S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

# O ŁAŃCUSZKACH GWIEZDNYCH

**1.** Podaję tu próbę rozwiązania problematu postawionego przez W. Zonna i dotyczącego łańcuszków w obrazie gwiazd na sferze niebieskiej. Mianowicie wielu astronomów odnosi wrażenie, że w rzucie na sferę niebieską gwiazdy słabsze wykazują tendencję do grupowania się w łańcuszki. Czy taka tendencja w obrazie gwiazd istotnie występuje, czy polega na złudzeniu?

**2.** Dla znalezienia odpowiedzi na to pytanie opracowałem trzy mapki. Mapka 0 zawierała 500 punktów narysowanych na kwadratowym arkuszu papieru milimetrowego. Za współrzędne punktów brałem kolejne trójki cyfr z tablic liczb przypadkowych Fishera i Yatesa[1]). Tę sztuczną mapkę przyjąłem za porównawczą. Dwie dalsze mapki, mianowicie 1 i 2, nadesłał W. Zonn. Mapka 1 zawierała 380 gwiazd o jasności większej niż $14^m,0$ zawartych w obszarze $1^0 \times 1^0$, którego środek ma współrzędne astronomiczne $a=23^h23^m$, $\delta=+60^00'$. Mapka 2 zawierała 983 gwiazdy o wielkościach do $10^m$ leżące w obszarze $27^030' \leqslant \delta < 34^0$, $19^h44^m < a \leqslant 20^h4^m$.

**3.** Dla zbadania, czy gwiazdy wykazują tendencję do układania się w łańcuszki, postąpiłem w sposób następujący: Na wszystkich trzech mapkach narysowałem *dendryty* I, *dendryty* II i *dendryty* F, obejmujące wszystkie gwiazdy. Dendryty I są to konfiguracje powstałe przez połączenie odcinkiem każdej gwiazdy z najbliższą. Dendryty II otrzymuje się łącząc każdy dendryt I z najbliższym dendrytem I; przez odległość dwu dendrytów rozumie się tu długość najkrótszego z odcinków, których jeden koniec jest wierzchołkiem pierwszego dendrytu, a drugi — drugiego. Łącząc dalej w opi-

[1]) R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 3rd edition, London 1948.

sany sposób dendryty II i dalsze, otrzymuje się w końcu dendryt F obejmujący wszystkie gwiazdy[2]). Wierzchołki tak powstałych dendrytów sklasyfikowałem według następującej zasady: wierzchołek dendrytu jest *węzłem rzędu k*, jeśli schodzi się w nim $k$ odcinków. Otóż postanowiłem *porównać frekwencje węzłów* różnych rzędów *mapek* 1 i 2 z *frekwencjami węzłów mapki* 0. Gdyby bowiem okazało się, że mapki gwiazd mają w porównaniu z mapką 0 dużo więcej węzłów rzędu 2, a mniej węzłów innych rzędów, znaczyłoby to, że gwiazdy częściej układają się w łańcuszki niż punkty przypadkowe. *Łańcuszki* rozumie się tu jako nie rozgałęziające się łamane, które zresztą mogą być częściami rozgałęzionych dendrytów o wielu wierzchołkach. Ponieważ wpływ gwiazd położonych na brzegu mapki mógłby zniekształcić obraz, rysowałem na mapce 2 dendryty na dwu jej połowach z osobna, aby na poszczególnych częściach mieć liczebności gwiazd zbliżone do liczebności punktów mapki 0 (porównaj 52 tablicę I).

Tablica I

Liczebności węzłów

| Rząd węzłów | Dendryty I | | | Dendryty II | | | Dendryty F | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mapki | | | Mapki | | | Mapki | | |
| | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 327 | 267 | 669 | 144 | 132 | 332 | 105 | 83 | 233 |
| 2 | 157 | 104 | 263 | 288 | 196 | 496 | 292 | 218 | 532 |
| 3 | 16 | 9 | 49 | 67 | 50 | 150 | 101 | 77 | 209 |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 5 | 2 | 2 | 9 |
| Razem | 500 | 380 | 983 | 500 | 380 | 983 | 500 | 380 | 983 |

W celu porównania liczebności węzłów mapek 1 i 2 z odpowiadającymi liczebnościami węzłów mapki 0 zredukowałem liczbę węzłów mapek 1 i 2 do 500, mnożąc liczebności węzłów tych mapek odpowiednio przez 500/380 i 500/983. Uzyskane liczby są zawarte w tablicy II.

