_0 = C_0$.

THÉORÈME 1. *Toute pseudomesure S portée par $\bar{E}$ s'écrit $S = \sigma + \mu$, où σ est portée par E' et μ est une mesure portée par E.*

Démonstration. Soit φ une fonction C^∞, périodique de période 1, égale à 1 sur $[1/2, 5/8]$ et à 0 sur $[0, 1/12]$ et sur $[2/3, 3/4]$. Formons $\varphi(9^k x)$ et calculons ceci si $x \in E$. Posons donc

$$x = 6(\varepsilon_1 \cdot 9^{-1} + \varepsilon_2 \cdot 9^{-2} + \ldots + \varepsilon_p \cdot 9^{-p}) + r \cdot 9^{-p}$$

et envisageons trois cas:

(a) $p < k$. Alors $9^k x \equiv 9^{k-p} r \equiv s \pmod 1$ et $s \in V$ car $r \in V$ et $9V \equiv V \pmod 1$. Par conséquent, $\varphi(9^k x) = 1$.

(b) $p = k$. Alors $9^k x \in V \pmod 1$ et $\varphi(9^k x) = 1$.

(c) $p > k$. Alors

$$9^k x \equiv 6\varepsilon_{k+1}\cdot 9^{-1} + 6\varepsilon_{k+2}\cdot 9^{-2} + \ldots + 6\varepsilon_p \cdot 9^{-p+k} + r\cdot 9^{-p+k}$$

appartient à l'un des intervalles $[0, 1/12]$ ou $[2/3, 3/4]$. Donc $\varphi(9^k x) = 0$.

Enfin si $x \in E'$, $9^k x \in E' \pmod 1$ et $\varphi(9^k x) = 0$. Formons $S\varphi(9^k\cdot) = S_k$. Alors

$$\|S\varphi(9^k\cdot)\|_{PM} \leqslant \|S\|_{PM}\|\varphi(9^k\cdot)\|_A = \|S\|_{PM}\|\varphi\|_A,$$

donc $\|S_k\|_{PM} \leqslant C$. D'autre part S_k est portée par les $2^k - 1$ premiers points de E. Soient $m_1, m_3, \ldots, m_{2^k-1}$ les masses de S à ces points. Or E est indépendant, donc

$$\|S_k\|_{\text{mes}} = \|S_k\|_{PM} = \sum_{i=1}^{2^k-1} |m_i|.$$

On en déduit que la somme des masses de S aux points de E est uniformément bornée par $\|S\|_{PM}\|\varphi\|_A$, ce qui achève la démonstration.

Si l'on veut avoir $K \neq E'$ et $C_0 = A_{00}$ on n'a qu'à simplifier l'exemple qui précède. Posons K égal à E' de notre exemple, mais prenons pour E cette fois-ci une sous-suite croissante (x_{n_k}).

2. Soit π l'injection canonique de A_{00} dans C_0. L'égalité (o) équivaut à ce que E soit un Sidon dans $\boldsymbol{R}_d$ et qu'on ait l'équivalence des normes que voici

$$\text{(n)} \qquad \|\pi^*\mu\|_{A_{00}^*} \simeq \|\mu\|_{PM}.$$

En effet, (o) équivaut évidemment à $\|\pi^*\mu\|_{A_{00}^*} \simeq \|\mu\|_{\text{mes}}$ tandis que $\|\mu\|_{\text{mes}} \simeq \|\mu\|_{PM}$ caractérise les Sidon discrets dénombrables, donc (n) entraîne (o) pour tout Sidon discret isolé et tout compact K. D'autre part $A_0 = C_0$ entraîne $E \in \mathrm{Sid}_d$ ([2], Theorem 1).

La condition (n) est satisfaite lorsque la condition suivante a lieu:

(D) Lorsqu'on écrit $E = (t_n)_{n\in N}$ et $E_n = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, il existe des fonctions $\varphi_n \in A(E\cup K)$ telles que $\varphi_n = 1$ sur E_n, $\varphi_n = 0$ sur K et que $\|\varphi_n\|_{A(E\cup K)} \leqslant C$. En voici la démonstration.

