ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1964)

A. RYBARSKI (Wrocław)

# *ANGENÄHERTE SCHWINGUNGSFREQUENZFORMELN FÜR KONSERVATIVE SYSTEME (2)*

**1. Einführung.** In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem konservativen System, für welches die intervallweise stetige Charakteristik der quasielastischen Kräfte $g(x)$ den folgenden Bedingungen genügt

$$g(x) = -g(-x), \quad G(x) < G(a) \tag{1.1}$$

für

$$-a < x < +a, \quad g(a) = g(a-0) > 0.$$

Die Größe $a$ bedeutet hier eine gewisse positive Konstante und durch $G(x)$ bezeichnen wir, wie üblich, das Integral $\int\limits_0^x g(x)\,dx$, d. h. das Potential der quasielastischen Kräfte.

Unter den obigen Voraussetzungen zeigt man bekanntlich elementar, daß die Schwingungsgleichung von der Gestalt

$$y^{\cdot\cdot} + g(y) = 0 \tag{1.2}$$

eine periodische Lösung besitzt, welche den Anfangswerten $y(0) = -a$, $y^{\cdot}(0) = 0$ entspricht und die Schwingungen mit der Amplitude $a$ beschreibt (siehe z. B. [1], § 8.10). Die Schwingungsperiode $T$ ist dabei durch die folgende Formel bestimmt

$$T = 2\sqrt{2}\int\limits_0^a \{G(a)-G(x)\}^{-1/2}\,dx. \tag{1.3}$$

Es sei durch $\omega_0 = 2\pi/T$ die entsprechende Schwingungsfrequenz bezeichnet. Dann gilt bekanntlich die angenäherte Formel

$$\omega_0^2 \approx \omega_{\mathrm{as}}^2 = \frac{1}{\pi a}\int\limits_0^{2\pi} g(a\sin\alpha)\sin\alpha\, d\alpha. \tag{1.4}$$

Das ist die klassische asymptotische Formel, in welcher wir die Amplitude der ersten harmonischen Komponente der Schwingungen durch die wahre Schwingungsamplitude $a$ ersetzt haben (siehe z. B. [2], § 2.21).

In den Arbeiten [3], [4] beschäftigten wir uns u.a. mit verschiedenen Abschätzungen des Fehlers

$$e = \frac{\omega_{\mathrm{as}} - \omega_0}{\omega_0}, \tag{1.5}$$

mit welchem die Größe $\omega_{\mathrm{as}}$ die Frequenz $\omega_0$ annähert. In dieser Arbeit stellen wir weitere Abschätzungsformeln vor und illustrieren ihre Anwendungen für eine Reihe der klassischen Beispiele. Wegen der Einfachkeit der angegebenen Abschätzungen können wir gewisse asymptotische Untersuchungen ausführen, welche die quasilinearen Charakteristiken betreffen, sowie auch die Schwingungen mit kleinen und großen Amplituden.

**2. Eine gewisse Entwicklung.** In diesem Punkte wollen wir jene einfache Anwendung der Taylorschen Entwicklung anführen, mit deren Hilfe die gewünschten Abschätzungen erreicht werden. Zu diesem Zwecke müssen wir zuerst die Ungleichung $\omega_{\mathrm{as}}^2 > 0$ bestätigen, die unter unseren Voraussetzungen sicher gilt. In der Tat, setzt man in der Definition (1.4) der Größe $\omega_{\mathrm{as}}^2$ die neue Integrationsvariable $x = a\sin\alpha$ an, so erhält man durch partielle Integrierung eine andere äquivalente Formel, und zwar

$$\omega_{\mathrm{as}}^2 = \frac{4}{\pi}\int_0^a \frac{G(a)-G(x)}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx. \tag{2.1}$$

Dabei haben wir die Bedingung $g(x) = -g(-x)$ in Acht genommen. Weiter sei es bemerkt, daß auf Grund von (1.1) die Größe

$$r = 2\inf_{(-a,+a)} \frac{G(a)-G(x)}{a^2-x^2} \tag{2.2}$$

eine positive Konstante darstellt. Demgemäß erhalten wir aus (2.1) und (2.2) die Ungleichung

$$0 < r \leqslant \omega_{\mathrm{as}}^2, \tag{2.3}$$

womit die Größe $\omega_{\mathrm{as}}^2$ positiv erklärt wird.

Jetzt bilden wir die folgende Hilfsfunktion

$$G_\lambda(x) = \tfrac{1}{2}\omega_{\mathrm{as}}^2 x^2 + \lambda\{G(x) - \tfrac{1}{2}\omega_{\mathrm{as}}^2 x^2\}, \tag{2.4}$$

wo das Parameter $\lambda$ beliebige Werte aus dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ annimmt. Laut der Ungleichung $\omega_{\mathrm{as}}^2 > 0$ und laut (1.1) ist es ersichtlich, daß für die neue Funktion folgendes gilt:

$$G_\lambda(x) < G_\lambda(a) \text{ für } -a < x < +a \quad \text{und} \quad G'_\lambda(a) > 0 \text{ für } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Diese Ungleichungen bestätigen die Konvergenz des Integrals

$$T_\lambda = 2\sqrt{2}\int_0^a \{G_\lambda(a)-G_\lambda(x)\}^{-1/2}dx, \tag{2.5}$$

