

W. NEUNDORF und R. SCHÖNEFELD (Ilmenau, DDR)

KONVERGENZBESCHLEUNIGUNG DURCH MODIFIZIERTES PICARD-VERFAHREN

Einleitung. Die Anwendung sogenannter DRKZ-Verfahren (Diskreter Raum, Kontinuierliche Zeit) zur Lösung von parabolischen partiellen Differentialgleichungen auf hybriden Rechnersystemen führt zur iterativen Lösung eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems. Diese Lösung ist mit dem Analogteil eines solchen hybriden Rechnersystems relativ schnell auszuführen. Zur Beschleunigung der Konvergenz kann ein Beschleunigungsfaktor eingeführt werden, der letztlich zur Einsparung von Rechenzeit führt. Theoretische Untersuchungen zur Wirkung des Beschleunigungsfaktors führen zum modifizierten PICARD-Verfahren (MPV). Die Arbeit zeigt neben der Existenz und Eindeutigkeit dieses Verfahrens die Abhängigkeit der Auswahl des Beschleunigungsfaktors von der konkreten Differentialgleichung.

1. Einführung des Beschleunigungsfaktors. Gesucht sei die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x), \quad t > t_0,$$

mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Ein konstruktiver Weg dazu führt über die äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x) d\tau$$

und die Anwendung der sukzessiven Approximation oder auch PICARD-Verfahren (PV) genannt

$$(2) \quad x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x^{(n)}(\tau)) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$x^{(0)}$ gegeben, zur Bildung einer Folge von Näherungsfunktionen, die gegen die Lösung von (1) konvergiert.

Das vorgeschlagene Relaxationsverfahren ist dadurch charakterisiert, daß die Gleichung (2) nur einen Zwischenschritt zur Bildung von $x^{(n+1)}(t)$ darstellt und die eigentliche $(n+1)$ -te Näherungsfunktion sich aus

$$(3) \quad \begin{aligned} x^{(n+1)}(t) &= x^{(n)}(t) + \omega [x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)], \\ x^{(n+1)}(t) &= \omega x_0 + (1 - \omega)x^{(n)}(t) + \omega \int_{t_0}^t f(\tau, x^{(n)}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

ergibt, d. h. der Zuwachs $x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)$ wird mit dem Faktor $\omega > 0$ gewichtet. Die zu (3) entsprechende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x}^{(n+1)}(t) = (1 - \omega)\dot{x}^{(n)}(t) + \omega f(t, x^{(n)}(t)).$$

Im Falle eines Differentialgleichungssystem lassen sich die gemachten Überlegungen ebenso einfach anwenden, weshalb darauf verzichtet werden soll.

2. Konvergenz des modifizierten PICARD-Verfahrens. Die Gleichung (1) genüge den Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes, d. h. die Funktion f ist stetig in einem offenen Bereich G der (t, x) -Ebene und erfüllt dort die Lipschitzbedingung

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|.$$

In den Lehrbüchern zur Theorie der Differentialgleichung (Pontrjagin, Petrowski, Kamke, Kneschke, Smirnow) wird bewiesen, daß die sukzessive Approximation (2) in einem gewissen Intervall $I = [t_0, t_0 + h]$, der Einfachheit halber nehmen wir nur $h > 0$, gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

Falls $|f(t, x)| \leq M$ im Rechteck $R\{t_0 \leq t \leq t_1, |x - x_0| \leq N\} \subset G$ ist, so genügt zu fordern, daß

$$h \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{N}{M} \right\}$$

ist. Es gelten dann die Abschätzungen

$$(4) \quad \delta_1^{(n)}(t) = |x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)| \leq MK^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = Mh \frac{(Kh)^n}{(n+1)!} = B,$$

$$\varepsilon_1^{(n)}(t) = |x(t) - x^{(n)}(t)| \leq B.$$

Wendet man zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung von vornherein das Prinzip der kon-

trahierenden Abbildung (Banachscher Fixpunktsatz) für den Operator

$$[Ax](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

an, so läßt sich dieses einfachere Herangehen nur mit einer weiteren Forderung bezüglich der Größe h erreichen, nämlich $h \leq \theta/K$, $0 < \theta < 1$. Die Ungleichung

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| = \|Ax^{(n)} - Ax^{(n-1)}\| \leq \theta \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$$

mit

$$\|x\| = \max_{x \in I} |x(t)|$$

garantiert sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Lösung und liefert die Fehlerabschätzungen

$$\varepsilon_1^{(n)}(t), \delta_1^{(n)}(t) \leq \frac{N\theta^n}{(n+1)!}.$$

Wie sich der Relaxationsfaktor ω auf die Konvergenz auswirkt, soll nun untersucht werden. Mit dem MPV (3)

$$x_\omega^{(n+1)}(t) = [A_\omega x^{(n)}](t) = \omega x_0 + (1-\omega)x_\omega^{(n)}(t) + \omega \int_{t_0}^t f(\tau, x_\omega^{(n)}(\tau)) d\tau$$

wird die Folge der Funktionen $x_\omega^{(0)} = x_0, x_\omega^{(1)}, x_\omega^{(2)}, \dots$ ermittelt. Wählt man entsprechend h , so läßt sich auch hier zeigen, daß die Funktionen $x_\omega^{(n)}$ der Cauchybedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| = 0$$

bzw.

