S. GŁADYSZ i A. RYBARSKI (Wrocław)

O MODELOWANIU PRZESTRZENNYCH PÓL PRZEZ PŁASKIE POLA PRĄDU

1. O modelowaniu przez analogię. W technice trzeba nieraz wyznaczyć rozkład przestrzenny pewnych pól. Tak jest na przykład w różnych zagadnieniach teorii sprężystości, hydromechaniki, elektrostatyki i innych. Jeśli metody analityczne nastręczają znaczne trudności, stosuje się czasem metodę modelowania przez analogię. Polega ona na tym, że interesujące nas pole zastępujemy przez inne, które jest opisane analogicznymi równaniami, a to analogiczne pole wyznaczamy doświadczalnie z bezpośrednich pomiarów.

W tym artykule zajmiemy się pewnym szczególnym przypadkiem modelowania pola elektrostatycznego. Polega ono na tym, że w słabo przewodzącym oleju zanurza się geometrycznie podobny model układu a elektrody modelu zasila się prądem tak, żeby natężenia prądów przepływających przez poszczególne modele elektrod były proporcjonalne do ładunków na odpowiadających elektrodach oryginału.

Takie modelowanie jest w praktyce niewygodne, ponieważ jedno pole przestrzenne, mianowicie elektrostatyczne, zastępuje się przez drugie pole prądowe, również przestrzenne. Z. Godziński [1] zauważył, że gdy oryginalne pole elektrostatyczne ma symetrię osiową, to można je modelować płaskim polem prądu. Okazuje się przy tym, że w modelu płaskim przewodnictwo właściwe powinno się zmieniać w określony sposób wraz z punktem na płaszczyźnie.

Celem niniejszego artykułu jest odpowiedź na następujące pytanie: Jakie przestrzenne pola elektrostatyczne można modelować za pomocą płaskich pól prądowych i jakie są warunki tego modelowania?

Jest rzeczą oczywistą, że jeśli przestrzenne pole elektrostatyczne mamy modelować za pomocą pola płaskiego, to pole elektrostatyczne powinno dać się wyrazić w pewnym układzie współrzędnych krzywoliniowych w taki sposób, żeby nie zależało w tym układzie od jednej współrzędnej. Zajmiemy się przeto przede wszystkim równaniem pola elektrostatycznego we współrzędnych krzywoliniowych.

2. Pole cykliczne w przestrzeni. Potencjał φ elektrostatycznego pola przestrzennego spełnia w punktach, w których nie ma ładunków, równanie Laplace'a

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych równanie to przybiera postać

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \tag{2}$$

Zamiast kartezjańskiego układu współrzędnych wprowadzimy inny, krzywoliniowy układ współrzędnych (u, v, w). Współrzędne obu układów są związane równaniami

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w). \tag{3}$$

Ograniczymy się tylko do ortogonalnych krzywoliniowych układów współrzędnych. Element łuku ds wyraża się wtedy wzorem

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2. \tag{4}$$

Funkcje U, V, W zależne od zmiennych u, v, w możemy obliczyć z równań (3) i (4).

W ortogonalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych (u, v, w) równanie (1) przybiera postać[1])

$$(P\varphi_u)_u + (Q\varphi_v)_v + (R\varphi_w)_w = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$P(u, v, w) = \frac{VW}{U}, \qquad Q(u, v, w) = \frac{WU}{V}, \qquad R(u, v, w) = \frac{UV}{W}. \tag{6}$$

Do jednoznacznego wyznaczenia pola φ są potrzebne oprócz równania (5) jeszcze warunki brzegowe. Niech te warunki polegają na tym, że zadane są wartości funkcji φ na pewnych określonych powierzchniach (*warunki Dirichleta*). O każdej z tych powierzchni załóżmy, że jeśli leży na niej punkt (u_0, v_0, w_0), to leży na niej również punkt (u_0, v_0, w) dla każdego w. Będziemy mówili, że powierzchnie takie są *cykliczne względem zmiennej* w. Na przykład w układzie współrzędnych walcowych (r, z, α) powierzchniami cyklicznymi względem kąta α są powierzchnie obrotowe o osi z.