Posons $\psi_n = \varphi_n|\bar{E}$. Pour toute $f \in A(\bar{E})$ on a

$$f\psi_n \in A_{00}, \quad \|f\psi_n\|_{A(\bar{E})} \leqslant C\|f\|_{A(\bar{E})} \quad \text{et} \quad f\psi_n(t) \to f(t)$$

en tout point de $\bar{E}$. Il s'en suit qu'en désignant par B_1 la boule unité de $A(\bar{E})$ on a, quelque soit $\mu \in l_1(E)$,

$$\|\pi^* \mu\|_{A_{00}^*} = \sup_{f \in A_{00} \cap B_1} |\langle \mu, f \rangle| \geqslant \frac{1}{C} \sup_{f \in B_1} \lim_n |\langle \mu, f\psi_n \rangle|$$
$$= \frac{1}{C} \sup_{f \in B_1} |\langle \mu, f \rangle| = \frac{1}{C} \|\mu\|_{PM}.$$

Comme l'on a toujours $\|\pi^* \mu\|_{A_{00}^*} \leqslant \|\mu\|_{PM}$, (n) est prouvé.

Il est clair que (o) entraîne (D): on n'a qu'à prendre $\varphi_n | E_n = 1$, $\varphi_n | K = 0$ et à interpoler chaque φ_n par n'importe quel membre de C_0 de norme 1. L'inverse n'est pas vrai parce que (D) n'entraîne pas que E soit un Sidon; $E = (1/n)_{n \in N}$, $K = \{0\}$ en est un exemple. On pourrait poser la question si (n) entraîne (D) (**P 1052**) ou si (D) entraîne $A_0 = A_{00}$ (**P 1053**) [1].

Enfin nous répondrons à la question posée dans [2]: la sidonicité de E entraîne-t-elle $A_0 = C_0$? Voici un exemple qui prouve le contraire.

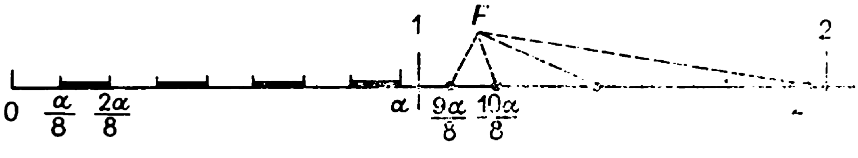
On commence par une dissection dite de type (N, a) sur $[0, 1]$. On appelle $N \geqslant 1$ un entier et a un nombre réel tel que

$$\frac{1}{1+2^{-N}} < a < 1. \tag{2}$$

On place les points $a/2^N$, $2a/2^N, \ldots, 2^N a/2^N = a$. On supprime les intervalles „noirs":

$$(a/2^N, 2a/2^N), (3a/2^N, 4a/2^N), \ldots, \big((2^N-1)a/2^N, a\big)$$

(voir la figure). On garde les intervalles „blancs" restant. On ajoute les points $a + a \cdot 2^{-k}$, $N \geqslant k \geqslant 0$, qui forment F.



LEMME 1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in A(\boldsymbol{R})$, nulle sur les points $ja/2^N$, $0 \leqslant j \leqslant 2^N$, on ait*

$$\sum_{k=0}^{N} |f(a + a \cdot 2^{-k})|^2 \leqslant C \|f\|^2_{A(\boldsymbol{R})}.$$

---

[1] Oui pour P 1052 et non pour P 1053 (voir [1]).

Ce lemme résulte du théorème de Paley suivant (voir [6], p. 213-214): toute fonction $f \in A(\boldsymbol{R})$, nulle sur les entiers négatifs vérifie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(2^k)|^2 \leqslant C_1 \|f\|^2_{A(\boldsymbol{R})}.$$

Dans notre cas on se ramène à ce théorème en mutipliant f par une fonction $g \in A(\boldsymbol{R})$ fixe, nulle sur $(-\infty, 0]$, égale à 1 sur $[a, 2a]$. Ensuite on introduit une nouvelle variable t par la formule $x = a+2^{-N}at$, ce qui ne change pas les normes dans $A(\boldsymbol{R})$.

