ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1961)

J. BATTEK i J. PERKAL (Wrocław)

O PEWNYM ZAGADNIENIU PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

W ostatnich czasach wyodrębniła się i rozwinęła nowa gałąź matematyki, tzw. *badania operatywne*. Jedno z typowych zadań tej dziedziny daje się napisać jako układ równań

$$(1) \qquad f_i(x, a_i, b_i, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

gdzie $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$, $b_i = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}), \ldots$ są danymi układami liczb. Rozwiązanie takiego zadania polega na znalezieniu układu nieujemnych liczb $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

W przypadku, gdy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie x układu (1), zadanie to wymaga wyboru jednego z możliwych rozwiązań, optymalnego ze względu na jakieś dodatkowe warunki. Zazwyczaj optymizacja tych dodatkowych warunków daje się wyrazić tak, że spośród rozwiązań układu (1) wybieramy to, dla którego pewne wyrażenie

$$(2) \qquad G(x, p, q, \ldots)$$

osiąga maksimum. W wyrażeniu tym $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \ldots$ są również danymi układami liczb. Ten szczególny przypadek nazywa się *zagadnieniem programowania*.

W przypadku, gdy równania układu (1) są liniowe i gdy wyrażenie (2) jest również liniowe, mamy do czynienia z tzw. *zagadnieniem programowania liniowego*. Zostało ono rozwiązane ogólnie przez Dantziga tzw. *metodą simpleksu*. Mimo to, często poszukuje się innych, dogodniejszych rozwiązań rozmaitych zagadnień programowania liniowego.

Matematyk izraelski, J. Intrator, podczas swego pobytu w Polsce przedstawił nam wraz z częściowym rozwiązaniem następujące zagadnienie:

Pracodawca potrzebuje robotników do wykonywania różnych prac, np. A jest kopaniem rowów, B — układaniem cegły, ..., K — sprzątaniem. Prac tych jest k. Do wykonania pracy A pracodawcy potrzeba m_A robotników, do pracy B — $m_B, \ldots,$ do pracy K — m_K robotników. Razem potrzeba mu $m_A + m_B + \ldots + m_K = m$ robotników. Otóż zgłasza się owych m robotników i należy każdemu z nich przydzielić pracę. Oczywiście można to zrobić na wiele sposobów. Pokażemy, że to zadanie jest typowym zadaniem ekonomicznym z niejednoznacznym rozwiązaniem układu równań (1).

Oznaczmy literą x macierz niewiadomych x_{Ij} o k kolumnach i m wierszach. Każda kolumna odpowiada jednej z k prac: $A, B, \ldots, K$ i dlatego wskaźnik I będzie przebiegał te wartości: $I = A, B, \ldots, K$. Każdy wiersz odpowiada jednemu robotnikowi, $j = 1, 2, \ldots, m$. Niewiadoma x_{Ij} może przybierać jedną z dwóch wartości 0 lub 1, a mianowicie, jeśli niewiadoma x_{Ij} przybiera wartość 1, to znaczy, że robotnik o numerze j został przydzielony do pracy I; natomiast jeśli niewiadoma x_{Ij} przybiera wartość 0, to robotnik j-ty nie zostaje przydzielony do pracy I. Oczywiście jeden robotnik nie może być przydzielony do dwóch lub więcej prac, ale musi być przydzielony dokładnie do jednej pracy. A więc macierz x musi mieć tę własność, że w każdym jej wierszu musi wystąpić jedna jedynka, a poza nią same zera. Innymi słowy, w każdym wierszu, czyli dla każdego j, musi zachodzić równanie

$$(1') \qquad \sum_{I=A}^{K} x_{Ij} = 1.$$

Równań takich jest m. Poza tym, jak wiadomo, do pracy I mamy przeznaczyć m_I robotników. Znaczy to, że w kolumnie I macierzy x ma występować dokładnie m_I jedynek, a poza tym zera. Innymi słowy, w każdej kolumnie, czyli dla każdego I, musi zachodzić równanie:

$$(1'') \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{Ij} = m_I.$$

Takich równań jest k. A więc elementy macierzy x, których jest $n = km$, muszą spełniać $s = k+m$ równań.

Zadanie to ma wiele rozwiązań; można bowiem przeznaczyć do pierwszej pracy pierwszych m_A robotników, do następnej pracy — następnych m_B robotników itd. Macierz x miałaby wtedy w pierwszej kolumnie jedynki na pierwszych m_A miejscach, w drugiej na następnych m_B miejscach itd., a poza tym same zera. Prócz tej macierzy, którą oznaczymy przez x_0, rozwiązanie zadania da każda macierz otrzymana z macierzy x_0 przez przestawienie wierszy. Wobec tego musimy wybrać jedno z rozwiązań, optymalne ze względu na dodatkowe warunki zadania.

