P. MIKULSKI, W. RUDZKI, K. WIŚNIEWSKI (Warszawa)

BADANIE WŁAŚCIWOŚCI ŚREDNICH TOWARÓW BEZKSZTAŁTNYCH PAKOWANYCH W PROSTOPADŁOŚCIENNE BELE

Towary bezkształtne dostarczane są luzem lub w opakowaniach. Jednym z rodzajów opakowania są prostopadłościenne bele lub skrzynie, których wymiary będziemy oznaczać literami a, b i c. Do takich towarów zalicza się np. surowiec tytoniowy, bawełnę, wełnę, herbatę itp.

Niektóre wymagania odbiorcze dotyczą właściwości średnich, których wartość zależy od warunków zewnętrznych. Są nimi na przykład: wilgotność, zawartość pożądanych lub niepożądanych składników, intensywność zapachu itp.

Do oceny średniej właściwości partii pobiera się losowo n bel z partii złożonej z N bel i z każdej z nich pobiera się l próbek pierwotnych, tworzących próbkę jednostkową; n próbek jednostkowych twórzy próbkę ogólną. Z próbki ogólnej pobiera się do przeprowadzenia badania technicznego k próbek laboratoryjnych.

Rozwiążemy dwa zadania. Pierwsze polega na podaniu metody pobierania próbek pierwotnych z poszczególnych bel wylosowanych do tego celu, a drugie — na ustaleniu związku między liczbą N bel w partii, liczbą n bel wylosowanych do badania i liczbą k.

1. O nasileniu występowania badanej właściwości w różnych miejscach beli

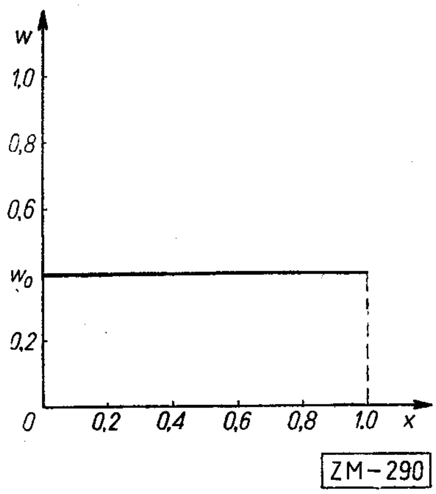
Wartość właściwości, jaka może występować w różnych miejscach beli, zależy od rodzaju właściwości, warunków zewnętrznych i rodzaju towaru. Ponadto zależy od wartości właściwości w chwili pakowania w bele, ścisłości układania towaru, jego struktury, zmian właściwości podczas transportu, składowania itp.

Jeśli towar jest jednorodny, to można do empirycznych zależności między położeniem punktu w beli a wartością właściwości, którą ma produkt w tym punkcie, dopasować pewne typy zależności teoretycznych o charakterze ciągłym.

Rozpatrywać będziemy zależności między odległością od powierzchni beli a wartością właściwości, wzdłuż dowolnej linii prostej przechodzącej przez środek beli. Długość tej linii będziemy w pewnych przypadkach dla uproszczenia przyjmowali za jednostkę, co nie zmniejsza ogólności rozważań, ponieważ wystarczy pomnożyć ostateczne wyniki podane w postaci odległości od początku prostej przez długość d tej prostej.

a. Zależność o charakterze równomiernym. Jeśli w czasie pakowania surowiec miał jednakową wartość w_0 interesującej nas właściwości, to po utworzeniu bel będzie on mógł mieć w każdym jej punkcie tę samą wartość w_0.

Jeśli badana właściwość może ulegać wyrównaniu, to po dłuższym okresie czasu składowania może nastąpić wyrównanie do wartości w_0, która jest wtedy średnią wartością właściwości w całej beli. Na rysunku 1 przedstawiono tę zależność graficznie odkładając na osi odciętych odległości od powierzchni beli, a na osi rzędnych wartości badanej właściwości.