En posant $f_1(t) = f(x)$ et $g_1(t) = g(x)$ on vérifie alors: lorsque $t = j-2^N$ $(0 \leqslant j \leqslant 2^N)$ on a $f_1(t) = 0$; si $t < -2^N$ il vient $g_1(t) = 0$, on a donc $f_1(t)g_1(t) = 0$ pour tout t entier négatif. Pour $t = 2^k$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$ on obtient $a < x \leqslant 2$, donc

$$f_1(t)g_1(t) = f_1(2^k) = f(a+a\cdot 2^{-k})$$

et le théorème de Paley donne la thèse du lemme avec $C = C_1\|g\|^2_{A(\boldsymbol{R})}$.

Maintenant on procède à la construction de E' (on construira E ensuite). Soit (a_n) une suite de nombres satisfaisant (2). On part de l'intervalle $[0, 1]$. On fait une dissection de type $(1, a_1)$. On construit l'ensemble fini F_1 correspondant. Sur chacun des 2 intervalles blancs restants on fait une dissection de type $(2, a_2)$ et $(2, a_3)$. On construit les ensembles F_2^1 et F_2^2 analogues à F. Sur chacun des 8 intervalles blancs restants on fait des dissections $(3, a_4)$, $(3, a_5), \ldots, (3, a_{11})$ chaque intervalle $[a, a+l]$ étant subdivisé moyennant les points $a+al\cdot 2^{-3}j$ $(0 \leqslant j \leqslant 2^3)$. On construit alors dans l'intervalle noir voisin à droite l'ensemble formé des points $a+al+al\cdot 2^{-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^3)$. On obtient ainsi les ensembles F_k^j $(0 \leqslant j, k \leqslant 2^3)$. On procède ainsi de suite.

Les ensembles du type F_k^j sont situés dans des intervalles noirs distincts. On appelle K l'intersection des ensembles blancs. Par des choix judicieux des a_k on peut faire en sorte que les F_k^j soient des „morceaux" de progressions géométriques, de raison 2, et assez indépendants pour que leur réunion E soit un Sidon dans $\boldsymbol{R}_d$. On vérifie immédiatement que $\bar{E} = K$.

Enfin grâce au lemme 1 on a aussitôt le théorème 2 que voici:

THÉORÈME 2. *Pour l'ensemble E construit ci-dessus on a $A_0 \neq C_0$.*

Si l'on modifie la construction ci-dessus en prenant à chaque subdivision le même $a = 1$ et en formant l'ensemble $E = (1+1/2^N)_1^\infty$ on obtient un autre phénomène, à savoir: E est un Sidon discret, $\bar{E}$ diffère de E d'un point seulement, donc on a $A_0 = C_0$, tandis que $A_{00} \neq A_0$ parce que toute fonction de $A(\boldsymbol{R})$ nulle sur K obéit la thèse du lemme 1. On voit alors que l'effet $A_0 \neq A_{00}$ peut se produire aussi pour un K relativement petit, au moins pour un K sans intérieur, même si $E \in \mathrm{Sid}_d$.

3. Voici maintenent des conditions plus générales qui contredisent l'égalité $A_{00} = A_0 = C_0$ (cf. [2], Theorem 2).

PROPOSITION 1. *Si K et $\bar{E}$ sont de synthèse et si E' est de non-synthèse, alors $A_0 \neq A_{00}$.*

PROPOSITION 2. *Si $E \cup K$ est de synthèse et K de non-synthèse, alors $A_{00} \neq C_0$.*

Pour prouver la proposition 1 prenons une pseudomesure S, portée par E' et telle que $\langle S, f\rangle \neq 0$ pour une $f \in A(\boldsymbol{R})$ s'annulant sur E'. Alors $f|\bar{E} \in A_0$. D'autre part, si g est le prolongement de $f|\bar{E}$ sur $E \cup K$ telle que $g|K = 0$ on a $\langle S, f\rangle = \langle S, g\rangle = 0$. La première égalité est une conséquence de ce que $\bar{E}$ est de synthèse et la seconde de ce que $K \supset E'$ est de synthèse. Donc $f|\bar{E} \notin A_{00}$.