Te dodatkowe warunki mogą być różnej natury. J. Intrator żąda, żeby tak rozdzielić robotników do poszczególnych prac, by łączna wydajność ich pracy była jak największa. W tym celu przed rozwiązaniem zadania poddaje się wszystkich robotników próbie, by oszacować ich wydajności w poszczególnych pracach. I tak, niech macierz $\boldsymbol{w}$ o elementach w_{Ij} ($I = A, B, \ldots, K$; $j = 1, 2, \ldots, m$) będzie wynikiem owej próby, a więc w_{A1} będzie wydajnością pierwszego robotnika przy kopaniu rowów (w złotych na godzinę), w_{B1} będzie wydajnością tego samego robotnika przy układaniu cegły, itd. Ogólnie w_{Ij} będzie wydajnością w złotych na godzinę j-tego robotnika przy pracy I. Przez łączną wydajność $W(x)$ pracy wszystkich robotników, rozmieszczonych przy poszczególnych pracach według macierzy $\boldsymbol{x}$, będziemy rozumieli sumę wydajności poszczególnych robotników przy przydzielonych im pracach:

$$W(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=A}^{K} \sum_{j=1}^{m} x_{Ij} w_{Ij} = S\boldsymbol{xw}, \tag{2'}$$

gdzie przez S oznaczymy sumę wszystkich elementów macierzy, a przez $\boldsymbol{xw}$ macierz o elementach $g_{Ij} = x_{Ij} w_{Ij}$. Dodatkowy warunek polega więc na tym, żeby wyrażenie (2') osiągnęło maksimum. Tak właśnie należy przeznaczyć robotników, czyli poprzestawiać wiersze macierzy $\boldsymbol{x}_0$. Ponieważ równania (1'), (1'') i wyrażenie (2') są liniowe względem niewiadomych x_{Ij}, nasze zadanie jest zadaniem programowania liniowego.

W literaturze znane jest tzw. *zagadnienie transportowe* („the transportation problem", zob. np. [2]) w następującym brzmieniu. Dostawca D_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) ma dostarczyć s_j towaru, a odbiorca O_I ($I = A, B, \ldots, K$) ma otrzymać m_I tego towaru. Oczywiście

$$\sum_{I=A}^{K} m_I = \sum_{j=1}^{m} s_j = M,$$

gdzie M jest ogólną ilością towaru dostarczanego przez wszystkich dostawców i otrzymywanego zarazem przez wszystkich odbiorców. Koszt transportu jednostki towaru od dostawcy D_j do odbiorcy O_I wynosi w_{Ij}. Należy ustalić dostawy d_{Ij} tak, żeby było

$$\sum_{j=1}^{m} d_{Ij} = m_I, \qquad \sum_{I=A}^{K} d_{Ij} = s_j$$

i żeby koszt transportu, czyli wyrażenie

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{I=A}^{K} d_{Ij} w_{Ij},$$

osiągnęło minimum.

W szczególnym przypadku, gdy d_{Ij} mogą się równać 0 lub 1 i $s_j = 1$ dla każdego j, a więc $M = m$, zagadnienie to nosi nazwę *zagadnienia* *przydziału pracy* (the assignment problem, zob. np. [4]). Jest to właśnie zagadnienie Intratora.

Oprócz ogólnego rozwiązania Dantziga (patrz [1]), które stosuje się również do rozwiązania tego zadania, znane są jeszcze inne rozwiązania szczegółowe (patrz [2], [3], [4], [5]). W dalszym ciągu przedstawimy jeszcze jedno rozwiązanie tego zadania, otrzymane przez nas niezależnie od rozwiązań poprzednio opublikowanych (ani Intrator, ani autorzy niniejszej pracy nie znali wcześniejszych rozwiązań), a znamienne tym, że nadaje się do konstrukcji automatu, który eliminuje wszelkie rachunki.

Macierz niewiadomych x ma tyle wierszy i tyle kolumn, co znana macierz w. Ponieważ niewiadome x_{Ij} mogą przybierać tylko wartości 0 i 1, można macierz x nałożyć na macierz w nie znacząc w ogóle zer, a jedynki macierzy x znacząc jako podkreślenia odpowiednich elementów macierzy w. Zadanie nasze polega więc na podkreśleniu m elementów macierzy w w ten sposób, żeby w każdym wierszu podkreślony był dokładnie jeden element, a w I-tej kolumnie m_I elementów. Każdy robotnik zostanie przeznaczony do tej pracy, w której jego wydajność została podkreślona. Suma podkreślonych elementów ma być jak największa.

Można by zaproponować następujące rozwiązanie, które nazwiemy *wstępnym*: W każdym wierszu macierzy w podkreślimy największy element, tzn. każdego robotnika przeznaczymy do pracy, w której uzyskuje on największą wydajność. Takie rozwiązanie daje gwarancję, że wyrażenie W osiągnie maksimum i że będą spełnione równania (1′), natomiast może się okazać, że nie będą spełnione równania (1″). Znaczy to, że niewątpliwie przy wstępnym rozwiązaniu łączna wydajność będzie największa, a każdy robotnik będzie przydzielony do jednej pracy, natomiast może się okazać, że do pracy I przydzielonych zostanie w ten sposób nie m_I robotników, lecz więcej lub mniej. Mogłoby się zdarzyć, że np. wszyscy robotnicy osiągnęliby największą wydajność przy kopaniu rowów. Wówczas rozwiązanie wstępne skierowałoby wszystkich robotników do kopania rowów, co jest sprzeczne z tym, że do kopania rowów miało być skierowanych tylko m_A robotników, a reszta do innych prac.