Rys. 1. Zależność równomierna

Właściwości zwykle badane, jak np. te które wymieniono na początku, mierzy się w jednostkach niemianowanych lub w procentach, zatem nie zmniejszymy ogólności, jeśli badaną właściwość będziemy rozpatrywali na odcinku (0,1).

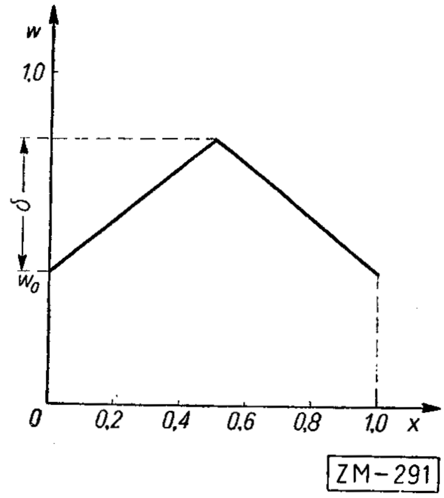
b. Zależność o charakterze liniowym. Jeśli badana właściwość na powierzchni beli ma wartość w_0, a w środku beli $w_0 + \delta$, to w najprostszym przypadku można mieć na uwadze zależność o charakterze liniowym przedstawioną na rysunku 2. Wartość δ może być dodatnia lub ujemna.

c. Zależność o charakterze parabolicznym. Jeśli otoczenie, w którym znajduje się bela, systematycznie wpływa na zmianę wartości właściwości, to można przyjąć zależność paraboliczną. Zależność tę przedstawiono na rysunku 3. Wierzchołek paraboli może być zarówno jej najwyższym punktem, jak i najniższym.

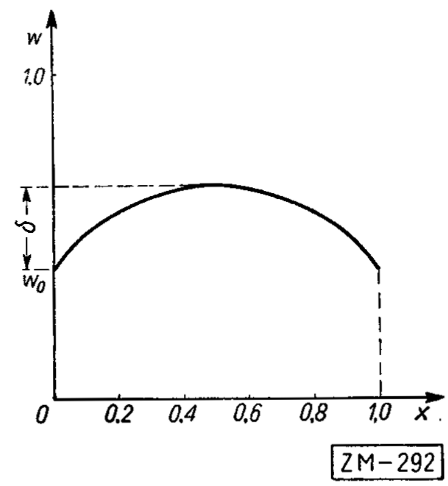
Z zależnością taką spotkano się przy badaniu wilgotności bel surowca tytoniowego. Otrzymano mianowicie zależność między odległością x od powierzchni beli, wzdłuż głównej przekątnej, a wilgotnością w w postaci

$$w = -13{,}9x^2 + 13{,}9x + 8{,}6.$$

Badania te wykonano w Łódzkiej Wytwórni Papierosów przy współudziale mgr inż. J. Grochowiny.



Rys. 2. Zależność liniowa



Rys. 3. Zależność paraboliczna

d. Inne zależności. W praktyce mogą pojawić się zależności o charakterze menisku, schodkowym, wykładniczym, trapezowym, mieszanym itp. Zależność może także nie mieć żadnej z prostych postaci, w szczególności wtedy, gdy produkt jest niejednorodny. Analityczne badanie takich przypadków jest trudne.

Zajmiemy się tylko pierwszymi trzema przypadkami, które obejmują znaczną część przypadków praktycznych.

2. Wyznaczanie miejsc w beli, z których należy pobierać próbki pierwotne

Bez względu na zależność między odległością od powierzchni beli a wartością badanej właściwości, istnieje dla każdej beli jej właściwość średnia, jak również istnieją takie punkty w beli, w których interesująca nas właściwość ma wartość równą średniej właściwości w beli.