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leq \gamma_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < \infty$$

genügen und somit im Intervall I gegen eine eindeutig definierte stetige Funktion $x(t) = x_\omega(t)$, die Lösung von (1) ist, konvergieren.

Die Bedingungen für h ergeben sich aus folgenden Betrachtungen. Es sei $y(t)$ eine beliebige Funktion in R , d. h. $\|y - x_0\| \leq N$, und

$$y^*(t) = [A_\omega y](t) = \omega x_0 + (1-\omega)y(t) + \omega \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y^* - x_0 &= (1 - \omega)(y - x_0) + \omega \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \\ |y^* - x_0| &\leq |1 - \omega| |y - x_0| + \omega \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau))| d\tau \\ &\leq |1 - \omega| N + \omega M(t - t_0). \end{aligned}$$

Die Ungleichung $|y^* - x_0| \leq N$ ist erfüllt, wenn

$$(1 - \omega) N \operatorname{sign}(1 - \omega) + \omega Mh \leq N,$$

und somit, wenn

$$h \leq \begin{cases} \frac{N}{M} & \text{für } \omega \leq 1, \\ \frac{2 - \omega}{\omega} \frac{N}{M} & \text{für } \omega > 1. \end{cases}$$

Für die Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterierter

$$\delta_{\omega}^{(n)}(t) = |x_{\omega}^{(n+1)}(t) - x_{\omega}^{(n)}(t)|, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ergeben sich die Abschätzungen

$$\delta_{\omega}^{(0)}(t) \leq \omega M(t - t_0) \leq \omega Mh,$$

$$\delta_{\omega}^{(1)}(t) \leq \omega M(t - t_0) \left(|1 - \omega| + \omega K \frac{t - t_0}{2} \right)$$

und allgemein

$$\begin{aligned} (5) \quad \delta_{\omega}^{(n)}(t) &= \left| \omega x_0 + (1 - \omega)x_{\omega}^{(n)} + \omega \int_{t_0}^t f(\tau, x_{\omega}^{(n)}(\tau)) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \omega x_0 - (1 - \omega)x_{\omega}^{(n-1)} - \omega \int_{t_0}^t f(\tau, x_{\omega}^{(n-1)}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq |1 - \omega| \delta_{\omega}^{(n)}(t) + \omega K \int_{t_0}^t \delta_{\omega}^{(n-1)}(\tau) d\tau \\ &\leq \omega M(t - t_0) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |1 - \omega|^{n-1} \frac{[\omega K(t - t_0)]^i}{(i+1)!} \\ &\leq \omega Mh \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |1 - \omega|^{n-i} \frac{(\omega Kh)^i}{(i+1)!}. \end{aligned}$$

Wegen $(i+1)! \geq 2^i$, $i = 0, 1, \dots$, gilt

$$(6) \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |1-\omega|^{n-i} \frac{(\omega Kh)^i}{(i+1)!} \leq \left(|1-\omega| + \frac{\omega KH}{2} \right)^n$$

und so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_\omega^{(n)}\| = 0$, wenn

$$|1-\omega| + \frac{\omega KH}{2} \leq k < 1.$$

Das fordert jedoch eine zusätzliche Bedingung für die Größe h , nämlich

$$(7) \quad h \leq \begin{cases} \frac{2\theta}{K} & \text{für } \omega \leq 1, \\ \frac{2-\omega}{\omega} \frac{2\theta}{K} & \text{für } \omega > 1, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung benutzt man die Kontraktionsbedingung für den Operator A_ω

$$(8) \quad A_\omega x - A_\omega y = (1-\omega)(x-y) + \omega \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))] d\tau,$$

$$\|A_\omega x - A_\omega y\| \leq (|1-\omega| + \omega Kh) \|x - y\|,$$

die zuerst nur die „Eindeutigkeit im Kleinen“ (eine schärfere Bedingung für h als in (7)) liefert. Diese ist jedoch auf das größere Intervall ausdehnbar.

Grundsätzlich ist für die Länge des Integrationsintervalls zu fordern, daß

$$(9) \quad h \leq \min \left\{ t_1 - t_0, c \frac{N}{M}, c \frac{2\theta}{K} \right\}, \quad 0 < \theta < 1,$$

mit $c = 1$ für $\omega \leq 1$ und $c = (2-\omega)/\omega$ für $\omega > 1$.

Die zusätzliche Bedingung (7) beim MPV ließe sich jedoch noch abschwächen, wäre eine genauere Abschätzung als (6) möglich. Die dort vorhandene Reserve führt ja schließlich dazu, daß (7) beim PV entfällt.