Postaramy się teraz przekształcić macierz w tak, by rozwiązanie wstępne dla tej przekształconej macierzy było właściwym rozwiązaniem zadania, tzn. by rozwiązanie wstępne przekształconej macierzy kierowało do pracy I dokładnie m_I robotników. Przekształcenie to będzie polegało na dodawaniu stałej liczby h_I do każdej liczby I-tej kolumny macierzy w. Oznaczmy tak przekształconą macierz literą v;

(3) $$v = w + h \qquad v_{Ij} = w_{Ij} + h_I.$$

Łączna wydajność pracy przekształconej macierzy v dla dowolnego rozwiązania x spełniającego równania (1′) i (1″) będzie równa (patrz równanie (2′)):

$$V(x) = \sum_{I=A}^{K} \sum_{j=1}^{m} x_{Ij}(w_{Ij}+h_I) = W(x) + \sum_{I=A}^{K} m_I h_I .$$

Zatem $V(x)$ różni się od $W(x)$ o liczbę stałą, zależną jedynie od liczb m_I oraz h_I, a niezależną od macierzy x. Stąd wynika, że jeśli jakaś macierz x_M jest najlepszym rozwiązaniem ze względu na macierz v, tzn. że $V(x_M)$ jest większe niż $V(x)$ dla dowolnej macierzy x, to ta sama macierz x_M jest równocześnie najlepszym rozwiązaniem ze względu na macierz w ($W(x)$ osiąga maksimum dla $x = x_0$). Liczby h_I tak dobierzemy, by wstępne rozwiązanie dla macierzy $v = w+h$ było właściwym rozwiązaniem, tj. by spełniało równania (1″). Innymi słowy w ten sposób dobierzemy stałe h_I, żeby po ich dodaniu do odpowiednich kolumn macierzy w i po podkreśleniu największej liczby w każdym wierszu tak otrzymanej macierzy okazało się, że w I-tej kolumnie jest podkreślonych m_I liczb.

Przekształcenie (3) będziemy wykonywali stopniowo, powiększając poszczególne kolumny. Zwróćmy więc uwagę na macierz w i w każdym jej wierszu podkreślmy największy element. Gdyby się okazało, że wykonawszy tę operację podkreśliliśmy w każdej kolumnie tyle elementów, ile potrzeba, tj. że w I-tej kolumnie podkreśliliśmy m_I elementów, to wstępne rozwiązanie byłoby rozwiązaniem właściwym, spełniającym nie tylko równania (1′), ale i (1″), a zarazem oczywiście maksymizującym wyrażenie (2′). Jeśliby jednak tak nie było, to w niektórych kolumnach byłoby za mało podkreślonych elementów (mniej niż m_I), a w niektórych innych za dużo (bo łącznie podkreśleń jest tyle, ile trzeba, tj. tyle, ile wierszy ma macierz w, czyli m). Kolumny ze zbyt małą ilością podkreśleń będziemy krótko nazywali *kolumnami z niedomiarem*, a kolumny ze zbyt dużą ilością podkreśleń — *kolumnami z nadmiarem*.

Wydajności mierzymy w złotych na godzinę, więc elementy macierzy w będą dane z jakąś dokładnością, np. do jednego grosza lub do setnej części grosza. Na większą dokładność nie pozwolą przyrządy i metody wyznaczania wydajności. Oznaczmy tę dokładność symbolem t_0.

Pierwszym krokiem przekształcenia (3) będzie następujące działanie. Bierzemy z macierzy w dowolną kolumnę z niedomiarem. Przypuśćmy, że jest to kolumna B. Wszystkie elementy tej kolumny powiększymy o t_0. Co może się stać z podkreśleniami? Jeśli jakaś liczba kolumny B była podkreślona, to znaczy, że była ona największa w swoim wierszu. Ale przez powiększenie się nie przestała być największą w tym wierszu, czyli pozostanie nadal podkreślona. Jeśli natomiast w jakimś wierszu p była podkreślona liczba w innej kolumnie niż B, np. w kolumnie I, to znaczy, że liczba podkreślona w tym wierszu w_{Ip} była przedtem większa od liczby

w_{Bp}. Skoro jednak liczbę w_{Bp} w kolumnie B powiększyliśmy, może się okazać, że przekroczy ona podkreśloną dotychczas liczbę w_{Ip}. Jeżeli okaże się, że w rozważanym wierszu podkreślona przedtem liczba w_{Ip} stanie się mniejsza niż liczba w tym wierszu i w kolumnie B (równa już $w_{Bp}+t_0$), to trzeba będzie wówczas wymazać podkreślenie spod liczby w_{Ip}, a podkreślić liczbę w kolumnie B. Powiemy wówczas, że podkreślenie przeskoczy w tym wierszu z kolumny I do kolumny B.

A więc przy powiększaniu elementów kolumny B kolejno o liczbę t_0 podkreślenia mogą nie ulegać zmianom lub mogą przeskakiwać z innych kolumn do kolumny B. Zatem ilość podkreśleń w kolumnie B nie zmniejszy się, a ilość podkreśleń w innych kolumnach nie powiększy się. Przy tym im bardziej powiększymy kolumnę B, tym więcej podkreśleń do niej przeskoczy. Moglibyśmy nawet uzyskać to, żeby wszystkie podkreślenia przeskoczyły do kolumny B, wskutek dodania do niej dostatecznie dużej liczby (np. największej z liczb w_{Ij}). Otóż kolumnę B będziemy powiększali dopóty, aż ustanie w niej niedomiar. Może się zdarzyć, że przy dodaniu jakiegoś t (będącego całkowitą wielokrotnością t_0) w kolumnie B będzie jeszcze niedomiar, a po dodaniu liczby $t+t_0$ będzie już nadmiar, gdyż równocześnie przeskoczy do kolumny B więcej niż jedno podkreślenie. Taki przypadek rozważymy później i wyłączymy z naszych rozważań. Zakładamy zatem, że w kolumnie B nie pojawi się nigdy nadmiar. Gdy ustanie w niej niedomiar, będzie w niej tyle podkreśleń, ile trzeba, tj. m_B. Tę część przekształcenia (3) nazwiemy *pierwszym krokiem*. Jeśli po tym pierwszym kroku nie ma kolumn z niedomiarem, to pierwszy krok jest już całym przekształceniem.

