

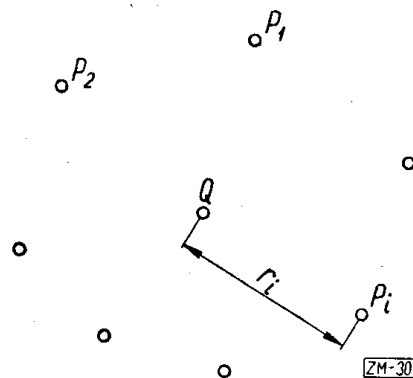
J. ŁUKASZEWICZ i H. STEINHAUS (Wrocław)

O WYZNACZANIU ŚRODKA MIEDZI SIECI TELEFONICZNEJ

Środkiem miedzi sieci telefonicznej nazywają teletechnicy punkt, w którym umieszczona centrala telefoniczna wymaga najmniej miedzianego kabla na połączenia z szafkami zbierającymi przewody od poszczególnych aparatów.

Zagadnienie to omówił ostatnio H. Dietrich [1]. Pracę swą zakończył słowami „Do tej pory nie udało się jednak znaleźć ani matematycznej ani graficznej metody pozwalającej na łatwe wyznaczenie środka naciągu sieci“. Na to wyzwanie chcemy odpowiedzieć w niniejszej pracy.

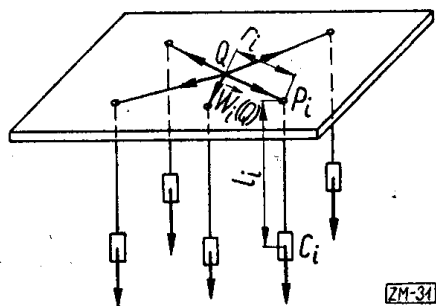
Przy planowaniu sieci telefonicznej nowego lub powiększanego miasta znamy dostatecznie dokładnie rozkład przyszłych abonentów i rozmieszczenie szafek ulicznych wraz z grubością kabla (zależną od ilości żył i ich grubości), którym każdą szafkę trzeba połączyć z centralą. Mając te informacje chcemy wyznaczyć środek miedzi czyli punkt najlepszego usytuowania centrali. Będziemy dalej zakładali, że kable łączące szafki z centralą przebiegają wzdłuż linii prostych, co w praktyce będzie spełnione tylko w przybliżeniu z uwagi na istniejące zabudowania i inne przeszkody. Niech na planie miasta punkty P_1, P_2, \dots, P_n oznaczają położenie szafek (rys. 1) i niech liczby dodatnie c_1, c_2, \dots, c_n będą proporcjonalne do kosztów jednostki długości kabli mających połączyć odpowiednie szafki z centralą. Punkt Q będzie szukanym środkiem miedzi, jeżeli spełniony będzie warunek



Rys. 1

$$(1) \quad \Phi(Q) = \sum_{i=1}^n c_i r_i = \min,$$

gdzie r_i oznacza długość odcinka QP_i , tj. długość kabla łączącego centralę Q z szafką P_i . Funkcja $\Phi(Q)$ jest ciągła i nieujemna oraz dąży do nieskończoności, gdy punkt Q oddalamy do nieskończoności; istnieje więc punkt Q spełniający warunek (1). Punkt ten można wyznaczyć posługując się prostą analogią dynamiczną:



Rys. 2

Jeżeli plan miasta nakleimy na poziomej desce (rys. 2), w punktach P_i przewiercimy otwory i na nitkach przewleczonych przez te otwory zawiesimy pod deską ciężary proporcjonalne do c_i , to węzeł, którym zwiążemy nad deską końce wszystkich

nitek, puszczony swobodnie wskaże nam środek miedzi, tj. punkt Q spełniający warunek (1).

Istotnie, opisany układ jest w równowadze, gdy środek ciężkości ciężarów zawieszonych pod deską osiąga minimum wysokości. Jeżeli długość każdej nitki (liczona od węzła do środka ciężkości zawieszonego na niej ciężaru) jest l , to ciężar c_i zwisa pod deską na długość $l_i = l - r_i$, a wysokość środka ciężkości układu (liczona od górnej powierzchni deski, na osi pionowej skierowanej do góry) jest

$$L = - \frac{\sum c_i l_i}{\sum c_i} = - \frac{\sum c_i (l - r_i)}{\sum c_i} = \frac{\sum c_i r_i}{\sum c_i} - l$$

i osiąga minimum, gdy węzeł znajduje się w punkcie Q spełniającym warunek (1). W szczególności może się zdarzyć, że węzeł zatrzyma się nad jednym z otworów lub zostanie wciągnięty do niego, co odpowiada faktowi, że środek miedzi pokrywa się z położeniem szafki odpowiadającej temu otworowi.