Notieren wir an dieser Stelle noch die Fehlerabschätzung

$$(10) \quad \varepsilon_\omega^{(n)}(t) = |x(t) - x_\omega^{(n)}(t)| \leq Mh \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |1-\omega|^{n-i} \frac{(\omega Kh)^i}{(i+1)!} \leq k^n,$$

insbesondere $\varepsilon_\omega^{(0)}(t) \leq M(t-t_0) \leq Mh (\varepsilon_\omega^{(0)})$ ist natürlich unabhängig von ω .

Würde man auch beim MPV von vornherein das Kontraktionsprinzip anwenden, so wäre wegen (8)

$$|1 - \omega| + \omega Kh \leq k < 1, \quad h \leq c \frac{\theta}{K}, \quad 0 < \theta < 1,$$

zu fordern, und man erhielte nach (5) und

$$\varepsilon_{\omega}^{(n)}(t) \leq |1 - \omega| \varepsilon_{\omega}^{(n-1)}(t) + \omega K \int_{t_0}^t \varepsilon_{\omega}^{(n-1)}(\tau) d\tau$$

die Konvergenz der Folgen $\delta_{\omega}^{(n)}$ und $\varepsilon_{\omega}^{(n)}$ gegen Null gemäß

$$\|\varepsilon_{\omega}^{(n)}\| \leq k \|\varepsilon_{\omega}^{(n-1)}\|, \quad \|\delta_{\omega}^{(n)}\| \leq k \|\delta_{\omega}^{(n-1)}\|.$$

Unter Voraussetzung (9) wurde somit die Konvergenz des modifizierten PICARD-Verfahrens nachgewiesen.

Bemerkungen. 1. Für $\omega \geq 2$ ist A_{ω} kein Kontraktionsoperator.

2. Für $\omega > 1$ ist die sich aus (9) ergebende Länge h des Integrationsintervalls I im allgemeinen kleiner als für $\omega \leq 1$.

3. Das MPV konvergiert im Vergleich mit dem PV im allgemeinen bei kleinerem h , sowohl für $\omega < 1$ als auch für $\omega > 1$.

Spiele die Forderung $h \leq \theta/K$ keine Rolle, so haben beide Verfahren für $\omega \leq 1$ den gleichen Konvergenzbereich.

4. Für gleiches zulässiges h für das PV bzw. MPV erlauben die Fehlerabschätzungen (4) und (10) keinen Rückschluß auf ihre Konvergenzgeschwindigkeit.

Eine Konvergenzbeschleunigung durch den Relaxationsfaktor ω war bisher noch nicht sichtbar. Um diese zu erhalten, sind weitere Voraussetzungen, jedoch ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, notwendig. Sie beziehen sich auf die Funktion $f(t, x)$ bzw. das Integral $\int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ und können in konkreten Beispielen im allgemeinen überprüft werden. Dadurch kann man in den Abschätzungen (4) und (10) für den Fehler $\varepsilon_{\omega}^{(n)}(t)$ auf die Betragszeichen verzichten, durch deren Auftreten normalerweise jegliche Vorzeichen außer acht gelassen werden, obwohl doch gerade beim MPV im Term $(1 - \omega)x_{\omega}^{(n)}(t)$ das Vorzeichen eine wesentliche Rolle spielt.

Nehmen wir an, es sei

$$(11) \quad x_{\omega}^{(0)} = x_0, x_{\omega}^{(1)}, x_{\omega}^{(2)}, \dots \leq x,$$

$$(12) \quad \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \geq 0, \quad t \in I,$$

$$(13) \quad \int_{t_0}^t [f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))] d\tau \geq 0,$$

$y(t), z(t)$ beliebige Funktionen mit $y(t) \geq z(t), t \in I$ (andere Fälle lassen sich ähnlich behandeln). Dann ist

$$\begin{aligned} x - x_{\omega}^{(1)} &= (1 - \omega)(x - x_0) + \omega \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_0)] d\tau \\ &\approx (1 - \omega)Mh + \omega KM \frac{h^2}{2} \\ &\approx MhA, \quad A = 1 - \omega + \omega K \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

und es lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1. Für $h = 0$, ω beliebig, ist natürlich der Fehler $x - x_{\omega}^{(1)} = 0$.
2. Für $\omega < 1$ ist $A > Kh/2$ wegen $Kh < 2$.

Für gleiches h ist das Unterrelaxationsverfahren ungenauer als das PV.

3. Für $\omega > 1$ gelten

$$\begin{aligned} A &> 0 && \text{für } \omega < \omega_0 = 2/(2 - Kh), \\ A &= 0 && \text{für } \omega = \omega_0, \\ A &< 0 && \text{für } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Solange $A > 0$ ist, gilt $Kh/2 > A$, d. h. der Fehler $x - x_{\omega}^{(1)}$ des PV ist also größer als der positive Fehler des MPV.