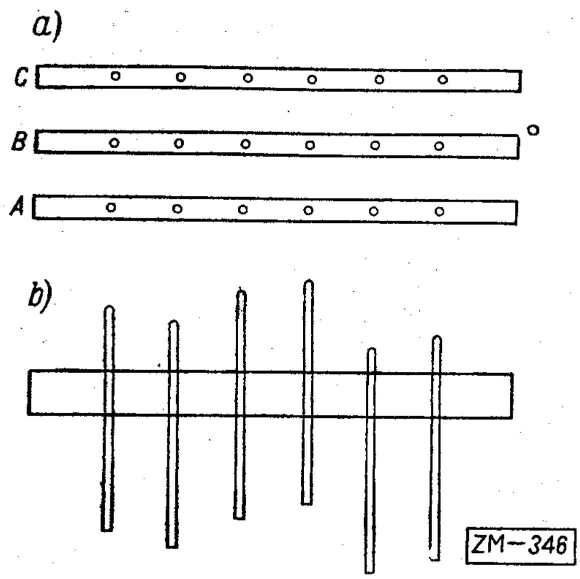
Jeśli jednak pozostają po pierwszym kroku jeszcze kolumny z niedomiarem, bierzemy do następnego kroku dowolną z nich, np. kolumnę I (z niedomiarem) i znowu powiększamy ją o liczbę t taką, żeby odpowiednia ilość podkreśleń przeskoczyła do niej z innych kolumn (może między innymi również z poprzednio traktowanej kolumny B), tak by w tej kolumnie I nie było ani niedomiaru, ani nadmiaru. Jeśli po tym drugim kroku pozostają jeszcze kolumny z niedomiarem, obieramy dowolną z nich i robimy następny krok przekształcenia (3). Może się okazać, że będziemy musieli przy tym kilkakrotnie powiększać tę samą kolumnę, gdyż przy powiększaniu innych kolumn wytworzył się w niej nowy niedomiar (podkreślenia przeskakiwały z tej kolumny do innych kolumn).

Wykażemy teraz, że po skończonej liczbie takich kroków nie będzie już kolumn z niedomiarami (a więc i z nadmiarami), czyli że w każdej kolumnie będzie tyle podkreśleń, ile trzeba.

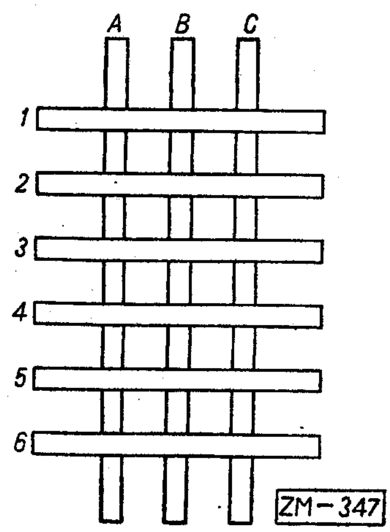
Zauważmy przede wszystkim, że żaden krok przekształcenia (3) nie może spowodować nowego nadmiaru w jakiejś kolumnie, gdyż pilnumniejsze wybierzemy t_0, czyli im większą dokładność pomiaru wydajności, tym rzadziej będziemy natrafiali na niejednoznaczne rozwiązania. Przy odpowiednim doborze t_0 prawdopodobieństwo tego będzie znikomo małe.

Niejednoznaczność ta nie jest cechą metody, lecz istotną cechą zagadnienia i wszystkie metody rozwiązywania tego zagadnienia są w tym sensie niejednoznaczne.

Opiszemy teraz automat do rozwiązywania powyższego zagadnienia. Działa on na zasadzie równowagi. Dla uproszczenia przyjmiemy tylko trzy rodzaje prac A, B i C oraz sześciu robotników $1, 2, \ldots, 6$.



Rys. 1. a) Widok z góry belek odpowiadających pracom A, B, C; b) widok jednej belki z boku z prętami do nastawiania wydajności w_{Ij}



Rys. 2. Widok z góry na układ sześciu beleczek (odpowiadających sześciu robotnikom) i trzech belek (odpowiadających trzem pracom)

Maszyna składa się z trzech poziomych równoległych belek A, B i C (odpowiadają one pracom A, B i C) (patrz rys. 1), oraz z sześciu jednokilogramowych beleczek $1, 2, \ldots, 6$ (odpowiadających robotnikom), poziomych, lecz prostopadłych do belek A, B i C i rozmieszczonych nad nimi w równych odstępach (rys. 2). Każda z belek i beleczek może się podnosić i opadać zachowując położenie poziome. W każdej z belek A, B i C przewiercono sześć pionowych otworów w równych odstępach. W otworach tkwią pręty, tak że j-ty pręt wystaje z I-tej belki na wysokość w_{Ij}. Pręty tkwiące w jednej belce nazywamy kolumną, a pręty tkwiące w trzech belkach, lecz pod jedną beleczką, nazywamy wierszem.