für alle $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Wir haben dabei $T_0 = T_{as} \equiv 2\pi/\omega_{as}$ und $T_1 = T$. Außerdem besitzt die neue Hilfsgröße $T_\lambda$ alle Ableitungen in Bezug auf $\lambda$ für $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Um das zu zeigen, führen wir die Funktion

$$s(x, \lambda) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-x^2}{G_\lambda(a)-G_\lambda(x)} = \left\{(1-\lambda)\,\omega_{as}^2 + 2\lambda\,\frac{G(a)-G(x)}{a^2-x^2}\right\}^{-1} \tag{2.6}$$

ein, welche im Rechteck $D$: $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ definiert ist. Laut (2.2) erhalten wir

$$\sup_D s(x, \lambda) = \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\{\omega_{as}^2(1-\lambda)+\lambda r\}^{-1},$$

woraus, wegen (2.3), die Gleichheit

$$\sup_D s(x, \lambda) = 1/r \tag{2.7}$$

folgt. Bildet man jetzt die Integrale, welche formal Ableitungen der Größe $T_\lambda$ darstellen, so ist ihre absolute Konvergenz mit Hilfe von (2.7) leicht zu bestätigen. Daraus folgt natürlich $T_\lambda \in C_\infty\langle 0, 1\rangle$.

Jetzt sollen wir die erste und zweite Ableitung von $T_\lambda$ näher untersuchen. Wir berechnen zuerst

$$\left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = -\frac{2}{\omega_{as}}\int_0^a (a^2-x^2)^{-3/2}\{\Delta(a)-\Delta(x)\}\,dx,$$

wo wir, der Kürze halber, $\Delta(x) = G(x) - \frac{1}{2}\,\omega_{as}^2 x^2$ bezeichnet haben. Aus (2.1) ergibt sich jetzt nach Berechnung

$$\left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0. \tag{2.8}$$

Für die zweite Ableitung finden wir aus (2.5) den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial \lambda^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\int_0^a \{G_\lambda(a)-G_\lambda(x)\}^{-5/2}\{\Delta(a)-\Delta(x)\}^2\,dx, \tag{2.9}$$

welcher im allgemeinen nicht verschwindet.

Schließlich wenden wir den Taylorschen Satz an, und erhalten

$$T_\lambda\big|_0^1 = T - T_{as} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda'}, \qquad \lambda' \epsilon (0, 1), \tag{2.10}$$

wo $\lambda'$ einen gewissen Zwischenwert bedeutet und die Größe $T_{as}$ als $2\pi/\omega_{as}$ erklärt ist. Mittels der Formeln (2.9) und (2.10) können wir im weiteren verschiedene Abschätzungen des Fehlers $e$ liefern.

**3. Die Abschätzungsformeln.** Gemäß der Definition (1.5) der Größe $e$ gilt natürlich $T - T_{as} = 2\pi e/\omega_{as}$. Man braucht nun mit Hilfe von (2.9) die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial\lambda^2} \geqslant 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

zu beachten; dann können wir sofort aus (2.10) die erste Folgerung schließen, nämlich

$$e \geqslant 0, \qquad \omega_{as} \geqslant \omega_0, \qquad T \geqslant T_{as}. \tag{3.1}$$

Der Approximationsfehler $e$ ist also immer nicht-negativ und die Größe $\omega_{as}$ stellt eine überschüssige Annäherung der wahren Schwingungsfrequenz dar.

Mit diesem Ergebnis kann man eine gewisse wichtige Frage verknüpfen, nämlich: wie würde es sein, wenn man anstatt $\omega_{as}$ die erste asymptotische Näherung $\omega_{\mathrm{I}}$ der Größe $\omega_0$ betrachtet, d. h.

$$\omega_0^2 \approx \omega_{\mathrm{I}}^2 = \frac{1}{\pi c_1}\int_0^{2\pi} g(c_1 \sin a)\sin a\, da,$$

wo $c_1$ die Amplitude der ersten harmonischen Komponente der Schwingungen bedeutet (siehe z. B. [2], § 2.21)? Kann man hier die Ungleichung $\omega_{\mathrm{I}} \leqslant \omega_0$ bestätigen? Ähnliche Fragen kann man für die angenäherten Formeln stellen, welche die Schwingungsfrequenz der periodischen Lösungen von autonomen dynamischen Systemen in erster Näherung bestimmen (siehe [2], § 1.35). Wir betrachten die konservativen Systeme, für welche die Ungleichung $e \geqslant 0$ jetzt die untere Begrenzung des Annäherungsfehlers darstellt. Im Weiteren werden wir gewisse obere Begrenzungen schaffen. Mit Hilfe von (2.6) und (2.7) erhält man die Ungleichung

$$T - T_{as} = 6\int_0^a s^{5/2}(x, \lambda')\{\Delta(a) - \Delta(x)\}^2 (a^2 - x^2)^{-5/2} dx \leqslant 6r^{-5/2} J,$$

welche man auch in der Form

$$e \leqslant \frac{3}{\pi} r^{-5/2} \omega_{as} J \tag{3.2}$$

schreiben kann. Der Kürze halber bezeichnen wir hier

$$J = \int_0^a (a^2 - x^2)^{-5/2} \{\varDelta(a) - \varDelta(x)\}^2 dx. \tag{3.3}$$

Stellt nun die Funktion $g(x)$ ein Polynom dar, so ist die Abschätzung (3.2) sehr rechnungsfähig. In verschiedenen praktischen Anwendungen haben wir jedoch mit z. B. trigonometrisch-nichtlinearen Charakteristiken zu tun. Die Charakteristiken elektrodynamischer Momente einer Synchronmaschine bieten hier ein wichtiges Beispiel, mit welchem wir uns in einer anderen Arbeit beschäftigen werden. In solchen Fällen stellt die Berechnung des Integrals $J$ eine schwierige Aufgabe dar, welche der exakten Berechnung des Integrals (1.3) im allgemeinen keineswegs nachsteht. Darum werden wir jetzt eine Abschätzung des Integrals $J$ ausführen, welche uns rechnungsfähig erscheint.