W niniejszym rozważaniu przyjmujemy zasadę pobierania próbek pierwotnych z tych miejsc w beli, w których wartość badanej właściwości ma wartość równą średniej wartości właściwości całej beli.

W rozpatrywanych przez nas trzech rodzajach zależności zajmiemy się wyznaczeniem miejsc geometrycznych punktów w beli, w których wartość badanej właściwości jest równa średniej wartości właściwości w całej beli.

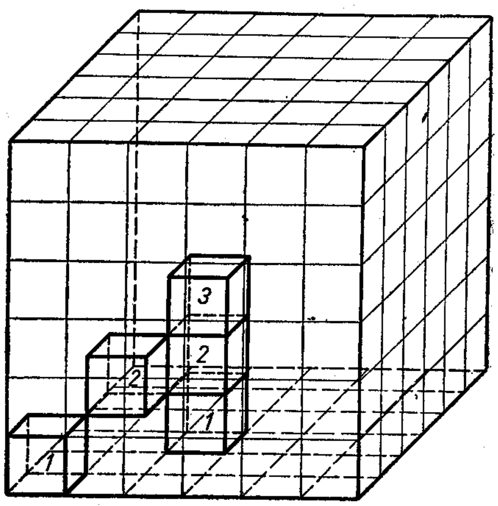
a. Zależność o charakterze równomiernym. Jeżeli zależność między odległością od powierzchni beli, wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez środek beli, a wartością interesującej nas właściwości jest stała, to w każdym punkcie beli wartość właściwości jest równa średniej wartości właściwości całej beli. Zależność tę będziemy nazywali *zależnością o charakterze równomiernym.*

Próbki pierwotne można pobierać z dowolnego punktu beli.

b. Zależność o charakterze liniowym. Załóżmy, że badana właściwość ma na powierzchni beli wartość w_0, w środku beli wartość $w_0+\delta$, a między tymi punktami wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez środek zmienia się liniowo. Liniową zależność między odległością x punktu od powierzchni beli a wartością w badanej właściwości możemy przedstawić w postaci

$$w = 2\delta x + w_0, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Każdą z krawędzi beli podzielmy na $2m$ części. Na rysunku 4 przedstawiono taki podział dla $m=3$, $w_0=0$, $\delta=3$. Przez punkty podziału prowadzimy płaszczyzny równoległe do odpowiednich powierzchni beli. W ten sposób cała bela zostanie podzielona na $(2m)^3$ prostopadłościanów.



Rys. 4

Przy takim podziale każdy z prostopadłościanów pierwszej zewnętrznej warstwy ma wartość właściwości $w_0+\delta/m$. W drugiej warstwie wartość właściwości w każdym z jej prostopadłościanów jest $w_0+2\delta/m$ itd. Ostatnia warstwa, a więc prostopadłościany znajdujące się w środku beli, ma wartość właściwości $w_0+m\delta/m$.

Średnia wartość $\overline{w}$ badanej właściwości w całej beli wyraża się wzorem

$$\overline{w} = \frac{1}{(2m)^3}\sum_{i=1}^{m}\left[w_0+i\frac{\delta}{m}\right][6(2m-2i+1)^2+2].$$

Pierwszy nawias kwadratowy pod znakiem sumy oznacza wartość badanej właściwości w i-tej warstwie, drugi liczbę prostopadłościanów w tej warstwie.

Po wykonaniu działań otrzymuje się

$$\overline{w} = w_0+\frac{\delta}{4}\left(1+\frac{1}{m}\right)^2.$$

Wyrażenie powyższe przedstawia średnią wartość badanej właściwości przy podziale beli na $(2m)^3$ prostopadłościanów. Zwiększając liczbę prostopadłościanów otrzymuje się w granicy

$$\overline{w} = w_0 + \frac{\delta}{4}.$$

Podstawiając tę wartość do równania linii prostej otrzymuje się $x = \frac{1}{8}$. Oznacza to, że w przypadku, gdy badana właściwość w zmienia się liniowo wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez środek beli, wartość średnia tej właściwości leży w odległości $\frac{1}{8}$ długości tej prostej od powierzchni beli.

