ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 2 (1970)

ALGORITHM 6

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

HOMOGRAPHIC TRANSFORMATION OF THE ZEROS OF A POLYNOMIAL

1. Procedure declaration

procedure *nrpuc*(n, a);
  value n;
  integer n;
  array a;
  comment The procedure *nrpuc* calculates the coefficients of the polynomial having all zeros of the form

(1) $$y_k = \frac{x_k+1}{x_k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

where $x_1, x_2, \ldots$ are all, different from one, zeros of the polynomial

(2) $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

with given coefficients.
Data:
  n — the degree of the polynomial (2),
  $a[0:n]$ — array of coefficients of that polynomial.
Results:
  $a[0:n]$ — array of coefficients of the polynomial with zeros of type (1), ordered as in the data ($a[0]$ — coefficient of x^n, which may be equal to zero,..., $a[n]$ — free term).
Remark: If $a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p \neq 0$ holds in (2), then the obtained polynomial has also a multiple zero of order p equal to 1;

begin
  integer j, k;
  real *aj*, *aj1*, *ak*;
  for $k := 1$ **step** 1 **until** n **do**

```
    begin
      ak := a[k];
      aj := 0;
      for j := k step -1 until 1 do
        begin
          aj1 := a[j-1];
          a[j] := aj1+aj;
          aj := aj1
        end j;
      a[0] := a[0]+ak
    end k;
  ak := 2;
  for k := 1 step 1 until n do
    begin
      aj := ak × a[k];
      for j := k step -1 until 1 do
        begin
          aj1 := a[j-1];
          a[j] := aj-aj1;
          aj := aj1
        end j;
      ak := ak+ak
    end k
end nrpuc
```

2. Application. The transformation $y = (x+1)/(x-1)$ transforms the complex halfplane

$$\operatorname{re} x < 0 \tag{3}$$

into the interior of the unit circle $|y| < 1$ and the interior of the unit circle

$$|x| < 1 \tag{4}$$

into the halfplane $\operatorname{re} y < 0$. That is why the procedure *nrpuc* may be used for shifting the search for zeros of the polynomial from region (3) to region (4), and vice versa.

3. Method used. It is known that for a given polynomial (2) the polynomial with zeros (1) takes the form

$$\begin{aligned} w(x) = {} & a_0(x+1)^n + a_1(x+1)^{n-1}(x-1) + \dots \\ & \dots + a_{n-1}(x+1)(x-1)^{n-1} + a_n(x-1)^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Its coefficients for $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^0$ are calculated in two stages. The first consists in introducing an auxiliary variable

$$y = \frac{1}{2}(x-1)$$

and in calculating the coefficients of $y^n, y^{n-1}, \ldots, y^0$ in the polynomial

$$2^{-n}w(x) = a_0(y+1)^n + a_1(y+1)^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}(y+1)y^{n-1} + a_n y^n.$$

To do this one forms successively the coefficients of the following polynomials

$$v_0(y) = a_0,$$

$$v_k(y) = v_{k-1}(y)(y+1) + a_k y^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Let

$$v_n(y) = a'_0 y^n + a'_1 y^{n-1} + \ldots + a'_n.$$

In the second stage the coefficients of $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^0$ in the polynomial

$$w(x) = 2^n v_n(y) = a'_0(x-1)^n + 2a'_1(x-1)^{n-1} + \ldots + 2^n a'_n$$

are calculated. To that purpose the coefficients of the following polynomials are successively formed:

$$w_0(x) = a'_0,$$

$$w_k(x) = w_{k-1}(x)(x-1) + 2^k a'_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

4. Certification. The procedure *nrpuc* has been verified on several examples. In the sequel are given: 1° the given polynomials, 2° the exact polynomials obtained (without rounding) from (5), and 3° the polynomials obtained by the procedure *nrpuc* on the Elliott 803 computer:

(i) $x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4,$
$72x^5 - 48x^4 + 80x^3 - 48x^2 + 8x,$
$71.9999997x^5 - 47.9999999x^4 + 79.9999999x^3 - 47.9999999x^2 +$
$+ 7.99999999x;$