[2]) Ogólna Grupa Zastosowań Państwowego Instytutu Matematycznego, *Taksonomia Wrocławska*, Przegląd Antropologiczny 17 (1951), str. 193-211.

Tablica II

Liczebności węzłów mapek 1 i 2 zredukowane do 500

| Rząd węzłów | Dendryty I | | | Dendryty II | | | Dendryty F | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mapki | | | Mapki | | | Mapki | | |
| | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 327 | 351,3 | 340,3 | 144 | 173,7 | 168,9 | 105 | 109,2 | 118,5 |
| 2 | 157 | 136,9 | 133,7 | 288 | 257,8 | 252,3 | 292 | 286,8 | 270,6 |
| 3 | 16 | 11,8 | 25,0 | 67 | 65,8 | 76,3 | 101 | 101,3 | 106,3 |
| 4 | 0 | 0 | 1,0 | 1 | 2,7 | 2,5 | 2 | 2,7 | 4,6 |
| Razem | 500 | 500,0 | 500,0 | 500 | 500,0 | 500,0 | 500 | 500,0 | 500,0 |

Widzimy tu, że we wszystkich trzech przypadkach, to jest dla dendrytów I, II i F, tak na mapce 1 jak na mapce 2, otrzymaliśmy w porównaniu z mapką 0 mniej węzłów rzędu 2. We wszystkich tych trzech przypadkach stosunkowo najmniej węzłów rzędu 2 ma mapka 2. Z tego porównania wynika dość paradoksalny wniosek, że raczej punkty przypadkowe układają się w łańcuszki niż gwiazdy, u których tego oczekiwaliśmy. Wydaje się jednak, że różnice te nie są istotne.

Istotności otrzymanych różnic nie możemy jednak ocenić za pomocą znanego w statystyce kryterium $\chi^2$, ponieważ węzły dendrytów nie spełniają koniecznych założeń o niezależności. Liczby $n_1, n_2, n_3$ i $n_4$ wierzchołków rzędów 1,2,3 i 4 są bowiem odpowiednio związane z ogólną liczbą wierzchołków $n$ i liczbą dendrytów $N$ przez równanie

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 2(n - N).$$

Bierze się ono stąd, że lewa strona wyraża podwojoną liczbę odcinków $N$ dendrytów rozpiętych na $n$ punktach.

**4.** Zbadałem także przypadkowość w rozmieszczeniu gwiazd na mapce 1 i 2 metodami znanymi. Jedna z nich polega na tym, że na badany obszar nieba nakłada się siatkę o oczkach np. prostokątnych, o równych polach, a następnie porównuje się rozkład liczby gwiazd w oczkach z rozkładem Poissona. Istotność odchylenia zaobserwowanego rozkładu od rozkładu Poissona ocenia się za pomocą kryterium $\chi^2$ [3]). Otóż zastosowałem tę metodę do moich mapek.

[3]) E. von Pahlen, *Lehrbuch der Stellarstatistik*. Leipzig 1937; w szczególności str. 127-142.

Na każdą z nich nałożyłem trzy siatki o oczkach prostokątnych. Grubsze z tych siatek otrzymałem z drobniejszych przez łączenie par oczek sąsiednich. Otrzymane wyniki są przedstawione w tablicy III. Podaje ona zaobserwowane frekwencje $f$ i teoretyczne frekwencje $f'$ oczek siatki zawierających $k$ gwiazd, oraz wartości testu $\chi^2 = (f-f')^2/f'$. Ponadto podałem średnie liczby $\bar{k}$ gwiazd w oczku siatki i prawdopodobieństwa $P_t(\chi^2 > \chi_0^2)$ tego, że przy $t$ stopniach swobody otrzyma się wartość $\chi^2$ większą od wartości $\chi_0^2$, otrzymanej dla badanego rozkładu. Liczbą stopni swobody jest tu liczba klas pomniejszona o dwa, na jakie dzieli się oczka siatki (a mianowicie na zawierające 0,1,... itd. oczek). Różnicę rozkładów uważa się za *istotną*, gdy $P_t(\chi^2 > \chi_0^2) < 0{,}05$.