c. Zależność o charakterze parabolicznym. Załóżmy, analogicznie jak w poprzednim przypadku, że badana właściwość ma na powierzchni beli wartość w_0, w środku zaś beli wartość $w_0 + \delta$, między tymi punktami wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez środek beli zmienia się parabolicznie. W tym przypadku zależność między odległością x od powierzchni beli a wartością w badanej właściwości można przedstawić w postaci

$$w = -4\delta x(x-1) + w_0, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Przeprowadzamy podział beli na prostopadłościany tak jak poprzednio. W tym przypadku każdy z prostopadłościanów i-tej warstwy liczonej od powierzchni beli ma wartość właściwości

$$w = w_0 + \frac{\delta}{m^2} i(2m-i).$$

Średnia wartość $\overline{w}$ badanej właściwości w całej beli wyraża się wzorem

$$\overline{w} = \frac{1}{(2m)^3} \sum_{i=1}^{m} \left[w_0 + \frac{\delta}{m^2} i(2m-i)\right][6(2m-2i+1)^2+2].$$

Po wykonaniu działań otrzymuje się

$$\overline{w} = w_0 + \frac{\delta}{60}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[24+\frac{1}{m}\left(21-\frac{11}{m}-\frac{4}{m^2}\right)\right].$$

Przechodząc, jak poprzednio, z m do granicy otrzymuje się ostatecznie

$$\overline{w} = w_0 + 0{,}4\delta.$$

Podstawiając tę wartość do równania paraboli otrzymuje się równanie kwadratowe $x^2 - x + 0{,}1 = 0$, którego pierwiastki $x_1 = 0{,}113$ i $x_2 = 0{,}887$ są rozwiązaniem postawionego zadania.

Z rozwiązania tego wynika przepis postępowania. Jeśli są podstawy do przypuszczenia, że zależność między odległością od powierzchni beli a badaną właściwością wzdłuż prostej przechodzącej przez środek beli ma charakter paraboliczny, to zgodnie z przyjętą zasadą należy próbki pobierać z miejsca beli na prostej w odległości 0,113 lub 0,887 od powierzchni beli.

W obydwu przedstawionych tu rozwiązaniach charakterystyczny jest fakt, że miejsce z którego należy pobrać próbkę nie zależy od parametrów przyjętej zależności między odległością a wartością właściwości, ale jedynie od charakteru tej zależności.

W przypadku zależności liniowej odległość wynosiła 0,125, a w przypadku parabolicznym 0,113.

Podane tu dwa rozwiązania (¹) przeprowadzone metodą elementarną dają jedynie w przybliżeniu pogląd o miejscu, z którego należy pobierać próbki, a to z tego powodu, że charakter zależności ma wpływ na tę odległość.

Otwarta pozostaje sprawa, czy dalsze badania powinny iść w kierunku ustalenia obszaru, z którego należy pobierać próbki, drogą rozważenia wszystkich praktycznie możliwych funkcji, czy też prowadzenia kontroli dwustopniowej. W pierwszym stopniu z jednej beli pobierano by próbki dla określenia typu zależności, a z następnych bel — z tych miejsc, w których zgodnie z otrzymaną zależnością badana właściwość ma wartość średnią.

Określenie miejsca w beli, w którym wartość właściwości jest równa wartości średniej w całej beli, upoważnia teoretycznie do pobrania z tego miejsca tylko jednej próbki pierwotnej. W praktyce jednak przyjęte założenia co do ciągłości, ścisłości układania, struktury itp. nie są rygorystycznie spełnione, przeto ostrożniej jest ustalić regułę pobierania co najmniej dwu próbek pierwotnych z każdej beli przeznaczonej do badania.