Załóżmy następnie, że warunki brzegowe dla funkcji φ są zadane na powierzchniach cyklicznych względem w i również nie zależą od w. Takie warunki będziemy nazywali *cyklicznymi*.

---

[1]) Smirnow [2], str. 337.

Wprowadźmy obecnie pojęcie pola cyklicznego.

Mówimy, że *pole ψ jest cykliczne (względem zmiennej w) w układzie* (u,v,w), jeżeli

1⁰ pole ψ nie zależy od w,

2⁰ krzywoliniowy układ (u,v,w) jest taki, że przy zadanych warunkach brzegowych cyklicznych (odpowiednio regularnych) równanie potencjału (5) ma rozwiązanie niezależne od w.

Układ mający własność 2⁰ będziemy nazywali *układem cyklicznym* (*względem zmiennej w*). W układzie takim każde pole, będące rozwiązaniem równania (5) przy cyklicznych warunkach brzegowych, jest cykliczne.

Powstaje pytanie, kiedy przestrzenne pole elektrostatyczne jest cykliczne. Odpowiedzią na nie jest następujące

TWIERDZENIE 1. *Na to, by w układzie współrzędnych (u,v,w) przestrzenne pole elektrostatyczne o potencjale $\psi=\psi(u,v,w)$ spełniającym równanie* (5) *było cykliczne, potrzeba i wystarcza, żeby*

$$\psi_w = 0 \tag{7}$$

oraz, żeby funkcje P i Q były postaci

$$P(u,v,w)=\lambda(w)P_0(u,v), \qquad Q(u,v,w)=\lambda(w)Q_0(u,v). \tag{8}$$

Dowód tego twierdzenia, wraz z dowodami innych twierdzeń, podamy w paragrafie 7. Na razie ograniczymy się do uwagi, że warunki (8) nałożono na układ współrzędnych, a nie na samo pole.

Z twierdzenia 1 wynika, że pola cykliczne spełniają równanie

$$(P_0\psi_u)_u+(Q_0\psi_v)_v=0, \tag{9}$$

które otrzymujemy podstawiając równania (7) i (8) do (5). Oczywiście każde rozwiązanie równania (9), nie zależące od w, jest polem cyklicznym we współrzędnych u,v,w.

Aby sformułować zagadnienie o modelowaniu prądowym pola elektrostatycznego, cyklicznego względem jednej ze zmiennych, zajmiemy się teraz równaniem pola prądu płynącego w płaszczyźnie.

3. Pole prądu na płaszczyźnie. Niech u,v oznaczają w tym paragrafie współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie, w której płynie prąd elektryczny o natężeniu $\boldsymbol{i}$ zależnym od punktu (u,v). Niech $\sigma(u,v)$ oznacza przewodnictwo właściwe płaszczyzny, które może również zależeć od punktu (u,v). Jeżeli pole prądu $\boldsymbol{i}$ jest stacjonarne, to istnieje potencjał $\varphi(u,v)$ pola elektrostatycznego sprzężonego z prądem $\boldsymbol{i}$. Na podstawie prawa Ohma

$$\boldsymbol{i}=\sigma \operatorname{grad} \varphi. \tag{10}$$

W tych punktach (u,v) płaszczyzny, gdzie nie ma źródeł prądu, zachodzi równanie ciągłości

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0. \tag{11}$$

Z równań (10) i (11) otrzymujemy

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0. \tag{12}$$

Ponieważ u, v uważamy za współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie, więc równanie (12) ma postać

$$\sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0. \tag{13}$$

W równaniu tym funkcje φ i σ zależą tylko od dwóch zmiennych u i v. Równania (9) i (13) są podobnej postaci. To podobieństwo jest podstawą modelowania.

4. Warunki modelowania równań. Rozpatrzymy na razie formalną analogię równań (9) i (13). Oba te równania mają rozwiązania zależne od dwóch zmiennych u, v. Aby dokładniej określić podobieństwo tych równań, przyjmiemy następującą definicję:

Jeżeli istnieje funkcja $\sigma = \sigma(u,v)$ i funkcja $M(\xi)$ taka, że dla każdej funkcji $\psi(u,v)$ spełniającej równanie (9), funkcja $\varphi(u,v) = M[\psi(u,v)]$ spełnia równanie (13), to mówimy, że *równanie* (9) *da się modelować przez równanie* (13), a funkcję $M(\xi)$ nazywamy *funkcją modelującą*.