Jak widać z tablicy wszystkie $P_t$ są większe od 0,05, a nawet, z wyjątkiem $P_2$ dla mapki 1 przy siatce 1, większe od 0,33.

Wyniki te świadczą, że obie mapki przy wszystkich trzech siatkach wykazują bardzo dobrą zgodność rozkładu liczby gwiazd w oczkach siatek z rozkładem Poissona. Jedynie na mapce 1 przy siatce 1, tam gdzie $P_2 = 0{,}12$, jest pewien niedobór oczek z jedną gwiazdą na korzyść oczek pustych oraz zawierających 2 lub więcej gwiazd, co wskazuje na tendencję do skupienia się gwiazd w grupki.

Tablica III

Porównanie rozkładu liczby gwiazd w oczku siatki z rozkładem Poissona

Mapka 1

| $k$ | Siatka 1 | | | | Siatka 2 | | | | Siatka 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ |
| 0 | 164 | 155,3 | 8,7 | 0,487 | 30 | 29,6 | 0,4 | 0,005 | 11 | 10,6 | 0,4 | 0,002 |
| 1 | 129 | 148,3 | −19,3 | 2,510 | 60 | 56,5 | 3,5 | 0,217 | | | | |
| 2 | 77 | 70,8 | 6,2 | 0,543 | 48 | 53,9 | −5,9 | 0,646 | 16 | 16,0 | 0,0 | 0,000 |
| 3 | 30 | 25,6 | 4,4 | 0,757 | 32 | 34,4 | −2,4 | 0,167 | 17 | 20,4 | −3,4 | 0,566 |
| 4 | | | | | 30 | 25,6 | 4,4 | 0,756 | 26 | 19,5 | 6,5 | 2,163 |
| 5 | | | | | | | | | 15 | 14,9 | 0,1 | 0,001 |
| 6 | | | | | | | | | 15 | 18,6 | −3,6 | 0,698 |
| Razem | 400 | 400,0 | 0,0 | 4,297 | 200 | 200,0 | 0,0 | 1,791 | 100 | 100,0 | 0,0 | 3,430 |
| | $\bar{k} = 0{,}95$; | | | | $\bar{k} = 1{,}90$; | | | | $\bar{k} = 3{,}80$; | | | |
| | $P_2(\chi^2 > 4{,}3) = 0{,}12$ | | | | $P_3(\chi^2 > 1{,}8) = 0{,}62$ | | | | $P_4(\chi^2 > 3{,}4) = 0{,}50$ | | | |

Mapka 2

| $k$ | Siatka 1 | | | | Siatka 2 | | | | Siatka 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ | $f$ | $f'$ | $f-f'$ | $\chi^2$ |
| 0 | 402 | 404,0 | −2,0 | 0,010 | 84 | 78,5 | 5,5 | 0,386 | 35 | 28,9 | 6,1 | 1,285 |
| 1 | 385 | 382,0 | 3,0 | 0,024 | 138 | 148,6 | −10,6 | 0,758 | | | | |
| 2 | 181 | 180,5 | 0,5 | 0,001 | 135 | 140,5 | −5,5 | 0,215 | 39 | 42,4 | −3,4 | 0,272 |
| 3 | 55 | 56,9 | −1,9 | 0,064 | 104 | 88,5 | 15,5 | 2,710 | 46 | 53,4 | −7,4 | 1,025 |
| 4 | 17 | 16,6 | 0,4 | 0,097 | 38 | 41,8 | −3,8 | 0,346 | 46 | 50,5 | −4,5 | 0,402 |
| 5 | | | | | 21 | 22,1 | −1,1 | 0,055 | 47 | 38,2 | 8,8 | 2,030 |
| 6 | | | | | | | | | 23 | 24,0 | −1,0 | 0,042 |
| 7 | | | | | | | | | 13 | 13,0 | 0,0 | 0,000 |
| 8 | | | | | | | | | 11 | 9,6 | 1,4 | 0,204 |
| Razem | 1040 | 1040,0 | 0,0 | 0,196 | 520 | 520,0 | 0,0 | 4,470 | 260 | 260,0 | 0,0 | 5,260 |
| | $\bar{k}=0,945$; $P_3(\chi^2>0,2)=0,96$ | | | | $\bar{k}=1,89$; $P_4(\chi^2>4,5)=0,34$ | | | | $\bar{k}=3,78$ $P_6(\chi^2>5,3)=0,50$ | | | |