Der Nulldurchgang des Fehlers $\varepsilon_{\omega}^{(1)}$ liegt bei $\omega_0 = 2/(2 - Kh)$. Für größeres ω wird er dann negativ (negatives Tal). Es ist günstig, hier noch zwei Größen zu bestimmen:

1. Der Bereich, wo der negative Fehler betragsmäßig gleich dem Fehler für $\omega = 1$ ist:

$$\frac{Kh}{2} = -A = \omega \left(1 - \frac{Kh}{2}\right) - 1, \quad \omega_* = \frac{2 + Kh}{2 - Kh}.$$

2. Die Linie der (negativen) Talsohle. Dieses negative Minimum muß bezüglich h gesucht werden, denn der Ausdruck A ist mit wachsendem ω monoton fallend, aber für festes ω haben wir bei $h = 0$ und $h = h_0 = 2(\omega - 1)/(\omega K)$ zwei Nulldurchgänge des Fehlers:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dh} \left(Mh - \omega Mh + \omega MK \frac{h^2}{2} \right) = M(1 - \omega + \omega Kh), \\ h_{\min} &= \frac{\omega - 1}{K} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\min} = \frac{1}{1 - Kh}. \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $\omega_0 < \omega_* < \omega_{\min}$. Natürlich gelten alle diese Beziehungen nur näherungsweise für kleines zulässiges h . Zur besseren

Anschauung sind die Höhenlinien des Fehlers $x - x_\omega^{(1)}$ in Abhängigkeit von h und ω in Abb. 1 angegeben.

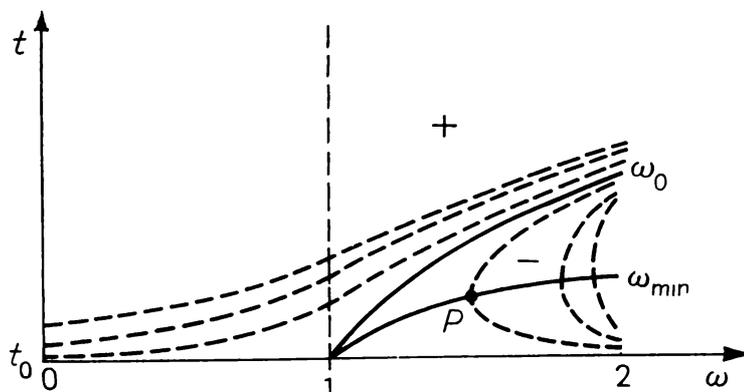


Abb. 1. Höhenlinien $|x - x_\omega^{(1)}| = \varepsilon$

Um für $\omega \geq 1$ den Bereich und darin wiederum das größtmögliche Rechteck

$$R_\varepsilon^{(1)} = [t_0, t_0 + \bar{h}^{(1)}] \times [1, \bar{\omega}^{(1)}]$$

zu bestimmen, in dem der absolute Fehler $\varepsilon_\omega^{(1)} \leq \varepsilon$ ist, $\varepsilon > 0$ gegeben, braucht man erstens die Beziehung

$$MK \frac{h^2}{2} = \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad h \leq \bar{h}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{MK}}$$

und zweitens die negative Höhenlinie im Tal, deren Scheitelpunkt P auf der Talsohlenlinie ω_{\min} noch in diesen ε -Bereich fällt, d. h.

$$Mh_{\min} \left[\omega \left(1 - \frac{Kh_{\min}}{2} \right) - 1 \right] = \varepsilon, \quad h_{\min} = \frac{\omega - 1}{\omega K},$$

woraus eine quadratische Gleichung für ω folgt:

$$(\omega - 1)^2 = \frac{2K\varepsilon}{M} \omega.$$

Die Parabel $p = (\omega - 1)^2$ hat mit der durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden $g = 2K\varepsilon\omega/M$ zwei Schnittpunkte für $\omega < 1$ bzw. $\omega > 1$. Der größere von beiden ist das gesuchte $\bar{\omega}^{(1)}$. Es ist

$$\bar{\omega}^{(1)} = 1 + \frac{K\varepsilon}{M} + \sqrt{\left(1 + \frac{K\varepsilon}{M} \right)^2 - 1} > 1 + \frac{2K\varepsilon}{M}.$$

Als möglicher Faktor ω bietet sich im ersten Iterationsschritt

$$(14) \quad \omega^{(1)} = 1 + \frac{K\varepsilon}{M} < \bar{\omega}^{(1)}$$

an. Für $\omega \in (1, \bar{\omega}^{(1)})$ kann man, wie auch aus Abb. 1 zu sehen ist, das Integrationsintervall I geringfügig vergrößern, ohne die Fehlerschranke ε zu überschreiten. Diesen Umstand kann man auch bei weiteren Iterationen bemerken.

Ähnliche Ergebnisse erhält man auch im zweiten Iterationsschritt. Es ist

$$x - x_{\omega}^{(2)} = (1 - \omega)(x - x_{\omega}^{(1)}) + \omega \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_{\omega}^{(1)}(\tau))] d\tau$$

$$\approx MhA, \quad A = (1 - \omega)^2 + 2(1 - \omega)\omega \frac{Kh}{2!} + \omega^2 \frac{(Kh)^2}{3!}.$$

Es gilt:

1. Für $h = 0$, ω beliebig, ist natürlich der Fehler $x - x^{(2)} = 0$.

2. Für $\omega < 1$ ist $A > (Kh)^2/3!$.

Das Unterrelaxationsverfahren ist ungenauer als bei gleichem h .