Pour prouver la proposition 2 prenons une pseudomesure S, portée par K et telle que $\langle S, f\rangle \neq 0$ pour une $f \in A(\boldsymbol{R})$ s'annulant sur K. Comme $K \cup E$ est de synthèse, S est une forme linéaire non nulle sur $A(K \cup E)$. Elle n'est pas nulle sur $N \simeq A_{00}$ non plus parce que $f|K \cup E \in N$. Par conséquent, si nous avions $A_{00} = C_0$, S se réduirait à une mesure $\mu \neq 0$ portée par E. Soit $g \in N$ telle que $g(t) = 0$ pour tout $t \in E$ sauf un point atome de μ. Alors $\langle S, g\rangle = 0$, mais $\langle \mu, g\rangle \neq 0$ — une contradiction.

Les hypothèses qui figurent dans les deux propositions ci-dessus se laissent aisément réaliser à l'aide du théorème connu de Herz ([3], p. 58).

4. Nous nous proposons d'étudier les conséquences de la condition que voici:

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout polynôme trigonométrique $P = P_1 + P_2$ où spec$P_1 \subset K$, spec$P_2 \subset E$, on ait

$$\|P\|_\infty \geqslant C(\|P_1\|_\infty + \|P_2\|_\infty). \tag{M}$$

Il est évident que (M) équivaut à ce que pour toute paire de mesures discrètes μ_1, μ_2, où $\mu_1 \in M(K)$ et $\mu_2 \in M(E)$, on ait

$$\|\mu_1 + \mu_2\|_{PM} \geqslant C(\|\mu_1\|_{PM} + \|\mu_2\|_{PM}). \tag{M'}$$

De même, (M) signifie que pour toute fonction presque-périodique $f = f_1 + f_2$, où les exposants de Fourier de f_1 et f_2 appartiennent à K et à E respectivement, il vient

$$\|f\|_\infty \geqslant C(\|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty).$$

L'existence d'une constante C qui satisfait à cette minoration équivaut à son tour à ce que la série de Fourier de n'importe quelle fonction presque-périodique à spectre dans $E \cup K$ se décompose en Σ_1 et Σ_2, séries de Fourier de fonctions presque-périodiques aux exposants dans K et dans E respectivement.

Examinons une conséquence de (M) qu'on obtient par dualité. Rappelons d'abord la définition de l'algèbre $\tilde{A}_d(F)$ pour un compact F. Celle-ci est constituée par les fonctions membres de $C(F)$ tels que

$$\sup_{\substack{\mu\in M_d(F)\\ \|\mu\|_{PM}\leqslant 1}} \left|\int f d\mu\right| < \infty$$

où la borne supérieure, norme $\|\cdot\|_{\tilde{A}_d(F)}$ de f, est prise par rapport aux masses ponctuelles à support dans F dont la norme $\|\cdot\|_{PM}$ ne surpasse pas 1 (voir [3], p. 45). Il est facile à prouver que la boule unité dans $\tilde{A}_d(E)$ s'identifie à l'adhérence dans $C(F)$ de la boule unité de $A(F)$ pour la topologie de la convergence ponctuelle. Ainsi, $\tilde{A}_d(F)$ est une algèbre de Banach. Soit $\mathring{A}_d(K\cup E)$ la sous-algèbre de $\tilde{A}_d(K\cup E)$ formées par les fonctions qui s'annulent sur E'. Dans le sens analogue nous adoptons la notation $\mathring{A}_d(K)$, $\mathring{A}_d(E)$ et $\mathring{C}(E\cup K)$.