**5.** Wreszcie dla jeszcze kilku siatek z prostokątnymi oczkami zbadałem rozmieszczenie gwiazd mapek 1 i 2 za pomocą *Steinhausa wskaźnika zgęszczenia* [4]). Robi się to w sposób następujący. Rozpatrując rozmieszczenia gwiazd za pomocą siatek z oczkami o równych polach bada się rozkład liczby gwiazd w oczku siatki. Uważa się, że gwiazdy rozmieszczone są *przypadkowo*, jeśli liczba gwiazd w oczku ma rozkład mało różniący się od rozkładu Poissona. Wiadomo zaś, że zmienna losowa o rozkładzie Poissona ma wariancję równą wartości oczekiwanej. Otóż H. Steinhaus bada rozmieszczenie punktów za pomocą stosunku wariancji $\sigma^2$ liczby punktów w oczku do średniej liczby $\bar{k}$ punktów w oczku. Liczbę $\bar{k}$ obliczamy tu z wzoru

$$\bar{k}=\frac{1}{N}\sum k_i,$$

a wariancję z wzoru

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum(k_i-\bar{k})^2,$$

[4]) H. Steinhaus, *O wskaźniku zgęszczenia i rozproszenia*, Przegląd Geograficzny 21 (1947).

gdzie $k_i$ są liczbami punktów w poszczególnych oczkach, a $N$ jest liczbą wszystkich oczek. Wymieniony stosunek wariancji do średniej nazywa Steinhaus *wskaźnikiem zgęszczenia.* Jeśli punkty w pewnym obszarze rozmieszczone są jednostajnie, to różnice ilości punktów w różnych oczkach są stosunkowo małe. Zjawisko to nazywa Steinhaus *odpychaniem się* punktów. Charakteryzuje się ono tym, że wskaźnik zgęszczenia jest mały. Gdy w pewnym obszarze występują skupienia punktów i miejsca prawie puste, różnice liczby punktów w różnych oczkach będą znaczne, a wskaźnik zgęszczenia duży. Gdy jest on większy od jedności, Steinhaus powiada, że wśród rozważanych punktów występuje zjawisko *przyciągania.* Przy danym układzie punktów wykrycie przyciągania lub odpychania zależy od wielkości oczek użytej siatki. Jeśli na przykład występują skupienia punktów pewnej wielkości, możemy je wykryć wtedy, gdy użyjemy siatki o oczkach współmiernych z tymi skupieniami. Steinhaus proponuje charakteryzowanie rozmieszczenia punktów za pomocą krzywej, przedstawiającej wskaźnik zgęszczenia jako funkcję wielkości oczka użytej siatki lub, co na jedno wychodzi, jako funkcję średniej liczby punktów w oczku. Metoda ta jest mniej dokładna niż poprzednia ale prostsza w zastosowaniu i za jej pomocą łatwo zbadać większą liczbę siatek.