3. Für $\omega > 1$ gelten

$$A > 0 \quad \text{für } \omega < \omega_{01} \text{ oder } \omega > \omega_{02},$$

$$A = 0 \quad \text{für } \omega = \omega_{01} \text{ oder } \omega = \omega_{02},$$

$$A < 0 \quad \text{für } \omega > \omega_{01} \text{ und } \omega < \omega_{02}.$$

Die Gleichung $A = 0$ ergibt die Nullfehlerlinien

$$\omega_{01} = \frac{6 - Kh(3 + \sqrt{3})}{6 - 6Kh + (Kh)^2}, \quad \omega_{02} = \frac{6 - Kh(3 - \sqrt{3})}{6 - 6Kh + (Kh)^2}.$$

Daraus erfolgt wiederum die Unterteilung der (ω, h) -Ebene in positive und negative Fehlerbereiche. Zwischen den Kurven ω_{01} und ω_{02} ist der Fehler negativ und sonst positiv. Die Gleichungen der Talsohlen- und Kammlinie ergeben sich aus

$$0 = \frac{d}{dh} (MhA) = (Kh)^2 - 4 \frac{\omega - 1}{\omega} Kh + 2 \left(\frac{\omega - 1}{\omega} \right)^2$$

und sind

$$h_{\min} = \frac{\omega - 1}{\omega K} (2 + \sqrt{2}) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\min} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - Kh},$$

$$h_{\max} = \frac{\omega - 1}{\omega K} (2 - \sqrt{2}) \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\max} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - Kh}.$$

Die Höhenlinien sind in Abb. 2 dargestellt. Es gilt $\omega_{01} < \omega_{\min} < \omega_{02} < \omega_{\max}$. Auch hier läßt sich, analog zum ersten Iterationsschritt für $\omega \geq 1$, der Bereich und dann das Rechteck

$$R_\varepsilon^{(2)} = [t_0, t_0 + \bar{h}^{(2)}] \times [1, \bar{\omega}^{(2)}]$$

bestimmen, in dem $\varepsilon_\omega^{(2)} \leq \varepsilon$ ist. Die Rechteckseiten ergeben sich aus

$$Mh \frac{(Kh)^2}{3!} = \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \bar{h}^{(2)} = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{MK^2}}$$

und den Koordinaten der Scheitelpunkte P_1 und P_2 (siehe Abb. 2) aus den Gleichungen

$$MhA = \varepsilon, \quad h_{\text{opt}} = \frac{\omega - 1}{\omega K} (2 \pm \sqrt{2}).$$

Daraus leitet sich ein günstiges $\omega^{(2)}$ ab.

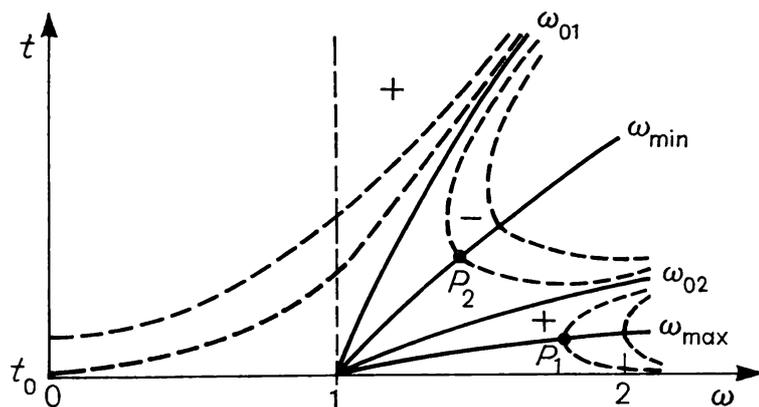


Abb. 2. Höhenlinien $|x - x_\omega^{(2)}| = \varepsilon$

In den weiteren Iterationsschritten ist festzustellen, daß sich die Anzahl der Nulldurchgänge des Fehlers $x - x_\omega^{(n)}$ mit jedem Schritt um eins erhöht und abwechselnd ein negativer oder positiver Bereich hinzukommt.

Folgendes läßt sich erkennen:

1. $\bar{h}^{(1)} \leq \bar{h}^{(2)} \leq \dots$
2. Die bei $\omega > 1$ auftretende Intervallverkürzung $(2 - \omega)/\omega$ für h spielt für Werte ω nahe 1 keine praktische Rolle. Unter obigen Voraussetzungen kann das Integrationsintervall sogar etwas größer als $\bar{h}^{(n)}$ sein, ohne dabei den Fehler ε zu überschreiten.