PROPOSITION 3. (M) *entraîne que* $\mathring{A}_d(K\cup E)$ *est la somme directe de* $\mathring{A}_d(K)$ *et de* $\mathring{A}_d(\bar{E})$, *ce qui signifie qu'une fonction* $f\in\mathring{C}(E\cup K)$ *appartient à* $\mathring{A}_d(K\cup E)$ *si* (*et seulement si*)

$$f = f_1+f_2 \quad \text{où } f_1 = f|K\in\mathring{A}_d(K) \text{ et } f_2 = f|\bar{E}\in\mathring{A}_d(\bar{E}).$$

En voici la preuve: supposons (M) satisfait. Si μ est une mesure à support dans $E\cup K$, posons $\mu_1 = \mu|K$ et $\mu_2 = \mu|E$. Alors

$$\sup_{\substack{\mu\in M_d(E\cup K)\\ \|\mu\|_{PM}\leqslant 1}} \left|\int f d\mu\right| \leqslant \frac{1}{C} \sup_{\substack{\mu\in M_d(E\cup K)\\ \|\mu\|_{PM}\leqslant C}} \left|\int_K f_1 d\mu\right| + \frac{1}{C} \sup_{\substack{\mu\in M_d(E\cup K)\\ \|\mu\|_{PM}\leqslant C}} \left|\int_E f_2 d\mu\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{C} \sup_{\substack{\mu_1\in M_d(K)\\ \|\mu_1\|_{PM}\leqslant 1}} \left|\int_K f_1 d\mu_1\right| + \frac{1}{C} \sup_{\substack{\mu_2\in M(E)\\ \|\mu_2\|_{PM}\leqslant 1}} \left|\int_E f_2 d\mu_2\right| < \infty.$$

Remarque. La proposition 3 admet, par dualité, un réciproque partielle que voici: la décomposition

$$\mathring{A}_d(K\cup E) = \mathring{A}_d(K)\oplus\mathring{A}_d(\bar{E})$$

entraîne (M′) pour tout couple de mesures discrètes $\mu_1\in M(K\setminus E')$ et $\mu_\cdot\in M(E)$.

PROPOSITION 4. *Si* E' *ne contient qu'un nombre fini de points*, (M) *équivaut à ce que*

$$\mathring{A}_d(E\cup K) = \mathring{A}_d(K)\oplus\mathring{A}_d(\bar{E}).$$

On le voit en utilisant la proposition 3, la remarque qui la suit et l'équivalence évidente des normes

(3) $$\|\mu_1+\mu_2\|_{PM} \simeq \|\mu_1\|_{PM}+\|\mu_2\|_{PM},$$
$$\forall \mu_1 \in M_d\big((K\setminus E')\cup E\big),\ \mu_2 \in M(E') \qquad (E' \text{ fini}).$$

THÉORÈME 3. (M) *entraîne* (M') *avec* $C/3$ *au lieu de* C *pour toute* $\mu_1 \in M(K)$ (*discrète ou non*) *et pour toute* $\mu_2 \in M(E)$.

Démonstration. Soit $\mu_d^{(1)}$ la partie discrète de μ_1. Si $\mu = \mu_1+\mu_2 = \mu_c+\mu_d$ où μ_c est diffuse et μ_d discrète, on a (cf. [5])

$$\|\mu\|_{PM} \geq \frac{1}{3}(\|\mu_c\|_{PM}+\|\mu_d\|_{PM}).$$

Comme E est dénombrable, μ_2 est discrète et $\mu_d = \mu_d^{(1)}+\mu_2$, donc en vertu de (M), nous avons

$$\|\mu\|_{PM} \geq \frac{1}{3}\|\mu_c\|_{PM}+\frac{1}{3}\|\mu_d^{(1)}+\mu_2\|_{PM}$$
$$\geq \frac{1}{3}\|\mu_c\|_{PM}+\frac{1}{3}C\|\mu_d^{(1)}\|_{PM}+\frac{1}{3}C\|\mu_2\|_{PM} \geq \frac{1}{3}C(\|\mu_1\|_{PM}+\|\mu_2\|_{PM}).$$

Rappelons la définition le l'algèbre $\tilde{A}(F)$ pour F compact. Celle-ci consiste de fonctions membres de $C(F)$ pour lesquelles on a

$$\sup_{\substack{\mu\in M(F)\\ \|\mu\|_{PM}\leq 1}} \left|\int f\,d\mu\right| < \infty$$

et elle est normée par cette borne supérieure. On prouve aisément que la boule unité de $\tilde{A}(F)$ s'identifie avec l'adhérence uniforme de la boule unité de $A(F)$.