Pytamy, jakie są warunki modelowania równań (9) i (13). Odpowiedzią jest

TWIERDZENIE 2. *Na to, by równanie* (9) *dało się modelować przez równanie* (13), *potrzeba i wystarcza, żeby był spełniony warunek*

$$P_0(u,v) = Q_0(u,v). \tag{14}$$

Wtedy istnieje funkcja modelująca M i przewodnictwo σ, przy czym

$$M(\xi) = \alpha\xi + \beta, \tag{15}$$

gdzie α i β są liczbami stałymi a funkcja $\sigma(u,v)$ jest postaci

$$\sigma(u,v) = \sigma_0 P_0(u,v), \tag{16}$$

gdzie σ_0 jest liczbą stałą.

5. Warunki modelowania pól. Mówimy, że pole przestrzenne $\psi = \psi(u,v,w)$, spełniające równanie (5), *da się modelować przez płaskie pole prądu*, jeżeli

1° pole ψ jest cykliczne względem w (wtedy ψ spełnia równanie (9)),
2° równanie (9) da się modelować przez równanie (13).
Z twierdzeń 1 i 2 wynika teraz

TWIERDZENIE 3. *Na to, by przestrzenne pole elektrostatyczne dało się modelować przez płaskie pole prądu, potrzeba i wystarcza, żeby było* $\psi_w \equiv 0$ *i żeby układ współrzędnych* (u,v,w) *spełniał warunek*

$$U = V, \qquad W(u,v,w) = \omega(w) W_1(u,v). \tag{17}$$

Wtedy przewodnictwo właściwe $\sigma(u,v)$ *jest postaci*

$$\sigma = \sigma_0 W_1(u,v), \tag{18}$$

gdzie σ_0 *jest stałą, a funkcja modelująca jest liniowa, tzn.*

$$\varphi(u,v) = \alpha\psi(u,v) + \beta, \qquad \alpha, \beta = \text{const}. \tag{19}$$

Twierdzenie 3 rozwiązuje kwestię, czy i jak przestrzenne pola elektrostatyczne dają się modelować przez pola prądowe na płaszczyźnie i jak „przetłumaczyć" wyniki pomiaru płaskiego pola na pole przestrzenne. Twierdzenie to nie mówi jednak, w jaki sposób zrealizować modelowanie. Podaje wprawdzie równanie na przewodnictwo właściwe σ płaszczyzny, ale nie mówi o tym, czym na płaszczyźnie prądu zastąpić elektrody przestrzenne. Kwestię tę wyjaśniamy w następnym paragrafie.

6. Modelowanie warunków brzegowych. Zajmiemy się tylko najczęściej spotykanymi w technice warunkami brzegowymi. Są one następującego typu: W przestrzeni odniesionej do krzywoliniowego układu współrzędnych (u,v,w) dane są powierzchnie Σ_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Powierzchnie te są naładowanymi elektrodami metalowymi i na nich potencjał $\psi = \psi(u,v,w)$ pola elektrostatycznego ma stałą wartość, na ogół inną na każdej elektrodzie. A więc warunki dadzą się napisać jako układ równań

$$\psi(u,v,w) = C_k \qquad \text{dla} \quad (u,v,w) \text{ leżącego na } \Sigma_k. \tag{20}$$

Jeżeli powierzchnie Σ_k są cykliczne, to warunki (20) są również cykliczne.

Często zamiast stałych C_k podaje się całkowite ładunki poszczególnych elektrod. Ładunki te są dane przez wzory

$$Q_k = \int_{\Sigma_k} \frac{\partial\psi}{\partial n_k}\, d\Sigma_k, \tag{21}$$

gdzie n_k oznacza normalną do Σ_k. W tym przypadku stałe C_k można wyznaczyć z równań (21).

