ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XI, 4(1970)

А. МАЗУРКЕВИЧ и А. РЫБАРСКИ (Вроцлав)

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. Пусть функция $y = y(t)$, определенная в интервале $I = \langle \alpha, \beta \rangle$, удовлетворяет в нём дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{y} + g(y) = f, \tag{1.1}$$

где $f = f(t)$. Подобные уравнения встречаются в теории колебаний нелинейных систем, а также в эластомеханике ([5], часть I; [7], часть 2, гл. 2; [10]; [2], гл. II; [9], 3.180-3.183 и 8.30-8.40). Поэтому их исследование представляет определённый практический интерес.

В этой работе представлен некоторый способ приближённого нахождения функции y. Состоит он в том, что уравнение (1.1) заменяется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$(-1)^n y^{(2n)} + (-1)^{n-1} a_{n-1} y^{(2n-2)} + \ldots + a_0 y = f, \tag{1.2}$$

где $n \geqslant 1$, а постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n = 1$ подобраны специальным образом. В частном случае $n = 1$, такой способ действия был предложен в работах [11] и применён в работах [8]. Для $n > 1$, идея метода представлена в работе [12].

Рассмотрим дифференциальный оператор L, определённый в некотором подклассе класса $\operatorname{int} C^{2n}(I)$ (1) формулой

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k u^{(2k)}, \tag{1.3}$$

причём $a_n = 1$. Основой наших рассуждений являются некоторые оценки норм обратного оператора, которые даны в § 2. При помощи этих оценок можно оценить погрешности, которые возникают в связи с заменой дифференциального уравнения (1.1) уравнением (1.2). Оценки, полученные таким образом, представлены в § 3.

---

(1) Символ $\operatorname{int} C^{2n}(I)$ обозначает класс функции $2n$-кратно кусочно непрерывнодифференцируемых.

В последнем параграфе рассмотрены некоторые вычислительные примеры. Один из них связанный с теорией теплоты, был уже употреблён в работе [3] для продемонстрирования достоинств так называемого упрощённого приближенного метода Ньютона. Оказывается, что при более или менее одинаковой затрате расчётной работы, наш метод даёт здесь лучшие вычислительные эффекты, то есть более точные приближения. Но представленная в работе [3] версия метода Ньютона имеет более широкий круг применения.

2. О ограниченности оператора L^{-1}. В дальнейшем, символы (,) и $\| \ \|$ обозначают скалярное произведение и норму L^2 в интервале I. Говорим, что функция $\eta \in \operatorname{int} C^{2n}(I)$ принадлежит классу $S_n(w)$, $w > 0$, если она удовлетворяет интегральным условиям

$$(2.1) \qquad (\eta, \eta^{(2k)}) = (-1)^k \|\eta^{(k)}\|^2, \qquad \|\eta^{(k)}\| \geqslant w \|\eta^{(k-1)}\|,$$

для $k = 1, \ldots, n$. С помощью неравенства Стеклова (см. [10], стр. 346) можно доказать, что данная функция $\eta \in C^{2n}(I)$ безусловно принадлежит классу $S_n(w)$, если только нули этой функции и её производных достаточно плотно расположены в интервале I. Следовательно, для произвольного $w > 0$ класс $S_n(w)$ не является пустым.

При фиксированном $n \geqslant 1$ употребляем следующие обозначения:

$$(2.2) \qquad W_k(w) = \sum_{i=k}^{n} a_i w^{2i} - \sum_{i=0}^{k-1}{}' a_i^- w^{2i}, \qquad V_k(w) = \sum_{i=0}^{k-1}{}' a_i^+ w^{2i},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$; $a_i^+ = (|a_i| + a_i)/2$, $a_i^- = (|a_i| - a_i)/2$, а чёрточка возле знака $\sum$ обозначает, что данный член следует удалить из формулы, если верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего предела. Докажем следующию теорему:

Теорема 1. *Если функция η принадлежит классу $S_n(w)$, а параметр $w > 0$ исполняет условие*

$$(2.3) \qquad w^{2n} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^- w^{2i} > 0, \qquad \text{или } W_n(w) > 0,$$

тогда для данного значения k, $k = 0, 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$(2.41) \qquad \|\eta^{(k)}\| \leqslant w^k W_o^{-1}(w) \|L\eta\|,$$

если только $W_k(w) \geqslant V_k(w)$, или неравенство

$$(2.42) \qquad \|\eta^{(k)}\| \leqslant \frac{1}{2} w^k [W_k(w) V_k(w)]^{-1/2} \|L\eta\|,$$

если $W_k(w) < V_k(w)$.