Na każdą z sześciu beleczek działa pionowo w dół ciężar jednego kilograma. Na każdą z belek I działa ku górze siła o wielkości m_I kG (siłę tę realizujemy za pomocą odpowiedniego obciążenia nici przymocowanej do belki i przerzuconej przez blok).

Gdy pozostawimy maszynę działaniu tych sił, ustali się następująca równowaga: każda beleczka oprze się na jednym pręcie, najwyżej wystającym w wierszu. Będzie ona na ten pręt, a zatem i na belkę z nim związaną, wywierała siłę 1 kG. I-ta belka będzie podpierała m_I beleczek, gdyby bowiem podpierała ich mniej lub więcej, nie byłaby w równowadze i podniosłaby się lub opadła. Jeśli j-ta beleczka opiera się na I-tej belce, to robotnika o numerze j należy przydzielić do I-tej pracy.

Może się zdarzyć niejednoznaczność rozwiązania, polegająca na tym, że niektóre beleczki oprą się naraz na kilku belkach. Można temu zapobiec przez drobne zmiany macierzy w.

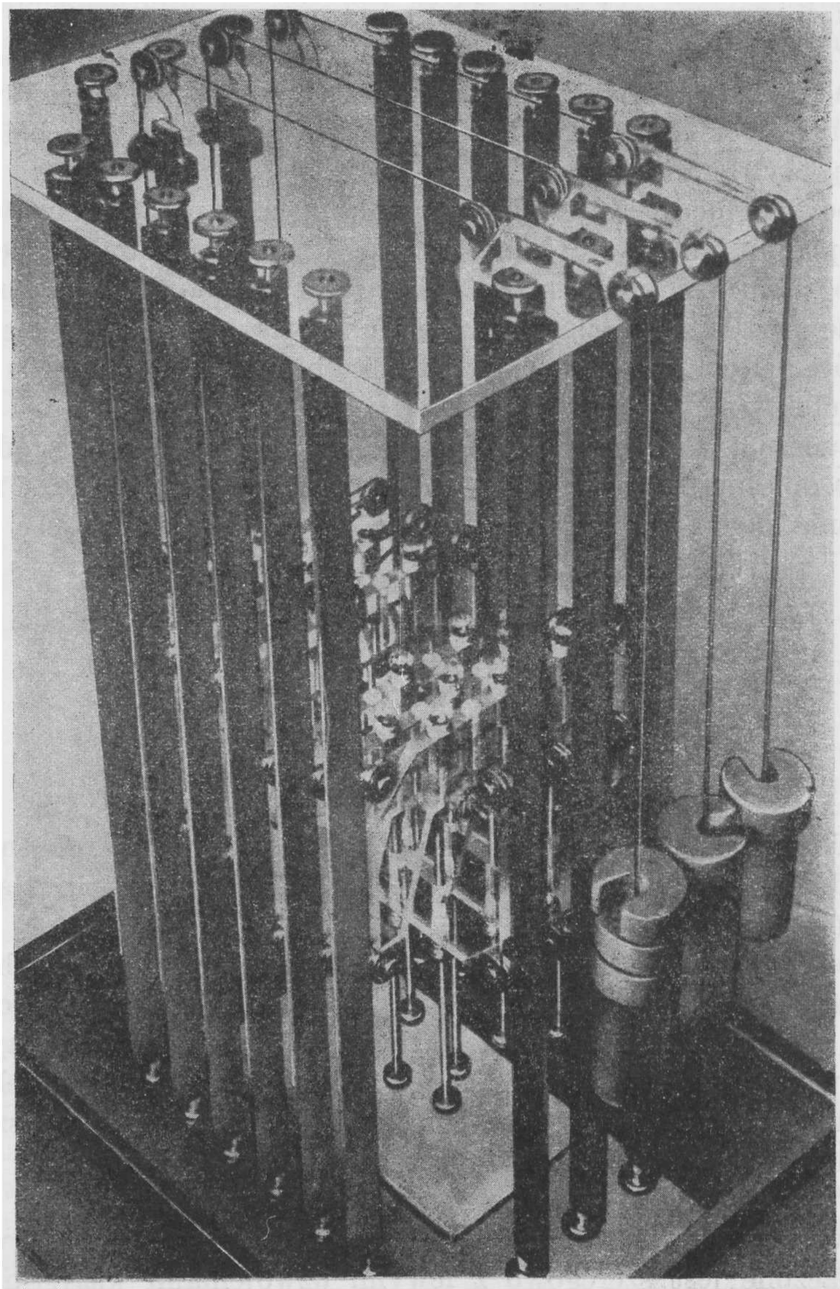
Rysunek 3 pokazuje widok ogólny maszyny wykonanej zgodnie z powyższym opisem. Na rysunku 4 (widok maszyny z góry) widać rozwiązanie zadania podane przez maszynę dla macierzy wydajności

$$w = \begin{bmatrix} 28 & 43 & 24 \\ 33 & 4 & 17 \\ 19 & 12 & 7 \\ 6 & 23 & 31 \\ 41 & 36 & 20 \\ 38 & 13 & 27 \end{bmatrix}$$