Metodę wyznaczania środka miedzi za pomocą analogii dynamicznej można uprościć używając pionowej deski, do której w punktach P_i (zamiast otworów) wbijamy gwoździe i przez nie przewieszamy nitki. Przez użycie mocnych nitek i dostatecznie dużych obciążeń można zredukować wpływ tarcia i uzyskać dokładność potrzebną dla praktyki.

Opisana analogia dynamiczna pozwala sformułować ważną własność środka miedzi:

Jeżeli środek miedzi Q nie pokrywa się z żadnym z punktów P_i , w których są umieszczone szafki, to centralny układ n sił

$$\vec{W}_i(Q) = \frac{c_i}{r_i} \vec{QP}_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

umieszczonych w punktach P_i , skierowanych jak wektory \vec{QP}_i i o długościach c_i , jest w równowadze. Jeżeli natomiast środek miedzi Q pokrywa się z jednym z punktów P_i , np. z punktem P_n , to wypadkowa układu $n-1$ centralnych wektorów

$$\vec{W}_i(Q) = \frac{c_i}{r_i} \vec{QP}_i = \frac{c_i}{r_i} \vec{P_nP_i} \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

ma długość nie większą niż c_n .

Z powyższej własności wynika, że środek miedzi Q nie zmienia się, jeżeli poszczególne szafki przesuniemy dowolnie wzdłuż półprostych $QP_i \infty$. Dyskwalifikuje to zalecaną przez niektórych teletechników²⁾ metodę umieszczania centrali w łatwym do wyznaczenia środku ciężkości punktów P_i z masami c_i , bo przesuwając punkty P_i wzdłuż półprostych $QP_i \infty$ możemy dowolnie przemieścić środek ciężkości nie zmieniając środka miedzi.

W opisanej analogii dynamicznej wyrażenie

$$\vec{W}(Q) = \sum_{i=1}^n \vec{W}_i(Q) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i} \vec{QP}_i$$

jest siłą działającą na węzeł umieszczony w punkcie Q , a funkcja

$$\Phi(Q) = \sum_{i=1}^n c_i r_i,$$

której minimum szukamy, jest z dokładnością do znaku równa potencjałowi danego pola sił. Obierając dowolny prostokątny układ współrzędnych (x, y) mamy

¹⁾ Litery ze strzałkami oznaczają wektory; oznaczamy je także $[a, b]$, gdzie a jest składową x -ową, b zaś y -ową wektora $[,]$.

²⁾ Por. np. [2].

$$\Phi(Q) = \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i r_i,$$

$$\begin{aligned} \vec{W}(Q) = \vec{W}(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i} (x_i - x), \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i} (y_i - y) \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n c_i \cos \varphi_i, \sum_{i=1}^n c_i \sin \varphi_i \right] = \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

gdzie φ_i jest kątem, jaki tworzy wektor \vec{QP}_i z dodatnim kierunkiem osi x , a (x_i, y_i) są współrzędnymi punktu P_i w obranym układzie.

Dla $Q = P_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) $r_i = 0$ i wyrażenie $\vec{W}(Q)$ nie istnieje, gdyż nie istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe $\partial \Phi / \partial x$, $\partial \Phi / \partial y$; jednakże istnieją wszędzie pochodne jednostronne równe odpowiednim jednostronnym granicom pochodnych i to nam wystarczy do dalszych rozumowań.

Ustalmy teraz współrzędną $y = y_0$ punktu Q i przesuwajmy go równolegle do osi x .

Jeżeli punkty P_i nie leżą wszystkie na prostej $y = y_0$, to pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial \Phi(x, y_0)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^n c_i \cos \varphi_i$$

jest funkcją ściśle rosnącą odciętej x .

Istotnie, dla punktów P_i o rzędnych $y_i > y_0$ kąt φ_i zawiera się w przedziale $0^\circ < \varphi_i < 180^\circ$ i rośnie ze wzrostem odciętej punktu Q , a $\cos \varphi_i$ jest w tym przedziale funkcją malejącą; dla punktów P_i o rzędnych $y_i < y_0$ kąt φ_i zawiera się w przedziale $180^\circ < \varphi_i < 360^\circ$ i maleje ze wzrostem odciętej punktu Q , a $\cos \varphi_i$ jest w tym przedziale funkcją rosnącą; i wreszcie dla punktów P_i o rzędnych $y_i = y_0$ $\cos \varphi_i = 1$ dla $x < x_i$ i $\cos \varphi_i = -1$ dla $x > x_i$.