Доказательство. Из определения оператора L, при помощи первого из условий (2.1), получаем равенство

$$(\eta, L\eta) = \|\eta^{(n)}\|^2 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i^- \|\eta^{(i)}\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^+ \|\eta^{(i)}\|^2.$$

Фиксируя произвольно выбранное значение k, применяем здесь второе из условий (2.1) ко всем членам первой суммы и к тем членам второй суммы, для которых $i \geqslant k$. Таким образом получается следующее неравенство:

$$(\eta, L\eta) \geqslant w^{-2n} \|\eta^{(n)}\|^2 W_n(w) + \|\eta^{(k)}\|^2 \sum_{i=k}^{n-1}{}' a_i^+ w^{2i-2k} + \sum_{i=0}^{k-1}{}' a_i^+ \|\eta^{(i)}\|^2.$$

Из условия (2.3) имеем $W_n(w) > 0$. Пользуясь сейчас вторым из условий (2.1), выводим очередное неравенство:

$$(\eta, L\eta) \geqslant w^{-2k} W_k(w) \|\eta^{(k)}\|^2 + V_k(w) \|\eta\|^2.$$

При помощи неравенства Шварца получаем отсюда основную оценку

$$W_k(w) \|\eta^{(k)}\|^2 + w^{2k} V_k(w) \|\eta\|^2 \leqslant w^{2k} \|L\eta\| \; \|\eta\|. \tag{2.5}$$

Легко заметить, что из условия (2.3) следует $W_k(w) > 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. В дальнейшем применяем следуюшие обозначения:

$$u = \|\eta^{(k)}\|, \quad v = \|\eta\|, \quad a^2 = w^{2k} V_k(w) W_k^{-1}(w), \quad b = w^{2k} W_k^{-1}(w) \|L\eta\|.$$

В этих обозначениях неравенство (2.5) принимает следующий вид:

$$u^2 + a^2 v^2 \leqslant bv. \tag{2.61}$$

Из (2.1) также получаем неравенство

$$w^k v \leqslant u. \tag{2.62}$$

Из этих неравенств выведем искомую оценку величины $u = \|\eta^{(k)}\|$.

Из (2.61) и (2.62) следует неравенство $(w^{2k} + a^2) v^2 \leqslant bv$, отсюда $v \leqslant v_{\max} = b/(w^{2k} + a^2)$. Следовательно, из (2.61) находим

$$u \leqslant u_{\max} = \max_{0 \leqslant v \leqslant v_{\max}} \sqrt{bv - a^2 v^2}. \tag{2.7}$$

После вычисления правой стороны, получаем результат

$$u_{\max} = \begin{cases} bw^k/(w^{2k} + a^2) & \text{если } a^2 \leqslant w^{2k}, \\ b/2a & \text{если } a^2 > w^{2k}. \end{cases}$$

Восвращаясь к предыдущим обозначениям, из (2.7) получаем соответственно неравенства (2.41) и (2.42), что завершает доказательство.

Так как $W_0 = W_k + V_k$ и $V_k \geqslant 0$, имеем $W_0^{-1} \leqslant W_k^{-1}$, а также

$\frac{1}{2}[W_k V_k]^{-1/2} \leqslant W_k^{-1}$, если только $W_k < V_k$. Из (2.41) и (2.42) следует единая оценка

$$\|\eta^{(k)}\| \leqslant w^k W_k^{-1}(w)\|L\eta\|,$$

представленная в работе [12]. Таким образом, теорема 1 усиливает результаты работы [12]. К сожалению, наша теорема недостаточна для общего вычисления нормы оператора L^{-1}.

3. Применение теоремы 1. Рассмотрим функцию $y \in C^2(I)$, монотонную в интервале I, удовлетворяющую в нём дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + g(y) = 0, \tag{3.1}$$

где $g = g(x)$ является некоторой функцией класса $C^{2n-2}\langle y(a), y(\beta)\rangle$. Функцию y аппроксимируем функцией $u \in \operatorname{int} C^{2n}(I)$, которая кусочным образом удовлетворяет следующему уравнению:

$$Lu = f = \text{const}. \tag{3.2}$$

Для оценки погрешности приближения $y \approx u$ принимаем условия $y - u = \eta \in S_n(w)$ и $W_n(w) > 0$ и вводим вспомогательные функции $\varphi_i(t) = (-1)^i y^{(2i)}(t)$. Из теоремы 1 следует теперь оценка

$$\|\eta^{(k)}\| \leqslant C_k(a_0, \ldots, a_{n-1})\|f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\|, \tag{3.3}$$