Désignons par $\tilde{A}^0(F)$ le sous-espace de $\tilde{A}(F)$ composé de fonctions nulles sur E'. Alors on a la proposition suivante:

THÉORÈME 4. (M) *entraîne que* $\tilde{A}^0(K\cup E)$ *est la somme directe de* $\tilde{A}^0(K)$ *et de* $\tilde{A}^0(\bar{E})$. *Si* E' *ne contient qu'un nombre fini de points, ces deux propriétés sont équivalentes.*

On démontre la première partie de la même manière que la proposition 3 en remplaçant M_d par M (toutes les mesures) et en se servant du théorème 3. Pour prouver la seconde partie on modifie la remarque de façon évidente et on se sert de (3).

Nous ne connaissons pas d'exemple où (M) serait satisfait malgré que $A_{00} \neq A_0$. En particulier, la question se pose, si la condition (plus forte que (M)) que E et K soient indépendants, c'est-à-dire que les groupes

Gp(E) et Gp(K) engendrés par E et par K soient disjoints sauf 0, entraîne $A_{00} = A_0$ (**P 1054**) ([3]).

Bien sûr, les conditions (M) et (M′) gardent leur sens si l'on néglige la compacité de K en le remplaçant par un ensemble T quelconque situé dans R^-. Soit $E = (t_n)$, $t_n \downarrow 0$, $H = \mathrm{Gp}(E)$, $H^- = H \cap (-\infty, 0)$ et $T = [-1, 0] \cap H$. Nous allons prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 5. (M) *est en défaut en remplaçant K par T.*

Le sens de ce résultat est que, quelque soit la suite $t_n \downarrow 0$, aussi rapidement convergente que l'on veut, il n'existe pas de projection bornée de l'espace des fonctions presque-périodiques à spectre dans $T \cup E$ sur celui des fonctions presque-périodiques à spectre dans T. Rappelons que (M) est bien satisfait si l'on renonce aux conditions $K \supset E'$, E isolé, en prenant pour K et pour E deux fermés disjoints dont un est compact. De même, il est connu que (M) est en défaut si $K = [-1, 0]$ et $E = [0, 1]$ ou bien (si l'on n'exige plus la compacité) dans le cas $K = (-\infty, 0]$ et $E = [0, \infty)$, ainsi que dans le cas $K = Z^-$ et $E = Z^+$.

La démonstration du théorème 5 sera précédée par le lemme suivant:

LEMME 2. *Si ν est une mesure dans $\hat{H}$ telle que $\hat{\nu} \mid H^- = 0$, et si*

$$t_n \downarrow 0, \qquad t_{n+1} < \frac{1}{q} t_n, \ q > 1,$$

on a

$$\sum_n |\hat{\nu}(t_n)|^2 \leqslant C(q) \|\nu\|^2_{\mathrm{mes}}.$$

Démonstration. Comme H est un sous-groupe de R_d, le théorème de Paley, déjà utilisé dans la preuve du lemme 1, constate dans sa forme plus précise qu'il existe une constante $C = C(q)$ telle que $\Lambda = (\lambda_n)$ étant une suite dans H pour laquelle $\lambda_{n+1} > q\lambda_n$, les conditions $\varphi \in A(H)$, $\varphi \mid H^- = 0$ entraînent

$$\sum_n |\varphi(\lambda_n)|^2 \leqslant C \|\varphi\|^2_{A(H)}.$$

Comme $t_{n+1} < (1/q) t_n$, ce théorème se laisse appliquer à $\Lambda = (t_i)_1^m$, m arbitraire. Alors, si $\varphi \in A(H)$ (c'est-à-dire si φ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans le groupe $\hat{H}$, dual de H) et si φ s'annule pour les arguments négatifs, il vient

$$\sum_{n=1}^{m} |\varphi(t_n)|^2 \leqslant C(q) \|\varphi\|^2_{A(H)}.$$

Donc on peut poser $m = \infty$.