Można iść jeszcze nieco dalej, jak to uczyniono dla surowca tytoniowego badanego ze względu na wilgotność, przyjmując, że należy pobierać próbki z czterech miejsc na głównych przekątnych beli. Decyzja ta wynikła ze spostrzeżenia, iż wilgotności na poszczególnych ścianach beli różniły się nieco między sobą. Z tego też względu zalecono pobierać próbki wzdłuż głównej przekątnej, a nie wzdłuż wysokości chociaż takie pobieranie próbek jest w praktyce łatwiejsze.

(¹) W pierwszej wersji niniejszej pracy podaliśmy rozwiązanie tych dwóch przypadków inną metodą. J. Oderfeld zwrócił nam uwagę, że rozwiązanie to nie spełniało niektórych stawianych założeń. Niniejsze rozwiązanie powstało równolegle z ogólnym rozwiązaniem zawartym w pracy Oderfelda [1], zamieszczonej w tym samym numerze.

Całość produktu pobranego z beli jako próbki pierwotne stanowi próbkę jednostkową. Liczba próbek jednostkowych pobieranych do badania jest równa liczbie n bel, z których pobiera się próbki pierwotne.

3. Ustalenie zależności między liczbą N bel w partii, liczbą n próbek jednostkowych i liczbą k próbek laboratoryjnych

Oznaczmy przez $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \ldots, \bar{w}_N$ średnie wartości badanej właściwości w poszczególnych N belach, składających się na dostarczoną partię; wtedy średnią wartość właściwości badanej partii określa wzór

$$W = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_i.$$

Odchylenie średnie σ średnich wartości właściwości w partii ma postać

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{w}_i - W)^2}.$$

Po losowym, bezzwrotnym pobraniu i zbadaniu n bel spośród N otrzymuje się średnią wartość badanej właściwości w próbce w postaci

$$\bar{\bar{w}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i.$$

Odchylenie średnie $\sigma_{\bar{\bar{w}}}$ średniej $\bar{\bar{w}}$ wynosi

$$\sigma_{\bar{\bar{w}}}\ \sigma = \sqrt{(N-n)/n(N-1)}.$$

Całość produktu składającego się z n próbek jednostkowych tworzy próbkę ogólną. Z próbki ogólnej pobiera się k próbek laboratoryjnych do oszacowania średniej wartości $\bar{\bar{w}}$ badanej właściwości w próbce ogólnej. Próbkę ogólną przygotowuje się w ten sposób, żeby wartość badanej właściwości w każdym miejscu była jednakowa i równa $\bar{\bar{w}}$.

Oznaczmy przez $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ wyniki badania k próbek laboratoryjnych. Na wyniki te składają się wartość właściwości $\bar{\bar{w}}$ w próbce ogólnej i błędy pomiarów $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k$; możemy więc napisać

$$y_j = \bar{\bar{w}} + z_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Zakładamy, jak to się zwykle czyni, że zmienna losowa z, której realizacjami są $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k$, ma rozkład normalny o średniej zero i odchyleniu średnim, które oznaczymy przez σ_z.

Jako oszacowanie średniej wartości właściwości partii przyjmuje się średnią

$$\bar{y} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j = \bar{\bar{w}} + \bar{z}.$$

Odchylenie średnie średniej $\bar{z}$ jest $\sigma_{\bar{z}} = \sigma_z/\sqrt{k}$. Ponieważ zmienne $\bar{\bar{w}}$ i $\bar{z}$ są niezależne, więc $\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{\bar{w}}}^2 + \sigma_{\bar{z}}^2}$, czyli

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}\sigma^2 + \frac{1}{k}\sigma_z^2}.$$

Zmienna losowa $\bar{y}$ ma rozkład normalny $N(W, \sigma_{\bar{y}})$, zatem

$$P(|W-\bar{y}| \leqslant t_a \sigma_{\bar{y}}) = \Phi(t_a),$$

gdzie a jest przyjętym poziomem istotności.