где

$$C_k(a_0, \ldots, a_{n-1}) = w^k W_0^{-1}(w), \quad \text{если } W_k(w) \geqslant V_k(w), \tag{3.41}$$

и

(3.42)

$$C_k(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{2} w^k [W_k(w) V_k(w)]^{-1/2}, \quad \text{если } W_k(w) < V_k(w).$$

Очевидно, для того, чтобы оценка (3.3) дала наилучший результат, при заданном значение k следует постоянные $a_0, \ldots, a_{n-1}, f$ подобрать из условия

$$0 \leqslant C_k(a_0, \ldots, a_{n-1})\|f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\| = \text{minimum}. \tag{3.5}$$

В этом и состоит интересующее нас применение теоремы 1.

В практике проведение вычислений по указанной схеме оказывается весьма затруднительным. Первым затруднением является необходимость исполнения условия $\eta \in S_n(w)$, с достаточно большим значением w. Однако, подчиняя функцию u узловым условиям вида

$$u^{(i)}(t_j) = y^{(i)}(t_j), \tag{3.6}$$

где

$i = 0, 1, \ldots, n-1$; $\quad j = 0, 1, \ldots, m+1$; $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = \beta$;

обеспечиваем принадлежность разности $y-u$ классу $S_n(w)$, со значением w данным формулой

$$w = \pi \min_{0\leqslant j\leqslant m} (t_{j+1}-t_j)^{-1}.$$

Следовательно, располагая узлы $\{t_j\}$ достаточно плотно в интервале I, параметром w достигаем величины достаточно большой и тогда будет исполнено условие $W_n(w) > 0$.

Следующее затруднение представляет замкнутое вычисление правой стороны оценки (3.3), когда функция y является неизвестной. Но мы можем использовать интеграл энергии для уравнения (3.1), который имеет вид

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2+G(y) = E = \text{const}, \tag{3.7}$$

где $G(x) = \int g(x)dx$. С его помощью функции φ_i можно представить формулой

$$\varphi_i(t) = \psi_i[y(t)], \tag{3.8}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(x)$ представляются в замкнутом виде при промощи функций $G(x)$ и её производных. Вводя переменную интегрирования $x = y(t)$, получаем теперь следующее равенство:

$$\|f-\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\|^2 = \int_{y(\alpha)}^{y(\beta)} \Big\{f-\sum_{i=0}^{n} a_i\psi_i(x)\Big\}^2 \frac{dx}{\sqrt{2[E-G(x)]}}. \tag{3.9}$$

Таким образом избавляемся от неизвестной функции $y = y(t)$.

Уже в простых случаях вычисление интеграла по правой стороне равенства (3.9) является трудным. Вводя мажорирующую функцию $p = p(x)$ со свойствами

$$\frac{1}{\sqrt{2[E-G(x)]}} \leqslant \mu^2 p(x), \quad \mu = \text{const}, \quad \int_{y(\alpha)}^{y(\beta)} p(x)dx = 1, \tag{3.10}$$

можем заменить равенство (3.9) неравенством

$$\Big\|f-\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i\Big\| \leqslant \mu\Big|f-\sum_{i=0}^{n} a_i\psi_i\Big|, \tag{3.11}$$

где $|\ |$ является нормой $\mathscr{L}^2$ в интервале $\langle y(\alpha), y(\beta)\rangle$ с весом $p = p(x)$. Соответствующий выбор веса p даёт нам восможность эффективного вычисления правой стороны оценки (3.11).

Из (3.3) и (3.11) следует

$$\|\eta^{(k)}\| \leqslant \mu C_k(a_0, \ldots, a_{n-1})\Big|f-\sum_{i=0}^{n} a_i\psi_i\Big|. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь последнее затруднение, состоящее в выборе соответственных постоянных $a_0, \ldots, a_{n-1}, f$. Суть дела состоит в том, что задача (3.5) приводит к очень трудоёмким вычислениям. Поэтому удовлетворимся выбором искомых постоянных из условия

$$\left|f - \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_i\right| = \text{minimum}. \tag{3.13}$$

Этот выбор не является оптимальным, но за то простым при вычислениях, так как задача (3.13) является задачей оптимальной линейной аппроксимации в пространстве $\mathscr{L}^2$. Эта задача решается в замкнутом виде при помощи детерминантов Грама (см. [1], стр. 22-23).