3. Die Scheitel P der Extremallinien ω_{\min} bzw. ω_{\max} stellen eine äußere Begrenzung eines gewissen geometrisch darstellbaren Bereichs dar, wo $|x - x_\omega^{(n)}| \leq \varepsilon$ ist. Dieser hat die Gestalt eines Ellipsenausschnitts $E_\varepsilon^{(n)}$ und vergrößert sich mit wachsendem n , d. h. die Scheitel entfernen

sich vom Punkt $(t, \omega) = (t_0, 1)$ (Abb. 3). Der größtmögliche ε -Bereich $\bar{E}_\varepsilon^{(n)}$ enthält natürlich $E_\varepsilon^{(n)}, R_\varepsilon^{(n)}$ und insbesondere eine Umgebung der Nullfehlerlinien.

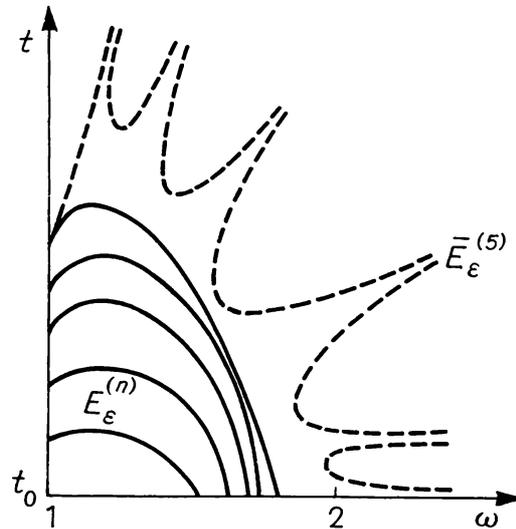


Abb. 3. Vergrößerung des Genauigkeitsbereichs $E_\varepsilon^{(n)} \subset E_\varepsilon^{(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, 4$

4. Die Bestimmung eines optimalen Faktors ω für alle Iterationen bzw. eine Folge von $\omega^{(n)}$ ist formelmäßig schwierig und hängt stets vom konkreten Beispiel ab. Unter den Voraussetzungen (11) und (12) ergibt er sich aus dem Vergleich der Ausdrücke

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\omega - 1)^{n-i} (-1)^{n-i} \frac{(Kh)^i}{(i-1)!} \quad \text{und} \quad Mh \frac{(Kh)^n}{(n+1)!}.$$

Gemäß Gleichung (14) bietet sich, ohne den Aufwand zu übertreiben, der Wert $\omega = 1 + K\varepsilon/M$ an. Dieser ist insofern auch sinnvoll, da der Fehler ε bei einer hybriden Implementierung des MPV wegen der begrenzten Analogrechnergenauigkeit sowieso nicht zu klein sein darf. Welche Genauigkeitsverbesserung bzw. Einsparung an Iterationen bei günstigem ω erreicht wird, hängt doch wesentlich von der gegebenen Differentialgleichung ab.

5. Für $\omega = 1$ nimmt der Fehler $\varepsilon_\omega^{(n)}$ mit wachsendem h ständig zu, während er für $\omega > 1$ durch sein Schwingungsverhalten in einem gewissen Intervall $[t_0, t_0 + h_1]$ nicht anwächst.

Nimmt man anstatt der Voraussetzungen (11)-(13) die folgenden

$$x_\omega^{(0)} = x_0, x_\omega^{(1)}, x_\omega^{(2)}, \dots \leq x,$$

$$\int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \leq 0, \quad t \in I,$$

$$(15) \quad \int_{t_0}^t [f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))] d\tau \leq 0 \quad \text{für } y(t) \leq z(t), t \in I,$$

so erhält man eine Konvergenzbeschleunigung ebenfalls für $\omega > 1$.

Von entscheidender Bedeutung ist also wegen (13) und (15) das Verhalten der partiellen Ableitung $\partial f/\partial x$. Für die bisher betrachteten Fälle war $\partial f/\partial x > 0$ im $[t_0, t_1]$.

Ist $\partial f/\partial x < 0$, tritt eine Konvergenzbeschleunigung für $\omega < 1$ auf, während hier für $\omega > 1$ der Fehler ständig wächst.

Ist $\partial f/\partial x = 0$, d. h. $f(t, y) = f(t)$, dann erhält man das beste Konvergenzverhalten für $\omega = 1$, denn es ist

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

und wenn $\omega = 1 + \delta$, $|\delta|$ klein, gilt

$$x_\omega^{(n)}(t) = x_0 + [1 + O(\delta^n)] \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

was für $\delta = 0$ stets die beste Näherungsfunktion ergibt.

Fehlen jegliche Informationen über die Differentialgleichung, so rechnet man mit mehreren Werten ω zwischen .5 und 1.5.

3. Beispiel. Für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax, & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

mit x_0 und a beliebig reell, kann die Wirkung des Relaxationsfaktors anschaulich demonstriert werden. Das betrifft sowohl die hybride Implementierung als auch die digitale Simulation des Verfahrens, die hier angewandt wurde.