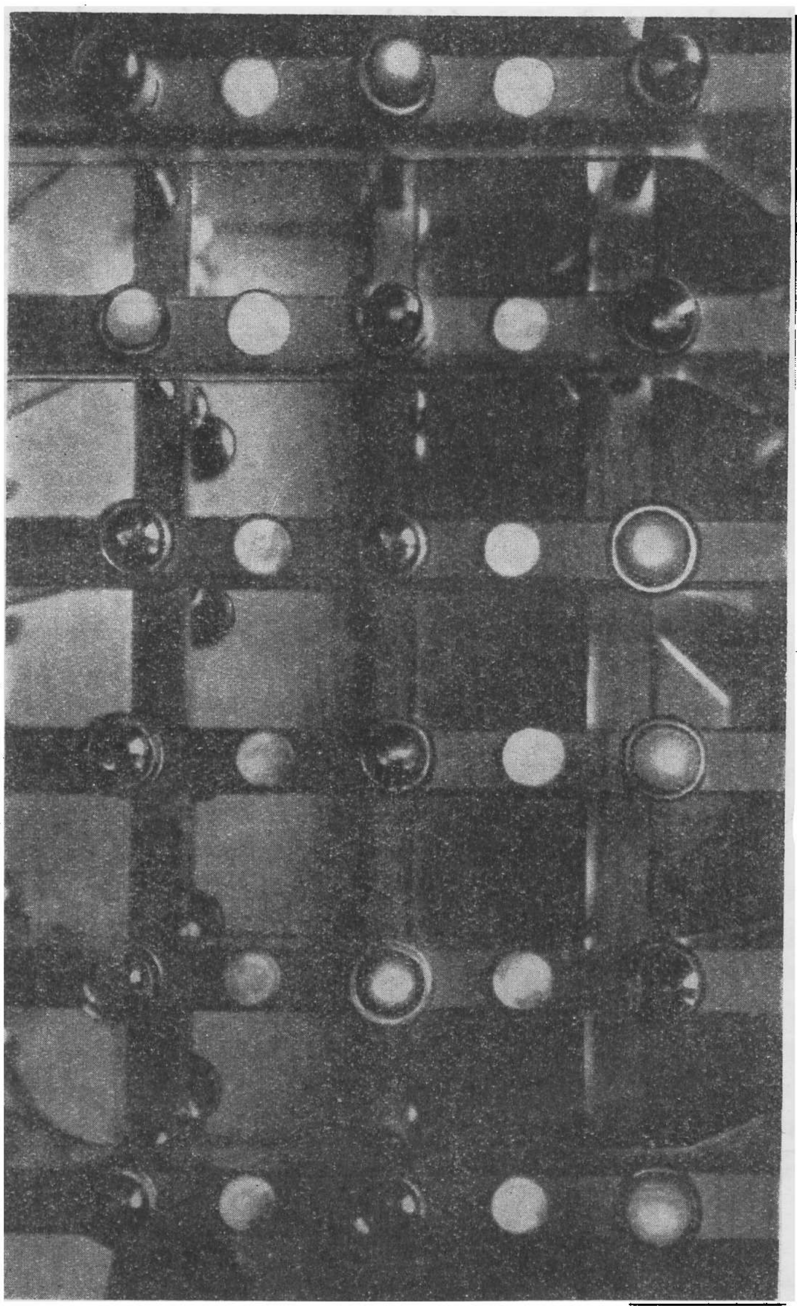
z warunkiem: $m_A = 1$, $m_B = 2$, $m_C = 3$. Skierowania robotników do odpowiednich prac, czyli styki beleczek z belkami, odpowiadają świecącym żaróweczkom.

W ten sam sposób można traktować dowolną liczbę prac i robotników. Przy dużej ich liczbie mogą wystąpić tarcia, utrudniające mechaniczne działanie maszyny. Można wówczas zbudować analogiczną maszynę elektryczną, w której rolę sił mechanicznych będą odgrywały siły elektryczne.

Rysunek 5 przedstawia schemat takiej elektrycznej maszyny dla 3 rodzajów prac i 6 robotników. Rodzajom prac odpowiadają kolumny A, B i C, a robotnikom wiersze $1, 2, \ldots, 6$. Na przecięciu I-tej kolumny i j-tego wiersza jest przekaźnik P_{Ij}. Ma on dwa uzwojenia. Lewe uzwojenie połączone jest szeregowo z lewymi uzwojeniami wszystkich pozostałych przekaźników I-tej kolumny i poprzez zmienny opór R_I łączy się z siecią (o stałym natężeniu prądu). Prawe uzwojenia wszystkich ($3 \cdot 6 = 18$) przekaźników połączone są równolegle ze źródłem prądu S o specjalnie dobranym, zmiennym natężeniu. Rysunek 6 przedstawia wykres tego natężenia w zależności od czasu. Największe natężenie tego prądu przekracza natężenia progowe wszystkich przekaźników P_{Ij}.