Формулы (3.13), (3.2) и (3.12) представляют именно наш аналитический аппарат к приближенному решению уравнения (3.1) и оценке погрешности приближения.

4. Примеры. Используем представленный метод к уравнению

$$\ddot{y} = y + y^2, \tag{4.1}$$

с условиями $y(0) = 1$, $\dot{y}(1) = 0$. Так как это уравнение было уже использовано в работе [3] для продемонстрирования действия так называемого упрощённого метода Ньютона, то применение нашего метода позволит нам оценить его эффективность. Погрешность аппроксимации оцениваем в метрике C.

Пусть функция $y = y(t)$ будет решением уравнения (4.1) при заданных краевых условиях. Можно показать, что функция y является строго убывающей в интервале $(0, 1)$. Обозначим $c = y(1)$. Следовательно, первый интеграл уравнения (4.1) можем записать в следующем виде:

$$\dot{y}^2 = y^2 - c^2 + \tfrac{2}{3}y^3 - \tfrac{2}{3}c^3. \tag{4.2}$$

Отсюда получаем соотношение

$$\int_c^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2 + \frac{2}{3}(y^3 - c^3)}} = 1,$$

в дальнейшем из которого, после соответствующих преобразований, получаем соотношение

$$\sqrt{24}\,[F(\varphi_2, k) - F(\varphi_1, k)] = 2\sqrt{q} + p, \tag{4.3}$$

где

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{h}{\sqrt{1+h^2}}, \quad \varphi_2 = \arcsin\frac{hl}{\sqrt{1+h^2l^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{h^4-1}}{h^2},$$

$$q = \sqrt{3c(1+c)}, \quad p = \sqrt{2q - 3c - 1{,}5}, \quad h^2 = \frac{2\sqrt{q}+p}{2\sqrt{q}-p}, \quad l = \frac{\sqrt{q}+\sqrt{1-c}}{\sqrt{q}-\sqrt{1-c}},$$

а $F(\varphi, k)$ обозначает эллиптический интеграл первого рода.

Из (4.3) получаем[2]

$$c = 0{,}522\ldots \tag{4.4}$$

Сейчас для использования изложенного метода берём $n = k = 1$. Следовательно, функцию $y = y(t)$ аппроксимируем решением $u = u(t)$ линейного уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$-\ddot{u}+a_0u = f, \tag{4.5}$$

с краевыми условиями $u(0) = 1$, $u(1) = c$. Обозначая $\eta(t) = y(t)-u(t)$, из краевых условий получаем $\eta(0) = \eta(1) = 0$. Итак, для функции η исполнено неравенство Стеклова

$$\|\dot{\eta}\| \geqslant \pi\|\eta\|.$$

Следовательно, $\eta \in S_1(\pi)$. Используя обозначения предыдущих параграфов имеем

$$g(x) = -x-x^2, \quad G(x) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},$$

$$E = -\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3}, \quad E-G(x) = \frac{1}{2}(x^2-c^2)+\frac{1}{3}(x^3-c^3),$$

$$\psi_0(x) = x, \quad \psi_1(x) = -x-x^2.$$

Весовую функцию $p(x)$ принимаем в виде

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-c}}.$$

Так как $\min\limits_{c\leqslant x\leqslant 1}[2x^2+(2c+3)x+3c+2c^2] = 6c(1+c)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2[E-G(x)]}} \leqslant \sqrt{\frac{2(1-c)}{c(1+c)}}\,\frac{1}{2\sqrt{1-c}}\,\frac{1}{\sqrt{x-c}}.$$

Итак, за постоянную μ^2 можно принять

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{2(1-c)}{c(1+c)}}.$$

Имея функции $p(x)$, $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$, можем определить постоянные a_0 и f. С этой целью обозначим $b_0 = a_0-1$, $b_1 = -f$. Тогда левая сторона условия (3.13) принимает вид

$$|x^2-b_0x-b_1|^2 = \frac{1}{2\sqrt{1-c}}\int\limits_c^1 \frac{(x^2-b_0x-b_1)^2}{\sqrt{x-c}}\,dx. \tag{4.6}$$

---

[2] Соответствующее вычисления проведены при помощи цифровой машины ODRA 1003.