Tablica IV

Zależność wzkaźnika zgęszczenia od średniej liczby gwiazd w oczku siatki

| Mapka 1 | | | | Mapka 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | $s$ | $w$ | $Z$ | $L$ | $s$ | $w$ | $Z$ |
| 4 | 95 | 488 | 1,79 | 6 | 123,7 | 63,9 | 0,52 |
| 9 | 42,2 | 81,0 | 1,92 | 15 | 62 | 46,1 | 0,74 |
| 12 | 31,7 | 46,6 | 1,47 | 24 | 41,0 | 28,2 | 0,69 |
| 16 | 23,8 | 33,3 | 1,40 | 30 | 31 | 28,9 | 0,93 |
| 25 | 15,2 | 17,1 | 1,13 | 54 | 16,4 | 16,6 | 1,01 |
| 35 | 10,9 | 12,1 | 1,12 | 65 | 15,1 | 17,8 | 1,18 |
| 50 | 7,60 | 8,32 | 1,10 | 96 | 10,2 | 10,1 | 0,99 |
| 72 | 5,28 | 4,81 | 0,91 | 130 | 7,56 | 8,20 | 1,08 |
| 81 | 4,69 | 5,99 | 1,28 | 216 | 4,09 | 4,29 | 1,05 |
| 100 | 3,80 | 3,86 | 1,02 | 260 | 3,78 | 3,83 | 1,01 |
| 144 | 2,64 | 3,05 | 1,16 | 384 | 2,56 | 2,27 | 0,89 |
| 200 | 1,90 | 1,88 | 0,99 | 520 | 1,89 | 1,84 | 0,97 |
| 288 | 1,32 | 1,29 | 0,98 | 864 | 1,02 | 1,10 | 1,08 |
| 400 | 0,95 | 0,988 | 1,04 | 1040 | 0,945 | 0,936 | 0,99 |
| 576 | 0,660 | 0,693 | 1,05 | 1536 | 0,639 | 0,612 | 0,96 |

Przedstawiam tu zastosowanie jej do mapek 1 i 2 (patrz tablicę IV, gdzie $L$ oznacza liczbę oczek siatki, $s$ — średnią liczbę gwiazd w oczku, $w$ — wariancję liczby gwiazd w oczku, a $Z$ — wskaźnik zgęszczenia).

Jak widać z tablicy IV, wszystkie otrzymane wartości wskaźników zgęszczenia różnią się od jedności nieistotnie. Można jednak zauważyć, że na mapce 1 występuje w pewnym stopniu zjawisko przyciągania przy dużych kratkach, to znaczy, że można by tam wyróżnić pewne obszary z większym i pewne obszary z mniejszym zgęszczeniem gwiazd. Na mapce 2 przy małych i średnich oczkach mamy wskaźniki zgęszczenia prawie równe jedności, przy dużych oczkach natomiast występuje w pewnym stopniu odpychanie. Znaczy to, że liczby gwiazd w dużych oczkach różnią się między sobą mniej, niżby można oczekiwać przy rozkładzie przypadkowym.

**6.** Badając łańcuszkowatość gwiazd otrzymaliśmy wynik negatywny. Optyczne wrażenie okazało się mylne przy takim sprecyzowaniu jego treści, jak tu przyjęto. Podobnie negatywny wynik otrzymaliśmy w Ogólnej Grupie Zastosowań Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk przy porównywaniu dendrytów I gwiazd do 4-tej wielkości z gwiazdozbiorami tradycyjnymi. W obu przypadkach gwiazdy różnej wielkości traktowano jednakowo, jako równouprawnione punkty. Wydaje się, że przy subiektywnym dopatrywaniu się konstelacyj jasność gwiazd odgrywa taką poważną rolę, iż przy podobnych badaniach należy ją odpowiednio uwzględniać.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

*(Praca wpłynęła dnia 30. 9. 1952 r.)*

С. ЗУБЖИЦКИЙ (Вроцлав)

## *О ЗВЕЗДОЧНЫХ ЦЕПОЧКАХ*

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор пытается ответить на интересный для астрономов вопрос: есть ли у звезд, особенно у менее ясных, тенденция группироватся в цепочки? Для охарактеризования размещения звезд чертит автор на исследуемой карте дендриты I-го и II-го порядка и дендриты F охватываюшие все звезды. Дендриты I-го порядка это конфигурации, которые получаем, соединяя отрезком каждую звезду с ее ближайшей.

Дендриты II-го порядка получаем, соединяя каждый дендрит I-го порядка с ему ближайшим дендритом того же порядка. Под расстоя-

нием двух дендритов разумеется здесь наименьшее расстояние между звездами первого и второго дендрита. Соединяя, точно таким образом, дендриты II-го и высших порядков, получаем окончательно дендрит F, содержащий все звезды. Вершины так полученных дендвитов, в которых сходятся $k$ отрезков, называет автор вершенами $k$-го порядка. Характеристикой размещения звезд служат автору частоты вершин разных порядков. Тенденцию звезд группироватся в цепочки определяет автор как избыток вершин II-го порядка и недобор вершин других порядков по сравнению с частотами таких же вершин у дендритов, соединяющих случайные точки.