Die ersten Iterationsfunktionen lassen sich aus Gleichung (3) mit $x_\omega^{(0)} = x_0$ leicht ermitteln. Für $n = 1, 2, \dots$ gelten

$$\begin{aligned} x_1^{(n)}(t) &= x_0 \sum_{i=0}^n a^i \frac{(t-t_0)^i}{i!}, \\ x_\omega^{(n)}(t) &= x_0 \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} \omega^i a^i \frac{(t-t_0)^i}{i!}, \\ \alpha_0^{(n)} &= \alpha_n^{(n)} = 1, \\ \alpha_i^{(n)} &= (1-\omega) \alpha_i^{(n-1)} + \alpha_{i-1}^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

und die genaue Lösung ist

$$x(t) = x_0 \exp\{a(t-t_0)\}.$$

Betrachten wir die Näherungsfunktion $x^{(2)}(t)$ zur Auswahl des Faktors $\omega = 1 + \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$ und klein. Sie hat die Gestalt

$$x_{1+\delta}^{(2)}(t) = x_0 \left(\sum_{i=0}^2 a^i \frac{h^i}{i!} + R_{1+\delta} \right),$$

$$R_{1+\delta} = -\delta^2 ah + \delta(2+\delta)a^2 \frac{h^2}{2}, \quad h = t - t_0.$$

Ist $\partial f/\partial x = a > 0$, dann

1. $R_{1+\delta} < 0$ für $\delta < 0$ und $x_{1+\delta}^{(2)}$ ist eine schlechtere Näherungslösung als $x_1^{(2)}$.

2. $R_{1+\delta} > 0$ für $\delta > 0$ und $x_{1+\delta}^{(2)}$ ist besser als $x_1^{(2)}$. Für größeres δ wird dann $R_{1+\delta} < 0$.

Für $a < 0$ ergibt sich bei $\delta < 0$ ein besseres Konvergenzverhalten. Zur Bestimmung von h . Es ist erstens

$$K = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = a$$

und bei gegebenem Rechteck $R\{t_0 \leq t \leq t_1, |x - x_0| \leq N\}$ folgt $|x| \leq |x_0| + N$ sowie

$$|f(t, x)| = |a||x| \leq |a|(N + |x_0|) = M.$$

Somit ist

$$h \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{1}{|a|(1 + |x_0|/N)} \right\}.$$

Für $\omega > 1$ ist noch der Verkleinerungsfaktor $(2 - \omega)/\omega$ zu berücksichtigen. Wegen

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{|a|(1 + |x_0|/N)} < \frac{1}{|a|} = \frac{1}{K} \quad \text{bei } x_0 \neq 0$$

ist die Konvergenz des MPV gesichert.

Numerische Berechnungen wurden für verschiedene Parameter a, N, ε durchgeführt. Daraus ergaben sich die zulässigen Bereiche für h und ω , die aber praktisch überschritten wurden durften.

In den Abb. 4 und 5 ist der Verlauf der Fehlerhöhenlinie für die ersten drei Iterationsfunktionen unter Zugrundelegung folgender Werte dargestellt: $t_0 = 0, t_1 = 2, x_0 = 1$ und

Abb.	a	N	M	K	$h <$	$\omega \in$	$\varepsilon = x - x^{(n)}$
4	2	9	20	2	.45	[0, 3]	.2
5	-2	1	4	2	.25	[0, 2]	.2

In Tabelle 1 ist für den Fall $a = 2$ ein Genauigkeitsvergleich zwischen den Näherungsfunktionen $x^{(n)}(t)$ des MPV ($\omega = 1.3$) bzw. des PV und der genauen Lösung $x(t)$ für mehrere t angeführt.