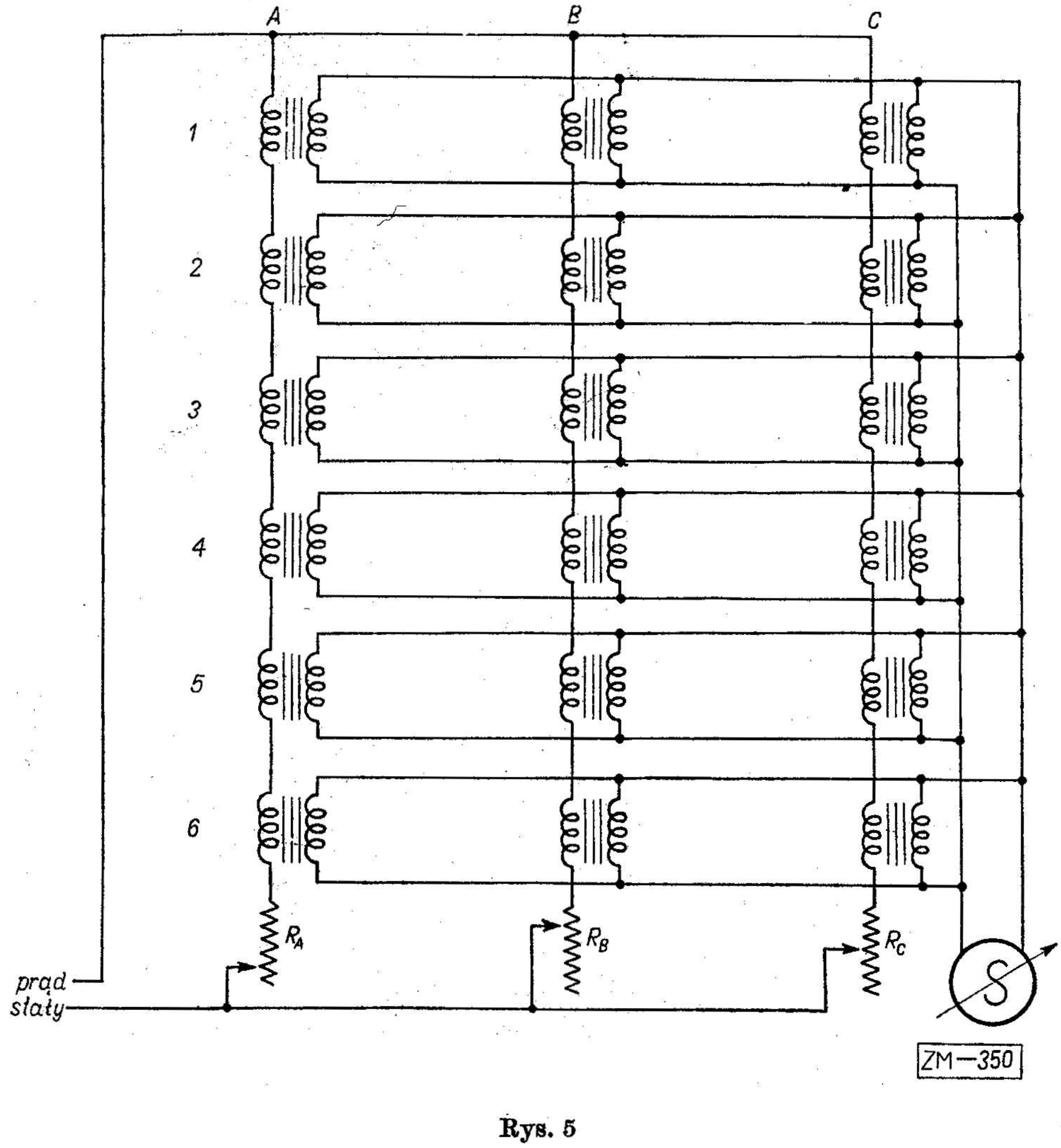
Rys. 3



ZM–349

Rys. 4

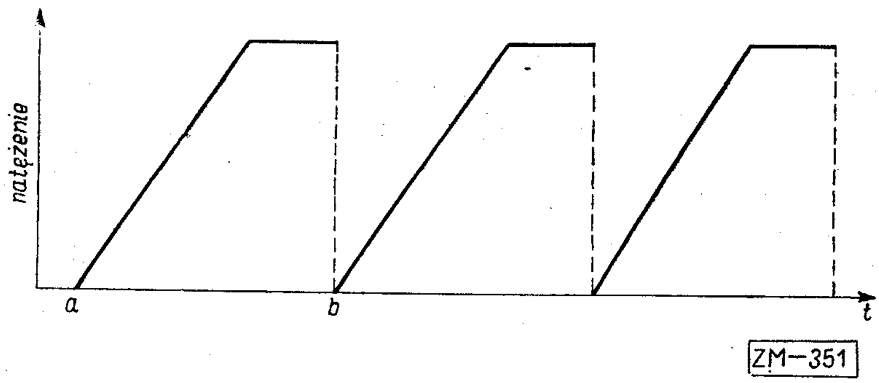
Przekaźnik P_{Ij} nastawiamy (za pomocą specjalnego oporu) na próg w_{Ij}, tzn. tak żeby zadziałał, gdy suma natężeń prądu przepływającego przez oba uzwojenia przekaźnika P_{Ij} przekroczy w_{Ij}. Zadziałanie przekaźnika P_{Ij} polega na 3 czynnościach: 1. powoduje zapalenie się żarówe-



Rys. 5

czki umieszczonej na tym przekaźniku (lub na odpowiedniej tablicy), 2. wyłącza mechanicznie pozostałe przekaźniki w j-tym wierszu, a 3. przekazuje impuls do urządzenia regulującego opór R_I. W przypadku, gdy liczba takich impulsów z różnych przekaźników I-tej kolumny przekroczy liczbę m_I opór R_I automatycznie się powiększa.