Der Schwarzschen Ungleichung wegen haben wir

$$\{\varDelta(a) - \varDelta(x)\}^2 = \left\{\int_x^a \delta(x)\, dx\right\}^2 \leqslant (a-x) \int_x^a \delta^2(x)\, dx,$$

wo $\delta(x)$ die Größe $g(x) - \omega_{as}^2 x$ bedeutet. Dann erhält man aus (3.3) die Ungleichung

$$J \leqslant \int_0^a \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \int_x^a \delta^2(\xi)\, d\xi\, dx.$$

Durch partielle Integrierung geht jetzt diese Ungleichung in

$$J \leqslant \int_0^a h(x) \frac{\delta^2(x)}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx \tag{v}$$

über, wobei wir der Kürze halber

$$h(x) = \frac{1}{3a^2} \varPhi(z), \qquad \varPhi(z) = z + 2\sqrt{1-z^2} - \frac{1}{1+\sqrt{1-z^2}}, \qquad z = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

bezeichnen. Jetzt folgt aus (v) die gewünschte Abschätzung des Integrals $J$, nämlich

$$J \leqslant [\max_{\langle 0,a \rangle} h(x)] \int_0^a \frac{\{g(x) - \omega_{as}^2 x\}^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx. \tag{vv}$$

Die beiden, durch Multiplikationszeichen geteilten, Glieder der rechten Seite jener Abschätzung werden wir nacheinander untersuchen. Nach elementaren Berechnungen finden wir, daß der größte Wert der Funktion $\Phi(z)$, für $0 \leqslant z \leqslant 1$, zwischen den Werten $z_1 = 0{,}402$ und $z_2 = 0{,}403$ erreicht ist (sehr nahe von $z_2$). Den größten Wert von $\Phi(z)$ können wir dabei durch den Wert $\Phi(z_2) + 0{,}001\,|\Phi'(z_2)| \leqslant 1{,}712$ abschätzen. Demgemäß erhält man die Abschätzung

$$\text{(i)} \qquad \max_{\langle 0,a\rangle} h(x) = \frac{1}{3a^2} \max_{\langle 0,1\rangle} \Phi(z) \leqslant \frac{0{,}571}{a^2}.$$

Andererseits können wir schreiben

$$\text{(ii)} \qquad \int_0^a \frac{\{g(x) - \omega_{as}^2 x\}^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{\pi a^2}{4} (\omega_{op}^4 - \omega_{as}^4),$$

wobei die neue Größe $\omega_{op}$ durch die Formel

$$\text{(3.4)} \qquad \omega_{op}^4 = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} g^2(a \sin \alpha)\, d\alpha$$

definiert ist. Diese Größe haben wir schon in der Arbeit [4], § 3, eingeführt, wo sie eine „Konkurrenz" für die Größe $\omega_{as}$ darstellte. Aus den Ungleichungen $\omega_{op} \geqslant \omega_{as} \geqslant \omega_0$ sehen wir jedoch, daß $\omega_{as}$ im allgemeinen eine bessere Annäherung für $\omega_0$ liefern kann.

Aus (vv) bekommen wir, (i), (ii) wegen, die Endabschätzung für $J$, nämlich

$$\text{(3.5)} \qquad J \leqslant 0{,}571 \frac{\pi}{4} (\omega_{op}^4 - \omega_{as}^4),$$

woraus sich, (3.2) wegen, die Abschätzung

$$\text{(3.6)} \qquad 0 \leqslant e \leqslant 0{,}43\, r^{-5/2} \omega_{as} (\omega_{op}^4 - \omega_{as}^4)$$

ergibt. Dies stellt unsere zweite obere Abschätzung für $e$ dar. Im Vergleich mit $J$ besitzt das Integral $\omega_{op}^4$ eine einfachere Struktur und läßt sich damit bequemer untersuchen.

**4. Einige Beispiele.** In diesem und im nächsten Paragraphen wollen wir unsere Abschätzungen numerisch prüfen. Wir wollen nämlich feststellen, um wieviel jene Fehlerabschätzungen den wahren Fehler überschreiten. Wir können schon vorher sagen, daß sich dabei ganz verschiedene Resultate ergeben.