(ii) $x^4 + 47.88843x^3 + 797.2789x^2 + 5349.457x + 12296.555,$
$18492.17933x^4 - 59785.35714x^3 + 72190.77220x^2 - 38579.08286x +$
$+ 7697.48847,$
$18492.1795x^4 - 59785.3573x^3 + 72190.7726x^2 - 38579.0831x +$
$+ 7697.48854;$

(iii) $.0000248015873x^8 + .000198412698x^7 + .00138888889x^6 +$
$+ .00833333333x^5 + .0416666667x^4 + .166666667x^3 + .5x^2 + x + 1,$
$2.7182787702053x^8 - 16.3097222228936x^7 + 43.4923611103164x^6 -$
$- 67.0513888868792x^5 + 65.2378472224110x^4 - 40.9569444464632x^3$
$+ 16.1868055560924x^2 - 3.6787698405896x + .3678819441493,$

$$2.71827877x^8 - 16.3097223x^7 + 43.4923609x^6 - 67.0513889x^5 + \\ + 65.2378468x^4 - 40.9569443x^3 + 16.1868055x^2 - 3.67876979x + \\ + .367881940.$$

The execution time of the procedure statement *nrpuc* (on Elliott 803) is approximately equal to $40n^2 + 180n$ msec.

DEPT. OF NUMERICAL METHODS
UNIVERSITY OF WROCŁAW

Received on 4. 2. 1969

ALGORYTM 6

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

PRZEKSZTAŁCENIE HOMOGRAFICZNE ZER WIELOMIANU

STRESZCZENIE

Procedura *nrpuc* oblicza współczynniki wielomianu, którego wszystkimi zerami są liczby (1), gdzie $x_1, x_2, \ldots$ są wszystkimi różnymi od 1 zerami wielomianu (2) o danych współczynnikach.

Dane:

n — stopień wielomianu (2),

$a[0:n]$ — tablica współczynników tego wielomianu.

Wyniki:

$a[0:n]$ — tablica współczynników wielomianu o zerach (1), uporządkowanych jak w danych ($a[0]$ — współczynnik przy x^n, być może równy zeru, ..., $a[n]$ — wyraz wolny).

Uwaga: Jeśli w (2) byłoby $a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p \neq 0$, to otrzymany wielomian miałby dodatkowo p-krotne zero 1.

Procedurę *nrpuc* sprawdzono na 3 przykładach. W § 4 pracy podano wielomiany wyjściowe, wielomiany z nich otrzymane dokładnie (bez zaokrągleń) według wzoru (5) i wielomiany otrzymane za pomocą procedury *nrpuc* na maszynie cyfrowej Elliott 803. Czas wykonania instrukcji procedury *nrpuc* wynosi ok. $40\,n^2 + 180\,n$ msek.

АЛГОРИТМ 6

С. ПАШКОВСКИ (Вроцлав)

ГОМОГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА

РЕЗЮМЕ

Процедура *nrpuc* вычисляет коэффициенты многочлена, всеми нулями которого являются числа (1), где $x_1, x_2, \ldots$ — все отличные от 1 нули многочлена (2) с данными коэффициентами.

Данные:

n — степень многочлена (2),

$a[0:n]$ — массив коэффициентов этого многочлена.

Результаты:

$a[0:n]$ — массив коэффициентов многочлена с нулями (1), упорядоченных как в данных ($a[0]$ — коэффициент при x^n, который может быть равным 0, ..., $a[n]$ — свободный член).

Замечание: Если бы в (2) было $a_0 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p \neq 0$, то полученный многочлен имел бы дополнительно p-кратный нуль равный 1.

Процедура *nrpuc* была проверена на 3 примерах. В статье приведены данные многочлены, многочлены полученные точно (без округления) по формуле (5) и многочлены полученные с помощью процедуры *nrpuc* на ЭВМ Эллиотт 803. Время выполнения оператора процедуры *nrpuc* приблизительно равно $40n^2+180n$ мсек.