Monotoniczność pochodnej cząstkowej $\partial \Phi(x, y_0) / \partial x$ oznacza wypukłość przekroju powierzchni $z = \Phi(x, y)$ płaszczyzną $y = y_0$. Ponieważ układ współrzędnych obrany był dowolnie, więc jeżeli punkty P_i nie leżą wszystkie na jednej prostej, to każdy przekrój tej powierzchni płaszczyzną pionową jest krzywą wypukłą, a więc powierzchnia $z = \Phi(x, y)$ jest wypukłą.

Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Jeżeli punkty P_i nie leżą wszystkie na linii prostej, to $z = \Phi(x, y)$ jest powierzchnią wypukłą ku dołowi.

Z twierdzenia tego wynikają ważne wnioski praktyczne.

I. Jeżeli punkty P_i nie leżą wszystkie na jednej prostej, to istnieje dokładnie jeden środek miedzi, tj. dokładnie jeden punkt, w którym funkcja $\Phi(x, y)$ osiąga minimum. W przypadku gdy wszystkie punkty P_i leżą na linii prostej, istnieje dokładnie jeden środek miedzi, lub też środki miedzi wypełniają domknięty odcinek. Np. dla dwóch punktów P_1 i P_2 o równych wagach $c_1 = c_2$ środkiem miedzi jest każdy punkt domkniętego odcinka P_1P_2 . Pomijamy tu szczegółową dyskusję tego przypadku nie mającego znaczenia praktycznego.

II. Linie ekwipotencjalne o równaniach

$$\Phi(x, y) = \text{const}$$

są wypukłe.

Wynika stąd nowa metoda wyznaczania środka miedzi. Jeżeli w punkcie $Q \neq P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) narysujemy prostą $l(Q)$ przechodzącą przez punkt Q i prostopadłą do siły $\vec{W}(Q)$, to środek miedzi będzie leżał w półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą $l(Q)$ i wektor $\vec{W}(Q)$. Istotnie, prosta $l(Q)$ jako prostopadła do siły $\vec{W}(Q)$ jest styczna do linii ekwipotencjalnej. Ponieważ linia ekwipotencjalna jest wypukła, więc całe jej wnętrze wraz z minimum funkcji $\Phi(x, y)$ znajduje się po tej stronie stycznej $l(Q)$, którą wskazuje siła $\vec{W}(Q)$. Jeżeli $Q = P_k$, to powyższa własność pozostanie prawdziwa, gdy w wyrażeniu $\vec{W}(P_k)$ pominiemy pozbawiony wtedy sensu wyraz $\vec{W}_k(P_k)$, z tym jednak zastrzeżeniem, że środek miedzi pokrywa się z punktem P_k , jeżeli $|\vec{W}(P_k)| \leq c_k$.

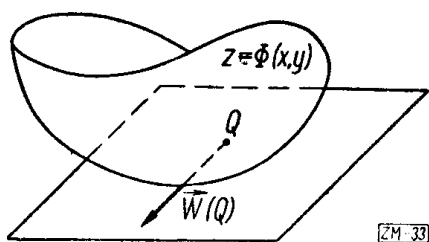
Badając w opisany sposób wypadkową $\vec{W}(Q)$ możemy coraz bardziej ograniczać obszar, w którym środek miedzi musi się znajdować. Jeżeli przez kilkakrotne badanie wypadkowej uzyskaliśmy już wielokąt, wewnątrz którego musi się znajdować środek miedzi, a nie mamy żadnych innych informacji o jego położeniu, najlepiej jest obrać za następny punkt, w którym zbadamy wypadkową, środek ciężkości ograniczonego obszaru. Z teorii figur wypukłych

wiadomo, że każda prosta przechodząca przez środek ciężkości figury wypukłej w przybliżeniu połowi tę figurę, to jest dzieli ją na części w stosunku nie gorszym niż 4:5³⁾. Takie postępowanie gwarantuje nam, że za każdym krokiem zmniejszymy pole obszaru ograniczającego środek miedzi co najmniej o 4/9 jego wielkości.