Далее обозначим

$$I_n = \frac{1}{2\sqrt{1-c}} \int_c^1 \frac{x^n}{\sqrt{x-c}}\, dx.$$

Легко вычислить, что

$$I_0 = 1, \quad I_n = \frac{1}{2n+1}(2ncI_{n-1}+1).$$

Теперь решая задачу

$$|x^2 - b_0 x - b_1| = \text{minimum}, \tag{4.7}$$

получаем для b_0 и b_1 формулы

$$b_0 = \begin{vmatrix} I_3 & I_1 \\ I_2 & I_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_2 & I_1 \\ I_1 & I_0 \end{vmatrix}^{-1}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} I_2 & I_3 \\ I_1 & I_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_2 & I_1 \\ I_1 & I_0 \end{vmatrix}^{-1},$$

то есть

$$b_0 = \frac{2}{7}(4c+3), \quad b_1 = -\frac{1}{35}(8c^2+24c+3), \tag{4.8}$$

а также

$$\min|x^2 - b_0 x - b_1|^2 = \begin{vmatrix} I_4 & I_3 & I_2 \\ I_3 & I_2 & I_1 \\ I_2 & I_1 & I_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_2 & I_1 \\ I_1 & I_0 \end{vmatrix}^{-1},$$

то есть

$$\min|x^2 - b_0 x - b_1| = \frac{8(1-c)^2}{105}. \tag{4.9}$$

Для искомых постоянных a_0 и f из (4.8) получаем следующие формулы:

$$a_0 = \frac{1}{7}(8c+13), \quad f = \frac{1}{35}(8c^2+24c+3). \tag{4.10}$$

Для этих значений постоянных решаем уравнение (4.5) с наброшенными условиями и получаем

$$u = c\frac{\operatorname{sh}\sqrt{a_0}t}{\operatorname{sh}\sqrt{a_0}} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{a_0}(1-t)}{\operatorname{sh}\sqrt{a_0}} + \frac{f}{a_0}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a_0}(t-\frac{1}{2})}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{a_0}}{2}}\right). \tag{4.11}$$

Перейдем теперь к оценке погрешности приближения $y \approx u$. Из (4.4) и (4.10) следует, что постоянная a_0 удовлетворяет неравенству $0 < a_0 < \pi^2$. Поэтому имеем

$$W_0(\pi) = \pi^2 + a_0,\ W_1(\pi) = \pi^2,\ V_1(\pi) = a_0,\ W_1(\pi) > V_1(\pi),$$

а также

$$C_1(a_0) = \pi/(\pi^2 + a_0). \tag{4.12}$$

Тогда из (3.12), (4.9) и (4.12) получаем следующее неравенство:

$$\|\dot{\eta}\| \leqslant \frac{8\mu\pi(1-c)^2}{105(\pi^2+a_0)}. \tag{4.13}$$

Так как для функции $\eta = \eta(t)$ справедливо также неравенство

$$|\eta(t)| \leqslant \sqrt{t(1-t)}\,\|\dot{\eta}\| \tag{4.14}$$

в интервале $\langle 0, 1\rangle$ (см. [6], стр. 346), то из (4.13) и (4.14) получаем искомую оценку погрешности аппроксимации в метрике C, а именно

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta(t)| \leqslant \frac{4\mu\pi(1-c)^2}{105(\pi^2+a_0)}. \tag{4.15}$$

Теперь, учитывая вычисленное значение c, получаем следующую числовую оценку:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta(t)| < 2{,}4\times 10^{-3}.$$

Для сравнения, приближенное решение u_1, данное в работе [9] имеет значительно большую оценку погрешности, а именно

$$|y-u_1| \leqslant 0{,}0297 \approx 3\times 10^{-2}.$$

Рассмотрим теперь случай для $n = 2$, $k = 1$. Следовательно, аппроксимируем сейчас решение уравнения (4.1) решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$u^{\mathrm{IV}} - a_1\ddot{u} + a_0 u = f. \tag{4.16}$$

На решение этого уравнения накладываем краевые условия следующего вида: $u(0) = y(0)$, $u(1) = y(1)$, $\dot{u}(0) = \dot{y}(0)$ и $\dot{u}(1) = \dot{y}(1)$. Поступая аналогичным способом, как прежде, находим следующие формулы для постоянных a_0, a_1 и f:

$$a_1 = \frac{15}{11}(7+4c),$$

$$a_0 = \frac{4}{33}(83+95c+20c^2),$$

$$f = \frac{2}{693}(25+450c-93c^2-382c^3).$$

Ограничеваясь оценкой погрешности аппроксимации, находим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta(t)| \leqslant \frac{80\mu\pi(1-c)^3}{693\sqrt{13}(\pi^4+a_1\pi^2+a_0)},$$