([3]) Non (voir [1]).

Pour en déduire la thèse du lemme 2 il faut convoler ν par une fonction $g \in L^1(\hat{H})$ telle que $\hat{g}(t_j) = 1$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ et que $\|g\|_1 = \|\hat{g}\|_{A(H)} \leqslant 1+\varepsilon$, pour r et $\varepsilon > 0$ arbitraires. On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{r} |\hat{\nu}(t_n)|^2 \leqslant C(q)(1+\varepsilon)^2 \|\nu\|^2_{\text{mes}}$$

(cf. [6], p. 213-215).

Démonstration du théorème 5. Sans restreindre la généralité supposons (en extrayant une sous-suite) que $t_{n+1} < \frac{1}{2}t_n$. Le groupe $\hat{H}$ est une image continue (homomorphe) de $(\boldsymbol{R}_d)\hat{}$, compactifié de Bohr de $\boldsymbol{R}$. Plus précisément, on a

$$(\boldsymbol{R}_d)\hat{} \xrightarrow{a} (\boldsymbol{R}_d)\hat{}\,/\mathrm{An}H = \hat{H}$$

où $\mathrm{An}H$ désigne l'annulateur de H. Comme $t_n \to 0$, H est dense dans $\boldsymbol{R}$, donc $a(\boldsymbol{R}) \simeq \boldsymbol{R}$. Ainsi $\boldsymbol{R}$ est dense dans $\hat{H}$. Il s'en suit que si (M) avait lieu, on aurait, pour toute paire de polynômes trigonométriques

$$P_1(x) = \sum_{\lambda_k \in T} a_k \exp[i\lambda_k x] \quad \text{et} \quad P_2(x) = \sum_k b_k \exp[it_k x],$$

$$\sup_{u\in\hat{H}} \Big|\sum_{\lambda_k\in T} a_k(u,\lambda_k) + \sum_k b_k(u,t_k)\Big| \geqslant C\Big(\sup_{u\in\hat{H}}\Big|\sum_k a_k(u,\lambda_k)\Big| + \sup_{u\in\hat{H}}\Big|\sum_k b_k(u,t_k)\Big|\Big).$$

Par conséquent, toute fonction continue f dans $\hat{H}$ à spectre dans $T\cup E$ s'écrirait f_1+f_2, $\operatorname{spec} f_1 \subset T$, $\operatorname{spec} f_2 \subset E$. Il en résulte l'existence d'une mesure $m \in M(\hat{H})$ telle que $\hat{m}|T = 0$ et $\hat{m}|E \equiv 1$. Posons φ_k la restriction à H de la fonction triangle de base $[-1-1/k, -1+1/k]$, d'hauteur 1, nulle ailleurs et h celle d'une fonction trapèze égale à 1 dans $(0, t_1)$ et nulle en dehors de la base $[-1/2, t_1+1]$. Soit $\psi_k = \hat{m}(\varphi_k+h)$.

Les fonctions triangle qui viennent d'être définies sont de norme $\|\cdot\|_{A(\boldsymbol{R})} = \|\cdot\|_{B(\boldsymbol{R}_d)}$ égale à 1, donc $\|\varphi_k\|_{B(H)} = 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, où B désigne l'espace des transformées de Fourier-Stieltjes. Bien sûr, on a $\|h\|_{B(H)} < \infty$, donc

$$\|\psi_k\|_{B(H)} \leqslant \|m\|_{\text{mes}} \cdot (\|h\|_{B(H)}+1).$$

La suite (ψ_k) est convergente en tout point de H vers une fonction limite g telle que $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $g(t) = \hat{m}(t)$ pour $t \in E$. Evidemment, g est la transformée d'une mesure $\nu \in M(\hat{H})$. On a alors $\hat{\nu}(t) = 1$ pour $t \in E$, $\hat{\nu}|H^- = 0$, mais ceci est impossible à cause du lemme 2 en prenant $q = 2$. Le théorème 5 est prouvé.