Таким образом автор исследовал две карты звезд: карту 1, содержащую 380 звезд величины меншей чем $14^m,0$ и карту 2, содержащую 983 звезды, величины которых не больше чем $10^m$. Эти карты представляют именно те окрестности неба, где некоторые астрономы усматривают звездочные цепочки. Полученные на этих картах частоты вершин разных порядков сравнил автор с соответствующими частотами вершин сравнительной карты 0, содержащей 500 случайных точек. Эти точки были получены таким образом, что в качестве их координат были взяты числа, составленные из последовательных троек цифр из таблицы случайных чисел.

Оказалось, что и на карте 1 и на карте 2 вершин 2-го порядка было слишком мало по отношению к карте 0. Следует отсюда парадоксальное заключение, что скорее случайные точки группируются в цепочки, чем звезды.

Но кажется, полученные разницы не существенны.

Размещение звезд на картах 1 и 2 автор исследовал также, сравнивая распределение числа звезд в петлях сетки составленной из прямоугольников равной площади с распределением Пуассона. Этим методом исследовано по три сетки для каждой карты. Во всех случаях получено хорошее согласие с распределением Пуассона. Кроме того исследовано по 15 сеток для обеих карт простейшим методом, именно при помощи Штейнгауза коэффициента сгущения равного отношению дисперсии к среднему числу звезд в петли сетки. Этот коэффициент есть близок к единице, если распределение числа звезд в петли сетки близко к распределению Пуассона. Здесь тоже не получено существенных отклонений.

---

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

## *ON STAR CHAINS*

### SUMMARY

The author tries to answer a question of interest to astronomers, namely whether stars, especially of greater magnitude, show a tendency to arrange themselves in chains. To characterize the dislocation of stars the author draws on the investigated area dendrites of order I, dendrites of order II and dendrites F comprising all stars. Dendrites of order I are the configurations obtained by joining each star with the nearest one. Dendrites of order II are obtained by joining with a segment each dendrite of order I with the nearest

dendrite of the same order. By the distance of two dendrites we mean here the shortest segment whose one end belongs to the first dendrite, and the other end to the second dendrite. Joining in the same way the dendrites of the 2nd and higher orders we finally obtain the dendrite F spanned on all the stars of the investigated area. The vertices of the dendrites thus obtained, in which $k$ segments meet, the author calls vertices of order $k$. The author characterizes the dislocation of stars by the frequencies of vertices of different orders. The tendency of stars to arrange themselves in chains the author defines as an excess of vertices of order II and a deficiency of vertices of the other orders as compared with the corresponding frequencies of vertices for dendrites spanned on random points.

In this way the author has investigated two charts of stars: Chart 1 containing 380 stars of magnitudes greater than $14^m.0$, and Chart 2 containing 983 stars of magnitudes not greater than $10^m$. Those are the areas of the sky where some astronomers notice many star chains. The frequencies of vertices of different orders obtained on those charts have been compared with the corresponding frequencies of a comparative Chart 0 containing 500 random points. The author has obtained those points by taking as their coordinates the numbers formed by successive threes of digits from the table of random numbers.

It has been ascertained that both on Chart 1 and on Chart 2 the number of vertices of order II is too small in comparison with Chart 0. This brings us to the paradoxical conclusion that, if any, it is the random points that arrange themselves in chains.

It seems, however, that the differences obtained are inessential.

The author has investigated also the dislocation of stars on charts 1 and 2 by comparing the distribution of the numbers of stars in the meshes of a net composed of rectangles of equal areas with the Poisson distribution. Three nets for each chart have been investigated in this way. In all cases good agreement with the Poisson distribution has been obtained. Moreover, 15 nets for each chart have been investigated by a less rigorous method, namely by means of Steinhaus's coefficient of condensation, equal to the ratio of the variation of the number of stars in a mesh to the mean number of stars in a mesh. This coefficient, for a Poissonian distribution of the number of stars in the meshes, is near to unity. Here again no significant differences have been obtained.