Jetzt fangen wir mit dem klassischen Beispiel

$$(4.1)\qquad y^{\cdot\cdot}+y+\varepsilon y^3=0$$

an, wo $\varepsilon$ ein positives Parameter bedeutet. Hier haben wir also mit der Charakteristik $g(x)=x+\varepsilon x^3$ zu tun. Bekanntlich ist dann die Schwingungsfrequenz $\omega_0$, welche den Schwingungen mit der Amplitude $a$ entspricht, durch die folgende Formel bestimmt

$$(4.2)\qquad \omega_0=\tfrac{1}{2}\pi(1+\varepsilon a^2)^{1/2}K^{-1}(k),\quad \text{wo}\quad k^2=\tfrac{1}{2}\varepsilon a^2(1+\varepsilon a^2)^{-1}$$

und $K$ das vollständige elliptische Integral der ersten Art bedeutet. Gleichzeitig liefert uns die Grundformel (1.4) die folgende Annäherung für $\omega_0^2$:

$$(4.3)\qquad \omega_{\text{as}}^2=1+\tfrac{3}{4}\varepsilon a^2.$$

Um die Abschätzung (3.2) zu prüfen, berechnen wir aus (2.2), (3.4) und (3.3)

$$(\text{i})\qquad r=1+\tfrac{1}{2}\varepsilon a^2,\qquad \omega_{\text{op}}^4=1+\tfrac{3}{2}\varepsilon a^2+\tfrac{5}{8}\varepsilon^2a^4$$

und

$$J=\frac{\varepsilon^2}{16}\int_0^a(x^2-\tfrac{1}{2}a^2)^2(a^2-x^2)^{-1/2}dx=\varepsilon^2a^4\pi/256.$$

Da die Charakteristik $g(x)=x+\varepsilon x^3$ ein Polynom darstellt, so gehen alle Berechnungen sehr elementar vor. Nun kommen wir mit (3.2) zu der Ungleichung

$$(4.4)\qquad 0\leqslant e\leqslant\frac{3}{256}\left(\frac{1+\frac{3}{4}\varepsilon a^2}{1+\frac{1}{2}\varepsilon a^2}\right)^{1/2}\frac{\varepsilon^2a^4}{(1+\frac{1}{2}\varepsilon a^2)^2};$$

wir werden zeigen, daß man dieses Ergebnis als ein befriedigendes erklären kann.

Erstens, aus (4.4) bekommt man

$$(4.5)\qquad 0\leqslant e\leqslant\frac{3}{256}\varepsilon^2a^4\{1+O(\varepsilon a^2)\},$$

für $\varepsilon a^2\to 0$. Diese asymptotische Abschätzung kann man nicht verbessern, weil sie genau dem wahren Fehler entspricht. Es gilt nämlich die folgende Entwicklung

$$(4.6)\qquad e=\frac{3}{256}\varepsilon^2a^4+\ldots$$

In der Tat, laut der bekannten Entwicklung

$$K(k) = \tfrac{1}{2}\pi\{1+\tfrac{1}{4}k^2+\tfrac{9}{64}k^4+\ldots\}$$

berechnen wir aus (4.2)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\{1-\tfrac{3}{8}\varepsilon a^2+\tfrac{57}{256}\varepsilon^2 a^4-\ldots\}.$$

Gleichzeitig liefert uns die Formel (4.3)

$$T_{as} = 2\pi\{1-\tfrac{3}{8}\varepsilon a^2+\tfrac{27}{128}\varepsilon^2 a^4-\ldots\}.$$

Für den Fehler $e = (T-T_{as})/T_{as}$ ergeben diese Formeln die gewünschte Entwicklung (4.6).

Zweitens, im Falle des Grenzüberganges $\varepsilon a^2 \to +\infty$ ergibt sich in unserem Falle der Grenzfehler $e = 2{,}3\,^0/_0$, wobei die Ungleichung (4.4) die Abschätzung $\lim e \leqslant 5{,}8\,^0/_0$ liefert. Das überschreitet den wahren Fehler nur ca. 2-fach. Leider wissen wir nicht, ob es für alle Zwischenwerte $0 \leqslant \varepsilon a^2 < +\infty$ so gut ist. Sogar die sehr wahrscheinliche Begrenzung $e \leqslant 2{,}3\,^0/_0$ für $0 \leqslant \varepsilon a^2$ ist zur Zeit nicht bewiesen. Manche numerischen Ergebnisse sind in der Note [3] angegeben.

Hinsichtlich der zweiten Abschätzung (3.6), ergibt sich laut (4.3) und (i) eine Ungleichung, welche mit (4.5) übereinstimmt. Der Koeffizient $3/256$ ist dann jedoch durch $6{,}88/256$ zu ersetzen. Demgemäß bekommen wir hier ca. 2-fach schlimmere Abschätzungen.

Nun kommt das zweite klassische Beispiel, nämlich die Pendelgleichung, für welche die Charakteristik $g(x)$ die Gestalt $g(x) = \sin x$ annimmt. Schon hier ist es für uns nicht klar, wie man das Integral $J$ berechnen könnte. Darum können wir für die Abschätzung des Fehlers der Annäherung

$$\omega_0 = \tfrac{1}{2}\pi K^{-1}(k) \approx \omega_{as} = \big(2J_1(a)/a\big)^{1/2} \tag{4.7}$$

nur die Formel (3.6) anwenden. In der obigen Formel haben wir bekanntlich $k = \sin\tfrac{1}{2}a$, wobei $a < \pi$ vorausgesetzt ist und $J_1(a)$, wie üblich, die Besselsche Funktion bedeutet.