а учитивая значение c, находим числовую оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\eta(t)| < 5\times 10^{-5}.$$

Параллельно с уравнением (4.1), мы использовали предложенный метод к уравнению

$$\ddot{y} = 2y+y^2 \tag{4.17}$$

с условиями $\dot{y}(0) = 0$, $y(1) = 1$. Уравнение (4.17) было тоже употреблено для продемонстрирования упрощённого метода Ньютона в книге [4], стр. 319-320. Полученные результаты оценок погрешностей аппроксимации решений уравнений (4.1) и (4.17) составлены в следующей таблице:

уравнение	$\|y-u\| <$		$\|y-u_1\| <$
	$n = 1, k = 1$	$n = 2, k = 1$	
$\ddot{y} = y+y^2$	$2{,}4\times 10^{-3}$	5×10^{-5}	3×10^{-2}
$\ddot{y} = 2y+y^2$	$3{,}7\times 10^{-3}$	$8{,}3\times 10^{-5}$	1×10^{-2}

Во втором и третьем столбках даны соответственно оценки погрешностей аппроксимации для случая $n = k = 1$ и $n = 2$, $k = 1$, а в четвёртом столбике даны оценки погрешностей аппроксимации полученные при применение упрощённого метода Ньютона.

Цитированная литература

[1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Москва 1947.

[2] А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, 2 изд., Москва 1959.

[3] L. Collatz, *Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben*, Archiv der Mathematik 5 (1954), 233-240.

[4] L. Collatz, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin 1964.

[5] L. S. Jacobsen, R. S. Ayre, *Engineering vibrations*, McGraw-Hill Book Co., New York 1958.

[6] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, 3 изд., Москва 1950.

[7] H. Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin 1958.

[8] A. Krzywicki, A. Rybarski, *On a linearization of an equation of an elastic rod*, (*I*), Zastosow. Matem. 6 (1962), 321-332; (*II*), Zastosow. Matem. 7 (1964), 383-390.

[9] N. W. McLachlan, *Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences*, 2nd ed., Oxford 1956.

[10] N. W. McLachlan, *Engineering applications of nonlinear theory*, стр. 23-40 сборника *Proc. of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, N. Y. 1956*, vol. 6, Polytechnic Institute of Brooklyn 1957.

[11] A. Rybarski, *Über eine gewisse Linearisationsmethode der Differentialgleichungen vom Pendeltypus*, Bull. Acad. Pol. Sc. 6 (1958), 175-179; *Pewna metoda linearyzacji równań różniczkowych typu równania wahadla*, Zastosow. Matem. 5 (1960), 247-259.

[12] A. Rybarski, *Linearisation der Differentialgleichungen vom Pendeltypus*, Bull. Acad. Pol. Sc. 10 (1962), 217-220.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ВРОЦЛАВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ВРОЦЛАВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Поступило в редакцию 19. 4. 1969

A. MAZURKIEWICZ i A. RYBARSKI (Wrocław)

O LINEARYZACJI RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH UKŁADÓW KONSERWATYWNYCH

STRESZCZENIE

Tematem pracy jest aproksymacja rozwiązań równania $\ddot{y}+g(y) = f(t)$ rozwiązaniami pomocniczego liniowego równania różniczkowego $Lu = f$ rzędu $2n$, o stałych współczynnikach. Współczynniki równania pomocniczego dobiera się z warunku $\|L(y-u)\| =$ minimum, lub też z warunków zbliżonych, a łatwiejszych do spełnienia. Ocenę błędu aproksymacji otrzymuje się za pomocą Twierdzenia 1, które podaje pewne oszacowania wielkości $\|\eta^{(k)}\|/\|L\eta\|$, przy odpowiednich założeniach o funkcji $\eta = \eta(t)$. Podane numeryczne przykłady mają ilustrować efektywność metody.

A. MAZURKIEWICZ and A. RYBARSKI (Wrocław)

ON THE LINEARIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONSERVATIVE SYSTEMS

SUMMARY

The paper deals with an approximation of the solution of $\ddot{y}+g(y) = f(t)$ by the solution of the surrogate linear differential equation $Lu = f$ of order $2n$ and having constant coefficients. These coefficients are derived so as to satisfy $\|L(y-u)\| =$ minimum, or any other similar but computationally easier condition. The approximation error is estimated with the help of Theorem 1; this theorem provides an estimation for $\|\eta^{(k)}\|/\|L\eta\|$ under appropriate assumptions on $\eta = \eta(t)$. The effectiveness of the method is illustrated by numerical examples.