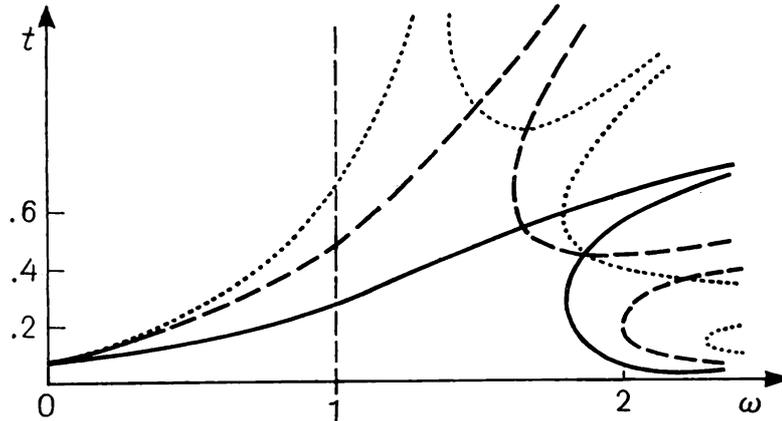


Abb. 4. Höhenlinien $|x - x_{\omega}^{(n)}| = .2, n = 1, 2, 3, a = 2$

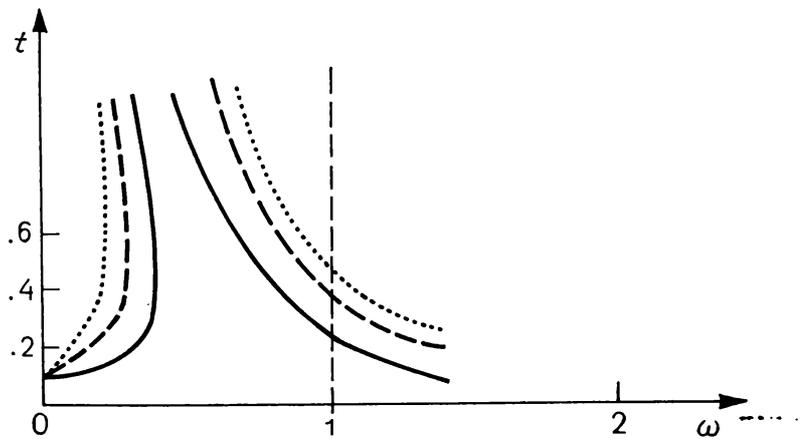


Abb. 5. Höhenlinien $|x - x_{\omega}^{(n)}| = .2, n = 1, 2, 3, a = -2$

Während beim PV sich alle Funktionen $x_1^{(n)}$ gleichmäßig von einer Seite an die Lösung x annähern, schwingen die Funktionen $x_{\omega}^{(n)}, \omega > 1$, um x mit immer geringerer Abweichung.

Aus der Tabelle 2 ist auch eine Einsparung von Iterationen bei $\omega > 1$ zur Erreichung der gleichen Genauigkeit wie bei $\omega = 1$ für $x_1^{(5)}$ sichtbar, d. h.

$$\varepsilon = \max_{t \in [0, h]} |x - x_1^{(5)}| \approx \max_{t \in [0, h]} |x - x_{\omega}^{(n)}| \quad \text{mit } n < 5, \omega > 1.$$

TABELLE 1

$x - x_1^{(1)}$	$x - x_{1.3}^{(1)}$	$x - x_1^{(2)}$	$x - x_{1.3}^{(2)}$	$x - x_1^{(3)}$	$x - x_{1.3}^{(3)}$	$x - x_1^{(4)}$	$x - x_{1.3}^{(4)}$	$x - x_1^{(5)}$	$x - x_{1.3}^{(5)}$
$.21_{10} - 1$	$-.39_{10} - 1$	$.14_{10} - 2$	$.56_{10} - 2$	$.69_{10} - 4$	$-.45_{10} - 3$	$.18_{10} - 5$	$-.11_{10} - 3$	$.92_{10} - 7$	$.75_{10} - 4$
$.92_{10} - 1$	$-.28_{10} - 1$	$.12_{10} - 2$	$-.74_{10} - 2$	$.12_{10} - 2$	$.35_{10} - 2$	$.91_{10} - 4$	$-.91_{10} - 3$	$.60_{10} - 5$	$.16_{10} - 3$
$.22$	$.42_{10} - 1$	$.42_{10} - 1$	$-.23_{10} - 1$	$.61_{10} - 2$	$.51_{10} - 2$	$.72_{10} - 3$	$-.17_{10} - 3$	$.71_{10} - 4$	$-.24_{10} - 3$
$.43$	$.19$	$.11$	$-.43_{10} - 1$	$.20_{10} - 1$	$.14_{10} - 3$	$.21_{10} - 2$	$.22_{10} - 2$	$.41_{10} - 3$	$-.71_{10} - 3$
$.72$	$.42$	$.22$	$-.37_{10} - 1$	$.52_{10} - 1$	$-.13_{10} - 1$	$.99_{10} - 2$	$.46_{10} - 2$	$.16_{10} - 2$	$-.53_{10} - 3$
4.4	3.8	2.4	1.2	1.1	$.54_{10} - 1$.39	$-.56_{10} - 1$.12	$.56_{10} - 3$
50	48	42	36	31	21	20	2.8	12	1.4

TABELLE 2

ε	h	$x^{(n)}$
$.71_{10} - 4$.3	$x_{1.1}^{(4)}$
$.16_{10} - 2$.5	$x_{1.2}^{(3)}$
$.30_{10} - 1$.8	$x_{1.3}^{(3)}$
.12	1	$x_{1.5}^{(2)}$

Die Werte $x_{1.1}^{(n)}$ sind in der Nähe des zulässigen h um eine Dezimalstelle genauer als die $x_1^{(n)}$.

SEKTION MARÖK
 TECHNISCHE HOCHSCHULE ILMENAU
 DDR-63 ILMENAU

Eingegangen am 20. 10. 1978

W. NEUNDORF i R. SCHÖNEFELD (Ilmenau, NRD)

**PRZYŚPIESZANIE ZBIĘŻNOŚCI
 ZA POMOCĄ ZMODYFIKOWANEJ METODY PICARDA**

STRESZCZENIE

Wprowadzenie czynnika przyspieszającego pozwala na modyfikację znanej metody Picarda. W pracy podano warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania i pokazano, jak wybór czynnika przyspieszającego zależy od postaci danego równania różniczkowego. Działanie metody zilustrowano przykładem.