Wir finden jetzt in unserem Falle

$$r = \sin a/a \quad \text{und} \quad \omega_{op}^4 = \big(1-J_0(a)\big)/a^2 \tag{ii}$$

womit die Abschätzung (3.6) die Form

$$0 \leqslant e \leqslant 0{,}43\left(\frac{a}{\sin a}\right)^{5/2}\left\{\frac{2J_1(a)}{a}\right\}^{1/2}\{1-J_0(2a)-4J_1^2(a)\}a^{-2} \tag{4.8}$$

annimmt. Für $a = 1$ erhalten wir daraus $0 \leqslant e \leqslant 10^{-3}$, wobei in Wirklichkeit $e \approx 3{,}4\times 10^{-4}$ gilt. Andere Resultate sind in der Tabelle angegeben.

| $a$ | $\omega_0$ | $\omega_{as}$ | $e =$ | $e <$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,984395 | 0,984415 | $2{,}1\times 10^{-5}$ | $5{,}1\times 10^{-5}$ | 2,4 |
| 1,0 | 0,937792 | 0,938136 | $3{,}7\times 10^{-4}$ | $1{,}0\times 10^{-3}$ | 2,7 |
| 1,5 | 0,860608 | 0,862505 | $2{,}2\times 10^{-3}$ | $7{,}0\times 10^{-3}$ | 3,2 |

In der letzten, unbetitelten Kolonne ist das Verhältnis berechnet, das die Überlegenheit der Fehlerabschätzung im Vergleich zum wahren Fehler beschreibt. Wenn wir uns dem kritischen Punkte $a = \pi$ nähern, der einem unstabilen Gleichgewicht des Pendels entspricht, so verschlimmern sich unsere Resultate. Das geschieht nicht nur für die Fehlerabschätzungen allein, sondern auch für die Annäherungen selbst und zwar nicht nur in der ersten Annäherung (vergl. [2], Tab. 1; [3], Tab. 1).

**5. Einige Charakteristiken mit Sättigung.** Unsere Formeln betrachten wir noch im Falle, wenn die Charakteristik $g(x)$ eine Sättigung aufweist, d. h. wenn es gilt

$$g(x) = \operatorname{sgn} x \quad \text{für} \quad |x| \geqslant a_0, \tag{5.1}$$

wo $a_0$ eine gewisse positive Konstante bedeutet. Die Formeln für $\omega_{as}$ und für $\omega_{op}$ gehen dann in

$$\omega_{as}^2 = \frac{4}{\pi a}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{4a_0^2}{\pi a^3}\int_0^1 g(a_0 t)\left[1-\left(\frac{a_0 t}{a}\right)^2\right]^{-1/2} dt \tag{5.2}$$

und

$$\omega_{op}^4 = \frac{4}{\pi a^2}\arccos\frac{a_0}{a} + \frac{4a_0}{\pi a^3}\int_0^1 g^2(a_0 t)\left[1-\left(\frac{a_0 t}{a}\right)^2\right]^{-1/2} dt \tag{5.3}$$

über, wobei die Schwingungsamplitude $a$ größer als $a_0$ vorausgesetzt wurde.

Man sieht, daß die obigen Formeln sich aus Teilen additiv bilden, von welchen nur die zweiten Glieder die Gestalt der Charakteristik $g(x)$ für $|x| \leqslant a_0$ berücksichtigen. Wächst nun die Schwingungsamplitude an, so nimmt die Bedeutung jener zweiten Glieder ab. Schreibt man z. B. die Formel (5.2) in der Form $\omega_{as}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$, wo $\Omega_1^2$ und $\Omega_2^2$ die Glieder der Summe (5.2) der Reihe nach bedeuten, so berechnen wir leicht

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \leqslant \frac{a_0}{a}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{-1/2}\left\{\int_0^1 |g(a_0 t)|\,dt\right\}^{1/2} = O\left(\frac{1}{a}\right)$$

für $a \to +\infty$. Eine ähnliche Abschätzung kann man auch für die Formel (5.3) aufstellen.

Wenn $a \to +\infty$, so bekommt man aus (5.2) und (5.3) die asymptotische Formel

$$\omega_{as} \sim 2/\sqrt{\pi a}, \qquad \omega_{op} \sim \sqrt[4]{2}/\sqrt{a}. \tag{5.4}$$

Außerdem können wir, (1.3) und (5.1) wegen, die Beziehung

$$\omega_0 \sim \pi/2\sqrt{2a} \quad \text{für} \quad a \to +\infty \tag{5.5}$$

bestätigen. Demgemäß berechnen wir für den Fehler $e = (\omega_{as} - \omega_0)/\omega_0$ den Grenzwert $e \sim$ ca. $1{,}6^0/_0$.

Nun wenden wir die Abschätzung (3.6) an. Unter der Voraussetzung $\int_x^{a_0} g(x)dx \geqslant 0$, für $0 \leqslant x \leqslant a_0$, berechnet man, (2.2) und (5.1) wegen, $r = 1/a$, und laut (5.2) und (5.3) erhalten wir die Ungleichung $0 \leqslant \lim e \leqslant 18{,}4^0/_0$. Diese Abschätzung entspricht keineswegs dem wahren Rang des Fehlers; sie überschreitet den wahren Fehler ca. 12-mal.