Maszyna działa następująco: Podczas jednej ewolucji zmiennego natężenia prądu (na rys. 6 od a do b) wzrasta suma natężeń w 2 obwodach każdego z przekaźników. W każdym z 6 wierszy zadziała jeden przekaźnik, wyłączając pozostałe dwa. Jeśli liczba działających przekaźników w I-tej kolumnie jest większa niż m_I, to opór R_I się powiększy, czyli podczas następnej ewolucji prądu suma natężeń w uzwojeniach przekaźników I-tej kolumny będzie mniejsza. W niektórych wierszach mogą więc zadziałać inne przekaźniki niż uprzednio, tj. w innych kolumnach niż w I-tej. Jeśli jednak i po następnej ewolucji okaże się nadmiar



Rys. 6

działających przekaźników w I tej kolumnie, opór R_I ulegnie dalszemu powiększeniu. Będzie się on powiększał tak długo, aż liczba działających przekaźników w I-tej kolumnie będzie równa m_I.

Gdy w każdej kolumnie będzie odpowiednia liczba m_I działających przekaźników, opory R_I nie będą się już zmieniały. Przy każdej następnej ewolucji działać będą te same przekaźniki, czyli zapalać się będą te same żaróweczki. Te żaróweczki wskazują rozwiązanie. Przy pierwszych ewolucjach prądu będą one migały bezładnie, aż po pewnym czasie, gdy opory się ustalą, przy kolejnych ewolucjach będą rozbłyskiwały wciąż te same żaróweczki. Paląca się żaróweczka w j-tym wierszu wskazuje pracę (numer kolumny), do której należy przydzielić j-tego robotnika.

Łatwo można opisaną wyżej maszynę grawitacyjną do rozwiązywania zagadnienia przydziału pracy przystosować do rozwiązywania zagadnienia transportowego. Należy w tym celu sporządzić ciężarki s_j-1 do nasadzania na beleczki. Na beleczkę o numerze j będzie działała w dół siła s_j (sama beleczka ma ciężar równy 1). Zamiast styków elektrycznych z żaróweczkami, pod każdą beleczką w miejscach możliwych styków z belkami umieścimy dynamometry (razem będzie $m \cdot k$ takich dynamometrów). Każda beleczka (ciążąca z siłą s_j) będzie się opierała na kilku belkach, wywierając na nie siły d_{Ij}, które są poszukiwanymi wielkościami dostaw.

Teoretyczne rozwiązanie zagadnienia i pomysł automatu należą do J. Perkala. Pokazany wyżej prototyp automatu został wykonany przez W. Święcickiego (z Laboratorium Wytrzymałości Materiałów Politechniki Wrocławskiej) pod kierunkiem J. Battka. J. Battek zaprojektował również niezależnie maszynę podobną do opisanej, lecz nie grawitacyjną, a także opracował jej elektryczny analogon.

Prace cytowane

[1] G. Dantzig, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, Activity Analysis of Production and Allocation, New York 1951, str. 339-347.

[2] A. Charnes and W. W. Cooper, *The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation problems*, Management Science 1 (1954), str. 49-69.

[3] M. M. Flood, *The traweling-salesman problem*, Operational Research 4, 1 (1956), str. 61-75.

[4] S. Vajda, *The theory of games and linear programming*, London 1957.

[5] J. Bílý, M. Fiedler, F. Nožička, *Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem*, Чехословацкий Математический Журнал 8 (83) (1958).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 21. 9. 1959

Е. БАТТЕК и Ю. ПЭРКАЛЬ (Вроцлав)

О НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Несмотря на то, что задача личного состава имеет уже много решений, пригодных для практического применения, всё ещё появляются статьи улучшающие и облегчающие её решение. Данная статья является одной из работ такого рода. Обычно при решении этой задачи пользуются леммой, говорящей, что матрицу производительности можно произвольно увеличивать столбцами или строчками с постоянными элементами, не меняя конечного решения. Мы удовлетворились только частью леммы, говорящей о столбцах, и получили благодаря этому несколько более сложный метод решения, но зато этот метод позволяет сконструировать автомат, который, после введения произвольной матрицы производительности, сразу даёт решение задачи личного состава.

В данной статье описано автомат (а также приводится его фотография) для матрицы не выше 3×6, т. е. матрицы с 3 столбцами (работами) и 6 строками (рабочими). Описывается также электрический аналог этой машины, дающий возможность значительно увеличить число столбцов и строк.

J. BATTEK and J. PERKAL (Wrocław)

ON A CERTAIN PROBLEM OF LINEAR PROGRAMMING

SUMMARY

Although the assignment problem is already provided with several solutions applicable in practice, new papers improving and facilitating those solutions continue to appear. This paper is a work of that kind. On the whole, in solving the problem in question the following lemma is used: the productivity matrix can be arbitrarily changed by adding a constant component to all elements of a column or line. The present authors use only a part of that lemma, dealing with the columns. Consequently, they obtain a solution method that is somewhat more complicated but, on the other hand, permits the construction of an automatic machine which, on setting an arbitrary productivity matrix, immediately gives the solution of the assignment problem. This paper contains a description and a photograph of a machine for matrices of at most 3×6, i. e. of 3 columns (tasks) and 6 lines (workmen). There is also a description of an electric analogon of that machine which permits an extension to a much greater number of columns and lines.