W paragrafie 7 udowodnimy

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli pole ψ wyznaczone przez warunki* (20) *lub* (21), *gdzie powierzchnie Σ_k są cykliczne, daje się modelować przez płaskie pole prądowe, to*

(22 a) *za równania elektrod modelu Λ_k można przyjąć równania elektrod Σ_k;*

(22 b) *stałe C_k należy zastąpić przez stałe $c_k = \alpha C_k + \beta$ (patrz twierdzenie* 3, *wzór* (19));

(22 c) *ładunki Q_k należy zastąpić przez prądy o natężeniu $I_k = \gamma Q_k$, gdzie γ jest pewną stałą modelowania.*

7. Dowody twierdzeń. Dowody pierwszych dwóch twierdzeń opierają się na następującym lemacie:

LEMAT 1. *Jeżeli każde rozwiązanie $u(x,y)$ równania różniczkowego*

$$a_1 u_{xx} + b_1 u_{yy} + c_1 u_x + d_1 u_y = 0, \qquad a_1 \neq 0, \tag{23}$$

jest rozwiązaniem równania

$$a_2 u_{xx} + b_2 u_{yy} + c_2 u_x + d_2 u_y = 0, \qquad a_2 \neq 0, \tag{24}$$

to odpowiednie współczynniki są proporcjonalne, tzn.

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 .$$

Dowód[2]). Z równań (23) i (24) można wyrugować u_{xx} otrzymując

$$\alpha(x,y) u_{yy} + \beta(x,y) u_x + \gamma(x,y) u_y = 0, \tag{25}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}, \qquad \beta = \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2}, \qquad \gamma = \frac{d_1}{a_1} - \frac{d_2}{a_2}.$$

Ustalmy punkt (x_0, y_0). Z twierdzenia Cauchy'ego[3]) wynika, że wartości $u_{yy}(x_0,y_0)$, $u_x(x_0,y_0)$ i $u_y(x_0,y_0)$ można wybrać dowolnie, wobec czego współczynniki formy liniowej (25) muszą być równe zeru. To daje

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \qquad \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}, \qquad \frac{d_1}{a_1} = \frac{d_2}{a_2},$$

co dowodzi lematu.

Dowód twierdzenia 1. Udowodnimy, że warunki (8) są konieczne i dostateczne na to, by układ (u, v, w) był cykliczny względem zmiennej w.

[2]) Dowód ten podał W. Ślebodziński.

[3]) Porównaj np. Goursat [3], str. 47.

Dowiedziemy najpierw konieczności. Zakładamy więc, że wszelkim warunkom cyklicznym odpowiada rozwiązanie ψ równania (5) niezależne od w. Ustalmy jakieś warunki cykliczne. Niech im odpowiada rozwiązanie $\psi_0(u,v)$. Spełnia ono równanie

$$P\frac{\partial^2\psi_0}{\partial u^2}+Q\frac{\partial^2\psi_0}{\partial v^2}+\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi_0}{\partial u}+\frac{\partial Q}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi_0}{\partial v}=0 \tag{26}$$

dla każdego w, a więc i dla $w=w_0$. Możemy więc napisać

$$P_0\frac{\partial^2\psi_0}{\partial u^2}+Q_0\frac{\partial^2\psi_0}{\partial v^2}+\frac{\partial P_0}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi_0}{\partial u}+\frac{\partial Q_0}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi_0}{\partial v}=0, \tag{27}$$

gdzie $P_0(u,v)=P(u,v,w_0)$, $Q_0(u,v)=Q(u,v,w_0)$. Aby do równań (27) i (26) zastosować lemat, pokażemy, że każde rozwiązanie $\chi(u,v)$ równania (27) spełnia (26). Istotnie, $\chi(u,v)$ można uważać za rozwiązanie równania (5) przy pewnych cyklicznych warunkach brzegowych (korzystamy tu z założenia o cykliczności układu) a wobec tego $\chi(u,v)$ musi spełniać równanie (26).

