COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 1

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С РАВНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ЧЛЕНОВ

Я. ГАБОВИЧ (ТАРТУ)

Среди задач, связанных как с аддитивными, так и с мультипликативными свойствами натуральных чисел, заслуживает внимания следующая: найти две арифметические прогрессии одинаковой длины и с натуральными членами

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_\nu,$$

произведения членов которых имели бы равные значения:

$$a_1 a_2 \ldots a_\nu = b_1 b_2 \ldots b_\nu.$$

Легко доказать, что при $\nu = 3$ задача имеет бесчисленное множество решений. Это следует хотя бы из формул

$$a_1 = b(a+2b), \quad a_2 = 2a^2+b^2, \quad a_3 = a(4a-b);$$
$$b_1 = b(4a-b), \quad b_2 = a(a+2b), \quad b_3 = 2a^2+b^2,$$

где a и b любые натуральные числа с условием $b < 4a$.

Можно получить и другие формулы, приводящие к решению при $\nu = 3$. Не вдаваясь в подробности, укажем, что применение известного метода Туэ(1) приводит к следующему трехпараметрическому решению:

$$a_1 = 2c(a^2-bc), \quad a_2 = a(ac-b^2), \quad a_3 = 2b(c^2-ab);$$
$$b_1 = 2b(a^2-bc), \quad b_2 = c(ac-b^2), \quad b_3 = 2a(c^2-ab).$$

Несложный анализ показывает, что для получения из этих формул натуральных решений достаточно выполнение одного из условий

$$0 < a < c < \frac{a^2}{b} \quad \text{или} \quad 0 < c < a < \frac{c^2}{b}.$$

(1) A. Thue, Det. Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter 7 (1896), p. 1-9.

Отметим наименьшее решение для случая $\nu = 3$:

$$a_1 = 4, a_2 = 5, a_3 = 6; \quad b_1 = 2, b_2 = 6, b_3 = 10.$$

Целью настоящей заметки является показать, что в случае $\nu = 4$ рассматриваемая задача имеет также бесчисленное множество решений.

Числа

$$a_1 = 2x - y, a_2 = x, a_3 = y, a_4 = 2y - x$$

составляют арифметическую прогрессию с разностью $y - x$. Если мы определим числа b_1, b_2, b_3 и b_4 с помощью равенств

$$(1) \qquad b_1 = \frac{d}{a}(2x - y), b_2 = \frac{ax}{b}, b_3 = \frac{by}{c}, b_4 = \frac{c}{d}(2y - x),$$

где a, b, c и d некоторые целые положительные параметры, то, как легко видеть, условие

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$$

выполняется. Для того, чтобы числа $b_1, \ldots, b_4$ также составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно выполнение условий

$$b_1 + b_3 = 2b_2, \quad b_2 + b_4 = 2b_3.$$

Эти условия, с учетом равенств (1), приводят к однородной относительно x и y системе

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2cx(a^2 - bd) &= by(ab - cd), \\ cx(ad - bc) &= 2by(bd - c^2). \end{aligned}$$

Приравняв определитель системы к нулю и сократив на $bc > 0$, получаем

$$(3) \qquad a^2(3bd - 4c^2) + ac(b^2 + d^2) + bd(3c^2 - 4bd) = 0.$$

Чтобы выразить из этого уравнения a рационально, определим b, c и d так, чтобы коэффициент при a^2 был равен нулю. Для этого достаточно принять

$$(4) \qquad b = 2m^2 p, c = 3mnp, d = 6n^2 p,$$

после чего из (3) получаем

$$a = \frac{21 m^3 n^3 p}{m^4 + 9n^4}.$$

Чтобы a было целым, положим

$$(5) \qquad p = m^4 + 9n^4;$$

тогда

$$a = 21m^3n^3. \tag{6}$$

Теперь из первого уравнения системы (2) после упрощений получаем

$$\frac{x}{y} = \frac{2p}{3q}, \tag{7}$$

где p определяется равенством (5), а

$$q = 12n^4 - m^4. \tag{8}$$

Из (7) следует

$$x = 2ps, \quad y = 3qs.$$

Если положить $s = n/k$ и ввести обозначение

$$r = 27n^4 - 4m^4, \tag{9}$$

то, учитывая полученные выше выражения (4) и (6) для параметров a, b, c и d, мы придем к следующему решению поставленной задачи для случая $\nu = 4$:

$$\begin{cases} ka_1 = 7m^4n, & kb_1 = 2mp, \\ ka_2 = 2np, & kb_2 = 21mn^4, \\ ka_3 = 3nq, & kb_3 = 2mq, \\ ka_4 = 2nr, & kb_4 = mr. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь m и n являются взаимно простыми натуральными числами, удовлетворяющими условию

$$m < n\sqrt[4]{6{,}75} \approx 1{,}611855n$$

(при выполнении этого условия $q > 0$ и $r > 0$), p, q и r вычисляются по формулам (5), (8) и (9), а за k можно принять наибольший общий делитель правых частей всех равенств (10).

Рассмотрим два численных примера. При $m = n = 1$ имеем $p = 10$, $q = 11$, $r = 23$, $k = 1$, что приводит к решению

$$7, 20, 33, 46; \quad 20, 21, 22, 23.$$

Если же принять $m = 3$, $n = 2$, то $p = 225$, $q = 111$, $r = 108$, $k = 18$ и мы приходим к решению

$$63, 50, 37, 24; \quad 75, 56, 37, 18.$$

Отметим, что формулы (10) не дают общего решения задачи при $\nu = 4$. Так, например, наименьшее решение

$$5, 7, 9, 11; \quad 3, 7, 11, 15$$

из этих формул не получается.

Вопрос о случае $\nu \geqslant 5$ остается открытым. Здесь можно поставить следующие вопросы:

1. Существует ли хотя бы одно решение задачи при $\nu = 5$? (**P 543**)
2. Имеет ли случай $\nu = 5$ конечное или бесконечное число решений ? (**P 544**)
3. Решается ли задача при $\nu > 5$? (**P 545**)

Reçu par la Rédaction le 30. 4. 1965