On voit que dans la démonstration ci-dessus le rôle essentiel est joué par le théorème de Paley. On peut en déduire le théorème connu disant que, si $t_n \downarrow 0$, $t_{n+1} < (1/q)t_n$, $q > 1$, $f \in A(\boldsymbol{R})$ et $f|R^- = 0$, alors

$$\sum_n |f(t_n)|^2 \leqslant C\|f\|_A^2.$$

Nous lui donnerons une forme plus générale.

THÉORÈME 6. *Posons* $K = [-1, 0]$. *Soit* $t_n \downarrow 0$, $t_{n+1} < (1/q)t_n$, $q > 1$. *Alors, si* $f \in \tilde{A}(K \cup E)$, $E = (t_n)$, $f|K = 0$, *on a*

$$\sum_n |f(t_n)|^2 \leqslant C\|f\|^2_{\tilde{A}(K\cup E)},$$

où C *ne dépend que de* q.

Démonstration. Il existe une suite $f_k \in A(K \cup E)$ telle que

$$\|f_k\|_{A(E\cup K)} \leqslant \|f\|_{\tilde{A}(K\cup E)} = \gamma \quad \text{et} \quad f = \operatorname{lim\,unif} f_k.$$

Toute f_k peut être interpolée par une fonction appartenant à $A(\boldsymbol{R})$ que nous désignerons encore par f_k, telle qu'on ait $\|f_k\|_{A(\boldsymbol{R})} \leqslant 2\gamma$. Alors les normes $\|\cdot\|_{B(H)}$ des restrictions $f_k|H$ sont, elles aussi, bornées par 2γ. Modifions la définition des fonctions ψ_k construites dans la démonstration du théorème 5 en posant cette fois-ci $\psi_k(t) = f_k(\varphi_k + h)$. Il vient

$$\|\psi_k\|_{B(H)} \leqslant 2\gamma(\|h\|_{B(H)} + 1) = \gamma_0.$$

Soit g la fonction limite d'une sous-suite de (ψ_k) qui converge dans H. On a bien $g|H^- = 0$ et $g(t_n) = f(t_n)$. Comme g est, cette fois encore, la transformée d'une mesure $\nu \in M(\hat{H})$, et $\|g\|_{B(H)} = \|\nu\|_{\text{mes}} \leqslant \gamma_0$, on a la thèse vu le lemme 2.

On voit aisément que la méthode employée dans la démonstration du théorème 5 permet de prouver „non (M)" pour $K = (-\infty, 0]$ et $E = (t_n)$, où $t_n \uparrow \infty$.

Il est évident que l'on peut remplacer dans le théorème 5 l'intervalle $[-1, 0]$ par $[-\varepsilon, 0]$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Par conséquent, on a le corollaire que voici:

COROLLAIRE. *Pour toute suite* $t_n \downarrow 0$ *il existe une suite* $v_n \uparrow 0$ *telle que* (M) *est en défaut pour* $K = (v_n) \cup \{0\}$ *et* $E = (t_n)$.

Nous finissons par poser le problème suivant:

Existe-t-il un compact $K \subset (-\infty, 0]$ pour lequel 0 est un point de densité métrique à gauche et une suite $E = (t_n)$ tels que (M) ou même (s) soient valables? (**P 1055**) ([3]).

([3]) Oui (voir [1]).

TRAVAUX CITÉS

[1] P. Głowacki, *On decomposition of pseudomeasures on some subsets of lca groups*, ce fascicule, p. 277-285.

[2] S. Hartman, *Non-closed sets in harmonic analysis*, Colloquium Mathematicum 33 (1975), p. 117-122.

[3] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Berlin 1970.

[4] — et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1963.

[5] J. Porada, *A property of a decomposition of weakly almost periodic functions*, Colloquium Mathematicum 34 (1976), p. 245-248.

[6] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York - London 1962.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE PARIS XI, U.E.R. MATHÉMATIQUE

Reçu par la Rédaction le 22. 9. 1976;
en version modifiée le 15. 4. 1977