Na rysunku 3 pokazano przykład zastosowania tej metody. Na płaszczyźnie rozmieszczono 38 szafek P_i i przyporządkowano im wagi c_i napisane obok każdego punktu. Składowe wypadkowych $\vec{W}(Q)$ obliczano korzystając z wzoru

$$\vec{W}(Q) = \left[\sum_{i=1}^{38} \frac{c_i}{r_i} (x_i - x), \sum_{i=1}^{38} \frac{c_i}{r_i} (y_i - y) \right],$$

przy czym bezpośrednio z rysunku za pomocą skali odwrotności odeczytano wielkości $1/r_i$. Na boku rysunku 3 narysowano użytą do tego skalę. Przez zbadanie wypadkowej $\vec{W}(Q)$ w punktach $Q_1(0,0)$, $Q_2(-5,10)$, $Q_3(3,7)$ uzyskano trzy proste l_1, l_2, l_3 tworzące trójkąt ABC , wewnątrz którego znajduje się środek miedzi. Następnie



Rys. 4

zbadano środek ciężkości tego trójkąta punkt $Q_4(-4,4)$, uzyskując czworobok $ADEC$ i środek ciężkości tego czworoboku punkt $Q_5(-1,6)$ uzyskując nowy czworobok $CFGE$.

Środek miedzi znajduje się więc wewnątrz czworoboku $CFGE$.

Korzystając z faktu, że wypukła ku dołowi powierzchnia $z = \Phi(x, y)$ jest ograniczona od dołu płaszczyzną styczną (rys. 4) możemy oszacować wartość Φ_{\min} .

Np. w punkcie $Q_5(-1,6)$ mamy

$$|\vec{W}(Q_5)| = 4,9, \quad \Phi(Q_5) = 4940;$$

ponieważ zaś płaszczyzna styczna w punkcie Q_5 ma największy spadek w kierunku siły $\vec{W}(Q_5)$ i szerokość czworoboku $CFGE$ w kierunku $\vec{W}(Q_5)$ jest $s=6,5$, więc

³⁾ Patrz [3].

$$\Phi(Q_5) - s|\vec{W}(Q_5)| < \Phi_{\min} < \Phi(Q_5)$$

i po podstawieniu wartości liczbowych

$$4908 < \Phi_{\min} < 4940.$$

W ten sposób możemy oszacować błąd popełniony przez przyjęcie dowolnego punktu Q zamiast dokładnego środka miedzi. Jest to ważne z praktycznego punktu widzenia, gdyż przy wyborze miejsca na budowę centrali musimy się także kierować innymi względami technicznymi. W otoczeniu minimum funkcja $\Phi(x, y)$ zmienia się nieznacznie, więc ze stosunkowo nieznaczным zwiększeniem kosztów kabli możemy dowolnie ustawić centralę w pewnym otoczeniu dokładnego środka miedzi. W naszym przykładzie punkt Q_5 realizuje minimum długości sieci z błędem względnym nie przekraczającym 0,7‰.

Wróćmy jeszcze do warunku (1). Poza punktami P_i funkcja $\Phi(x, y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe, jeżeli więc środek miedzi nie pokrywa się z żadną szafką P_i , to jego współrzędne (x, y) spełniają układ równań

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i} (x_i - x) = 0,$$

(2)

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i} (y_i - y) = 0.$$

Warunek spełnienia układu równań (2) jest oczywiście równoważny z warunkiem znikania siły $\vec{W}(Q)$.

Równań (2) nie umiemy rozwiązać dokładnie, można jednak zastosować do nich następujące postępowanie iteracyjne:

Obieramy na oko punkt $Q^{(0)}$ i do układu (2) podstawiamy zamiast nieznanych odległości r_i odległości $r_i^{(0)} = |\vec{Q}^{(0)} P_i|$. W ten sposób pierwsze równanie staje się równaniem liniowym o jednej niewiadomej x i analogicznie, drugie równanie staje się równaniem liniowym o jednej niewiadomej y . Rozwiązania $x^{(1)}, y^{(1)}$ otrzymanych w ten sposób równań przyjmujemy za współrzędne punktu $Q^{(1)}$ — następnego przybliżenia środka miedzi Q . Analogicznie przechodzimy do następnych przybliżeń. Łatwo jest sprawdzić, że jeśli

znamy współrzędne k -tego przybliżenia $x^{(k)}, y^{(k)}$, to następne $(k+1)$ -sze przybliżenie $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}$ otrzymujemy z wzorów

$$(3) \quad x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i x_i}{r_i^{(k)}}}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i^{(k)}}}, \quad y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i y_i}{r_i^{(k)}}}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i^{(k)}}}.$$