Um einige Beispiele für endliche Werte von $a$ nachzuprüfen, setzen wir

$$g(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \leqslant a_0 \tag{5.6}$$

an. In diesem Falle kann man die wahre Schwingungsfrequenz exakt berechnen. Sie beträgt

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2a}}\left(1-\frac{a_0}{a}\right)^{1/2}\left(1-\frac{a_0}{2a}\right)^{-1}, \tag{5.7}$$

wobei natürlich $a \geqslant a_0$ vorausgesetzt ist. Gleichzeitig berechnen wir in diesem Falle

$$\omega_{as}^2 = \frac{4}{\pi a}\left(1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right)^{1/2}, \qquad \omega_{op}^4 = \frac{4}{\pi a^2}\arccos\frac{a_0}{a}, \qquad r = \frac{1}{a}, \tag{5.8}$$

womit die Abschätzung (3.6) rechnungsbereit ist. Für $a = 2a_0$ erhält man dabei

$$\omega_0 = 0{,}7405 a_0^{-1/2}, \qquad \omega_{as} = 0{,}7425 a_0^{-1/2}, \qquad e \leqslant 5{,}4^0/_0.$$

Wir sehen, daß unsere Abschätzung in diesem Falle dem wahren Fehler $e = 0{,}27^0/_0$ sogar ca. 18-mal überschreitet.

In weiterem Falle, wo man

$$g(x) = x/a_0 \quad \text{für} \quad |x| \leqslant a_0 \tag{5.9}$$

ansetzt, erhält man bessere Resultate. In der Tat, die Formeln (5.2) und (5.3) gehen dann in

$$\begin{aligned} \omega_{as}^2 &= \frac{4}{\pi a}\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{2}{\pi a_0}\left\{\arcsin\frac{a_0}{a} - \left(\frac{a_0}{a}\right)\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right\}, \\ \omega_{op}^4 &= \frac{4}{\pi a^2}\arccos\frac{a_0}{a} + \frac{2}{\pi a_0^2}\left\{\arcsin\frac{a_0}{a} - \left(\frac{a_0}{a}\right)\left[1-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \end{aligned} \tag{5.10}$$

über, und die wahre Frequenz können wir auch exakt berechnen. Sie beträgt

$$(5.11)\qquad \omega_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\left\{\sqrt{2\left(1-\frac{a_0}{a}\right)}+\sqrt{\frac{a_0}{a}}\operatorname{arcctg}\left[\frac{a_0}{2(a-a_0)}\right]^{1/2}\right\}^{-1}.$$

Wir setzen jetzt, wie früher, $a = 2a_0$ an, und berechnen

$$\omega_0 = 0{,}7739 a_0^{-1/2}, \qquad \omega_{as} = 0{,}7804 a_0^{-1/2}, \qquad e = 0{,}84\,{}^0/_0.$$

Die Abschätzung (3.6) liefert uns hier die Ungleichung $e \leqslant 3{,}9\,{}^0/_0$, was den wahren Fehler ca. 5-mal überschreitet und den Rang des Fehlers zeigt.

In Paragraphen 4 und 5 haben wir verschiedene Beispiele angeführt, für welche die angenäherte Grundformel (1.3) im allgemeinen gute Ergebnisse lieferte. Wir haben gesehen, daß die Abschätzung (3.6) in diesen Fällen ganz verschiedene Resultate liefern kann, welche den Rang des Fehlers nicht immer richtig abbilden.

Haben wir in irgendeiner Anwendung die Abschätzung

$$\text{(i)}\qquad 0 \leqslant (\omega_{as}-\omega_0)/\omega_0 \leqslant e_0$$

erreicht, so können wir daraus die Ungleichung

$$\text{(ii)}\qquad |(\omega'-\omega_0)/\omega_0| \leqslant e_0/2$$

erhalten, wo die neue Annäherung $\omega'$ durch die Formel $\omega' = \omega_{as}(1+\frac{1}{2}e_0)^{-1}$ bestimmt ist. Gemäß den vorher genannten Gründen ist es aber nicht immer zweckmäßig die Annäherung $\omega_{as}$ durch $\omega'$ zu ersetzen.

**6. Quasilineare Charakteristiken.** In diesem und in dem nächsten Paragraphen wollen wir aus der Abschätzung (3.6) manche asymptotische Schlüsse herausziehen. Am Anfang betrachten wir die quasilinearen Charakteristiken

$$(6.1)\qquad g(x) = x+\varepsilon f(x), \qquad \text{wo} \qquad f(x) = -f(-x)$$

und $\varepsilon$ das kleine Parameter bedeutet. Für die Funktion $f(x)$ setzen wir voraus, daß sie in dem Intervall $\langle -a, +a\rangle$ intervallweise stetig ist.