Jeśli żądamy, żeby różnica między prawdziwą wartością W interesującej nas właściwości partii a oszacowaną $\bar{y}$ nie przekraczała wartości Δ, to mamy kolejne zależności

$$\Delta = t_a \sigma_{\bar{y}}, \qquad \sigma_{\bar{y}} = \frac{\Delta}{t_a}, \qquad \left(\frac{\Delta}{t_a}\right)^2 = \frac{N-n}{n(N-1)}\sigma^2 + \frac{1}{k}\sigma_z^2.$$

Ostateczna zależność ma postać

$$n = \frac{N}{1+(N-1)\beta}, \qquad \text{gdzie} \qquad \beta = \frac{(\Delta/t_a)^2 - \sigma_z^2/k}{\sigma^2}.$$

W ostatnich wyrażeniach dane są N i a. Z tablic funkcji Laplace'a odczytuje się t_a. Wartości σ i σ_z otrzymuje się z przeprowadzonych doświadczeń na kilka partiach towaru. O wartościach Δ i k zakłada się, że są dane, a jeśli jest to możliwe — uzyskuje się z analizy techniczno-ekonomicznej. Jak łatwo zauważyć, powinna zachodzić relacja $k \geqslant (t_a \sigma_z/\Delta)^2$. Ponadto łatwo sprawdzić, że gdy $N \to \infty$, to $n \to 1/\beta$.

PRZYKŁAD. Z przeprowadzonych badań wilgotności bel surowca tytoniowego w Łódzkiej Wytwórni Papierosów otrzymano wartości: $\sigma = 0{,}8$, $\sigma_z = 0{,}5$. Przyjęto: $\Delta = 1$, $k = 3$; poziom istotności $a = 0{,}05$, stąd $t_a = 1{,}96$.

Po wstawieniu tych wartości do ostatnich wzorów otrzymano zależność $n = N/(0{,}72+0{,}28N)$. Dla celów praktycznych zależność tę podaje się w postaci tabelki.

Praca cytowana

[1] J. Oderfeld, *Powierzchnie o wilgotności średniej*, Zastosowania Matematyki 4 (1959), str. 341-349.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 26. 4. 1958

П. МИКУЛЬСКИЙ, В. РУДСКИЙ, К. ВИСЬНЕВСКИЙ (Варшава)

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНИХ КАЧЕСТВ БЕСФОРМЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ, УПАКОВЫВАЕМЫХ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНЫЕ КИПЫ

РЕЗЮМЕ

Многие товары, доставляемые в кипах или параллелепипедных ящиках, исследуются с точки зрения их средних качеств. Для данного случая поданы найболее простые функциональные зависимости между положением места в кипе и значением исследуемого качества. Первичные пробы побираются из тех мест кипы, где значение качества равно его среднему значению по всей кипе. Для указанных функций эти места оказались независимыми от параметров функций, а единственно от их вида.

Во второй части работы приводится способ установления зависимости между числом кип в партии товара и числом кип из которых побираются первичные пробы. Принимаются во внимание также ошибки измерений.

P. MIKULSKI, W. RUDZKI, K. WIŚNIEWSKI (Warszawa)

INVESTIGATION OF THE MEAN PROPERTIES OF AMORPHOUS GOODS PACKED IN RECTANGULAR PARALLELEPIPED BALES

SUMMARY

Numerous amorphous goods delivered in bales or cases which are rectangular parallelepipeds in shape are investigated with regard to their mean properties. The authors give the simplest functional relations between the position of the place in a bale and the value of the property under investigation. They adopt the principle of taking original samples from those places in the bale in which the value of the property is equal to its mean value in the whole bale. For the functions given in the paper these places have proved to be independent of the parameters of the given function, and dependent only on its shape.

In the second part of the paper the authors give a method of establishing the relation between the number of bales in the lot and the number of bales from which original samples are taken, the error of measurement being taken into account.