Nie mamy dowodu na to, że uzyskany za pomocą wzorów (3) ciąg przybliżeń $Q^{(k)}$ jest zbieżny do środka miedzi Q . Stosując jednak opisaną iterację w kilku różnych przykładach zawsze uzyskiwaliśmy zbieżność (choć niekiedy bardzo wolną) i to nawet w tych przypadkach, gdy środek miedzi Q znajdował się w jednym z punktów P_i , a więc gdy układ równań (2) nie miał właściwie sensu. W przypadku przedstawionym na rys. 3 przyjmując punkt początkowy $Q^{(0)}(0,0)$ otrzymujemy jako dalsze przybliżenie punkty $Q^{(1)}(-0,7;3,2)$ i $Q^{(2)}(-0,7;4,5)$, przy czym mamy

$$\Phi(Q^{(0)})=5110, \quad \Phi(Q^{(1)})=4970, \quad \Phi(Q^{(2)})=4950.$$

Łatwo jest sprawdzić, że stosując wzory (3) przechodzimy zawsze od przybliżenia $Q^{(k)}$ do $Q^{(k+1)}$ idąc w kierunku siły $\vec{W}(Q^{(k)})$, a więc szukając minimum powierzchni posuwamy się w kierunku największego spadku. Istotnie, z wzorów (3) otrzymujemy

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{y^{(k+1)} - y^{(k)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i^{(k)}} (x_i - x^{(k)})}{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{r_i^{(k)}} (y_i - y^{(k)})} = \frac{\vec{W}_x(Q^{(k)})}{\vec{W}_y(Q^{(k)})}.$$

Prace cytowane

[1] H. Dietrich, *Zagadnienie najwłaściwszego usytuowania miejskiej centrali telefonicznej*, Przegląd Telekomunikacyjny 19 (25), zesz. 12, (1952), str. 371 - 377.

[2] M. Langer, *Studien über Aufgaben der Fernsprechtechnik*, 1936 cyt. według [1].

[3] И. Яглом и В. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, Москва-Ленинград 1951.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 16. 3. 1953 r.)

И. ЛУКАШЕВИЧ и Г. ШТЕЙНГАУЗ (Вроцлав)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ „ЦЕНТРА МЕДИ“ ТЕЛЕФОННОЙ СЕТИ

РЕЗЮМЕ

Авторы решают проблему определения оптимального местоположения телефонной станции, т. е. определения такой точки Q , для которой сумма расстояний r_i от данных точек P_i (в которых находятся телефонные уличные будки) умноженных на положительные числа c_i (пропорциональные стоимости единицы длины кабеля) достигает минимума. Искомое минимум функций

$$\Phi(Q) = \sum c_i r_i$$

можно определить при помощи динамической аналогии (черт. 2). Функция $-\Phi(Q)$ является потенциалом представленной динамической системы. Если точки P_i не лежат на одной прямой, то поверхность $z = \Phi(Q)$ выпукла снизу и существует точно одно минимум функции $\Phi(Q)$. Из выпуклости потенциала следует новый метод приближенного определения минимума функции ограничиванием многоугольниками области, в которой искомое минимум должно находиться, и также метод оценки минимального значения функции. Третий метод определения минимума функции $\Phi(Q)$ заключается в итерации при помощи формул (3).

J. ŁUKASZEWICZ and H. STEINHAUS (Wrocław)

ON DETERMINING THE "CENTRE OF COPPER"
OF A TELEPHONE NETWORK

SUMMARY

The authors solve the problem of determining the optimal location of a telephone exchange, i. e. determining a point Q such that the sum of the distances r_i between the point Q and given points P_i (in which the distribution cabinets are placed), multiplied by positive numbers c_i (proportional to the cost of a unit of cable length), attains the minimum. The sought minimum of the function

$$\Phi(Q) = \sum c_i r_i$$

can be determined by means of dynamical analogy (fig. 2). The function $-\Phi(Q)$ is the potential of the dynamical system presented. If the points P_i do not lie on a straight line, then the surface $z = \Phi(Q)$ is convex downwards and there exists exactly one minimum of the function $\Phi(Q)$. From the convexity of the potential results a new method of determining approximately the minimum of the function, namely by bounding with polygons the domain in which the sought minimum is to be found, as well as a method of estimating the minimum value of the function. Iteration on the basis of formulas (3) constitutes a third method of determining the minimum of the function $\Phi(Q)$.