In diesem Falle folgt aus (3.6) eine wichtige Beziehung, nämlich

$$(6.2)\qquad \omega_0 = \omega_{as}+O(\varepsilon^2) \qquad \text{für} \qquad \varepsilon\to 0 \text{ und } a = \text{const}.$$

Es sei bemerkt, daß wir dieselbe Beziehung früher unter stärkeren Voraussetzungen bewiesen haben (siehe [4], § 7). Um die Beziehung (6.2) zu beweisen, berechnen wir aus (1.3) und (6.1)

$$\omega_{as}^2 = 1+\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha \to 1, \qquad \text{für} \qquad \varepsilon\to 0 \text{ und } a = \text{const}.$$

Aus (2.2) erhält man außerdem

$$r = 1+2\varepsilon \inf_{(-a,\,+a)} \frac{F(a)-F(x)}{a^2-x^2} \to 1 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \text{ und } a = \text{const},$$

wobei $F(x)$ das Integral $\int\limits_0^x f(x)dx$ bedeutet. Zuallerletzt berechnen wir aus (3.4), wieder (6.1) wegen

$$\omega_{\text{op}}^4 - \omega_{\text{as}}^4 = \frac{\varepsilon^2}{\pi a^2}\left\{\int\limits_0^{2\pi} f^2(a\sin\alpha)d\alpha - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} f(a\sin\alpha)\sin\alpha d\alpha\right)^2\right\} = O(\varepsilon^2),$$

für $\varepsilon \to 0$ und $a = \text{const}$. Laut (3.6) ergeben die obigen Beziehungen das Ergebnis $e = O(\varepsilon^2)$, woraus unmittelbar die gewünschte Beziehung (6.2) folgt.

Wir sollen jedoch noch beweisen, daß die Anwendung der Abschätzung (3.6) in unserem Falle korrekt war. Um das zu zeigen, merken wir an, daß der Wert $g(a) = a+\varepsilon f(a)$ positiv ist, wenn nur für $\varepsilon$ ein genügend kleiner Wert angenommen ist. Zweitens, laut (6.1) kann man leicht die folgende Ungleichung ausführen:

$$G(a) - G(x) = \int\limits_x^a g(x)dx \geqslant (a-x)(\tfrac{1}{2}a - \varepsilon \max_{\langle 0,\,a\rangle} |f|),$$

welche für $0 \leqslant x \leqslant +a$ gilt. Wenn nötig, sollen wir noch die Funktion $g(x)$ für $x = \pm a$ als $\lim\limits_{x\to\pm a} g(x)$ redefinieren, und wir sehen, daß die im Paragraphen 1 genannten Bedingungen sicher gelten, wenn nur das Parameter $\varepsilon$ genügend klein ist.

**7. Kleine Schwingungen.** Im Weiteren untersuchen wir die ungeraden, intervallweise stetigen Charakteristiken, welche für $x \to 0$ die folgende asymptotische Gestalt aufweisen

(7.1) $$g(x) = x + cx^3 + O(x^5), \quad \text{wo} \quad c = \text{const}.$$

Solche Fälle kommen in Anwendungen oft vor. Wir werden zeigen, daß dann folgendes gilt

(7.2) $$e = O(a^4) \quad \text{für} \quad a \to 0.$$

Das im Paragraphen 4 betrachtete Beispiel (die Gleichung (4.1)) zeigt uns, daß in der Beziehung (7.2) die Potenz $a^4$ durch keine größere ersetzt werden kann.

Nimmt nun die Schwingungsamplitude $a$ genügend kleine Werte an, so sind die Bedingungen (1.1) laut (7.1) sicher erfüllt. Der entsprechende

Beweis ist dem im Paragraphen 6 angegebenen ähnlich. Jetzt berechnen wir die Größen $\omega_{\rm as}^2$ und $\omega_{\rm op}^4$ und bekommen

$$\omega_{\rm as}^2 = 1+\tfrac{3}{4}ca^2+O(a^4), \qquad \omega_{\rm op}^4 = 1+\tfrac{3}{2}ca^2+O(a^4)$$

für $a \to 0$. Wir berechnen weiter, laut (2.2) und (7.1)

$$r \geqslant \inf_{(0,a)} \big(g(x)/x\big) \geqslant 1-O(a^4).$$

Gemäß diesen Formeln erhalten wir aus (3.6) die gewünschte Beziehung 7.2.

Setzt man für $g(x)$ die Form

$$g(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7) \tag{7.3}$$

für $x \to 0$ voraus, wobei $c_1 > 0$, $c_1, c_3, c_5$ — const, so kann man die obigen Berechnungen etwas genauer ausführen. Auf diese Weise liefert unsere Abschätzung (3.6) die Ungleichung

$$e \leqslant \frac{6{,}88}{256}\left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2 a^4 + O(a^6) \quad \text{für} \quad a \to 0. \tag{7.4}$$

In praktischen Rechnungen kann uns diese Ungleichung die Anwendungsgrenze der Grundformel (1.3) orientierungsweise anzeigen.

**8. Große Amplituden.** Es wurde in [2], § 2, betont, daß im Falle der Gleichung (4.1) die erste asymptotische Annäherung für $\omega_0$ ihren praktischen Wert sogar für $\varepsilon \to +\infty$ behält und den endlichen Prozentualfehler ergibt, welcher ca. 2,4% beträgt. Die *bl* gleichen und sogar noch bessere Vorteile liefert dann die Grundformel (1.3). Jetzt seien für die Charakteristik $g(x)$ die folgenden zusätzlichen Bedingungen vorausgesetzt

$$g(x) \sim \operatorname{sgn} x\,|x|^p \ \text{für}\ x \to \infty \ \text{und}\ \frac{g(x')}{x'} < \frac{g(x'')}{x''} \ \text{für}\ 0 < x' < x'', \tag{8.1}$$

wo $p > 1$. Dann gilt

$$\limsup_{a \to +\infty} e < +\infty. \tag{8.2}$$

Wir können also sagen, daß die Formel (1.3) im Bezug auf eine ganze Klasse der Charakteristiken den endlichen Prozentualfehler der Annäherung für $a \to +\infty$ ergibt. Die Charakteristik $g(x) = x+\varepsilon x^3$, wo es $\varepsilon > 0$ gilt, genügt natürlich den Bedingungen (8.1).

Um die Ungleichung (8.2) zu beweisen, berechnen wir jetzt die Größen $\omega_{\rm as}$ und $\omega_{\rm op}$. Laut der ersten der Voraussetzungen (8.1) finden wir nach einiger Rechnung die folgenden asymptotischen Formeln

$$\omega_{\rm as}^2 \sim \frac{2^{p+2}}{\pi} B\left(\frac{p}{2}+1, \frac{p}{2}+1\right) a^{p-1}, \qquad \omega_{\rm op}^4 \sim \frac{2^{2p+1}}{\pi} B(p+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}) a^{2p-2}. \tag{8.3}$$

Hier haben wir durch $B$ das Eulersche Integral der ersten Art bezeichnet. Gemäß der zweiten der Voraussetzungen (8.1) stellt die Funktion $g(x)$ eine „harte" Charakteristik dar. Dann gilt für die Größe $r$, gemäß den früheren Berechnungen, die Formel $r = 2G(a)/a^2$ (siehe [4], § 4.6), woraus sich, wieder wegen (8.1),

$$r \sim \frac{2}{p+1} a^{p-1} \quad \text{für} \quad a \to +\infty \tag{8.4}$$

ergibt. Nun bemerken wir, daß die rechte Seite der Abschätzung (3.6), laut (8.3) und (8.4) sich einer Konstante nähert, wenn nur $a \to +\infty$. Daraus folgt die gewünschte Ungleichung (8.2).

## Literaturverzeichnis

[1] L. Cesari, *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Berlin 1959.

[2] Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, изд. второе, Москва 1958.

[3] A. Rybarski, *Angenäherte charakteristische Gleichungen der nichtlinearen konservativen Schwingungssysteme*, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys. 10 (1962), S. 519-522.

[4] — *Angenäherte Schwingungsfrequenzformeln für konservative Systeme (1)*, Zastosow. Mat. 7 (1964), S. 235-253.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

*Eingegangen am 5. 11. 1962*

A. RYBARSKI (Wrocław)

## *PRZYBLIŻONE WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ UKŁADÓW ZACHOWAWCZYCH (2)*

### STRESZCZENIE

W pracy bada się dobroć przybliżenia $\omega_0 \approx \omega_{as}$ częstości $\omega_0$ drgań o amplitudzie $a$ układu zachowawczego, o nieparzystej, przedziałami ciągłej charakterystyce sił quasisprężystych $g(x)$, $x \in \langle -a, +a\rangle$, $g(a) > 0$. Dowiedziono przede wszystkim, że $\omega_{as} > \omega_0$. Dalej, dla charakterystyk postaci $g(x) = x + \varepsilon f(x)$, dowiedziono asymptotycznej zależności: $\omega_0 - \omega_{as} = O(\varepsilon^2)$, gdy $\varepsilon \to 0$, $a$ — const. Dla charakterystyk postaci $g(x) = x + cx^3 + O(x^5)$, $c$ — const, dowiedziono zależności $\omega_0 - \omega_{as} = O(a^4)$, gdy $a \to 0$. Oszacowania podane w pracy zilustrowano przykładami numerycznymi.

А. РЫБАРСКИ (Вроцлав)

## *ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ* (2)


### РЕЗЮМЕ

В работе исследуется качество приближения $\omega_0 \approx \omega_{as}$ частоты $\omega_0$ колебаний с амплитудой $a$ консервативной системы с нечётной, кусочно-непрерывной характеристикой $g(x)$, $x \epsilon \langle -a, +a \rangle$, $g(a) > 0$, квазиупругих сил. Прежде всего доказано, что $\omega_{as} \geqslant \omega_0$. Затем для характеристик вида $g(x) = x + \varepsilon f(x)$ доказана асимптотическая зависимость $\omega_0 - \omega_{as} = O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, $a$—const. Для характеристик вида $g(x) = x + cx^3 + O(x^5)$, $c$—const, доказано соотношение $\omega_0 - \omega_{as} = O(a^4)$ при $a \to 0$. Приведенные в работе оценки иллюстрированы на численных примерах.


A. RYBARSKI (Wrocław)

## *APPROXIMATE DETERMINATION OF VIBRATION FREQUENCY IN CONSERVATIVE SYSTEMS* (2)


### SUMMARY

The author investigates the accuracy of the approximation $\omega_0 \approx \omega_{as}$ of the frequency $\omega_0$ of vibrations with amplitude $a$ of a conservative system with an odd, piecewise continuous, characteristic of quasielastic forces $g(x)$, $x \epsilon \langle -a, +a \rangle$, $g(a) > 0$. It is proved that $\omega_{as} \geqslant \omega_0$. Then, for characteristics of the form $g(x) = x + \varepsilon f(x)$ the author proves the asymptotic relation $\omega_0 - \omega_{as} = O(\varepsilon^2)$ as $\varepsilon \to 0$, $a$ — const. For characteristics of the form $g(x) = x + cx^3 + O(x^5)$, $c$ — const, he proves the relation $\omega_0 - \omega_{as} = O(a^4)$ as $a \to 0$. The estimates given in the paper are illustrated by numerical examples.