Na podstawie lematu mamy teraz

$$P:P_0=Q:Q_0=\frac{\partial P}{\partial u}:\frac{\partial P_0}{\partial u}=\frac{\partial Q}{\partial v}:\frac{\partial Q_0}{\partial v}=\lambda_0(u,v,w), \tag{28}$$

gdzie λ_0 jest pewną funkcją zmiennych u,v,w. Okażemy, że λ_0 nie zależy od zmiennych u i v. W tym celu scałkujemy następujące dwa równania, które wynikają z (28):

$$\frac{1}{P(u,v,w)}\cdot\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{1}{P_0(u,v)}\cdot\frac{\partial P_0}{\partial u},\qquad \frac{1}{Q(u,v,w)}\cdot\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{1}{Q_0(u,v)}\cdot\frac{\partial Q_0}{\partial v}.$$

Otrzymujemy

$$P(u,v,w)=p(v,w)P_0(u,v),\qquad Q(u,v,w)=q(u,w)Q_0(u,v), \tag{29}$$

gdzie p i q są pewnymi funkcjami. Z równości (28) wynika, że

$$\lambda_0(u,v,w)=p(v,w)=q(u,w)=\lambda(w), \tag{30}$$

gdzie λ jest już funkcją tylko jednej zmiennej w. Z równości (28) i (30) wynikają warunki (8).

Udowodnimy teraz dostateczność warunków (8). Jeżeli są one spełnione, to równanie (5) przyjmuje postać

$$\lambda(w)\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P_0\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(Q_0\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial w}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)=0. \tag{31}$$

Mamy wykazać, że jeśli warunki brzegowe są cykliczne względem w, to $\partial\psi/\partial w = 0$. Niech zatem na powierzchni cyklicznej o równaniu $f(u,v)=0$ będzie $\psi(u,v,w)=\bar{\psi}(u,v)$. Rozpatrzmy równanie różniczkowe względem dwóch zmiennych u,v:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P_0\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(Q_0\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0. \tag{32}$$

Niech $\psi_0(u,v)$ będzie rozwiązaniem tego równania, spełniającym warunek $\psi_0(u,v)=\bar{\psi}(u,v)$ na krzywej $f(u,v)=0$. Funkcja $\psi(u,v,w)=\psi_0(u,v)$ spełnia równanie (31) i zadane warunki cykliczne na powierzchni $f(u,v)=0$, a więc funkcja $\psi_0(u,v)$ jest rozwiązaniem cyklicznym równania (31).

Dowód twierdzenia 1 jest już teraz bezpośrednim wnioskiem z definicji układu cyklicznego.

D o w ó d t w i e r d z e n i a 2. Udowodnimy jedynie konieczność warunku (14), gdyż jego dostateczność można łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Zakładamy więc, że jeżeli funkcja ψ_0 spełnia równanie (9), to funkcja

$$\varphi_0(u,v)=M[\psi_0(u,v)] \tag{33}$$

spełnia równanie (13). Równanie to po podstawieniu przybiera postać

$$aM''(\psi_0)+bM'(\psi_0)=0, \tag{34}$$

gdzie

$$a=(\psi_{0u})^2+(\psi_{0v})^2\neq 0, \quad \text{o ile} \quad \psi_0\neq\text{const},$$

$$b=\psi_{0uu}+\psi_{0vv}+\frac{1}{\sigma}(\psi_{0u}\sigma_u+\psi_{0v}\sigma_v).$$

Ponieważ funkcja $\psi=\lambda\psi_0+\mu$ spełnia również równanie (9) przy dowolnych stałych λ i μ, więc funkcja $\varphi=M[\psi]$ musi spełniać (13). Po podstawieniu otrzymujemy

$$\lambda^2aM''[\lambda\psi_0+\mu]+\lambda bM'[\lambda\psi_0+\mu]=0. \tag{35}$$

Ustalmy punkt (u_0,v_0). Bez ograniczenia ogólności można zażądać, by $\psi_0(u_0,v_0)=0$. Równanie (35) przybiera wtedy postać

$$\lambda^2a(x_0,y_0)M''[\mu]+\lambda b(x_0,y_0)M'[\mu]=0,$$

co z uwagi na dowolność λ daje

$$M''(\xi)=0, \quad \text{czyli} \quad M(\xi)=\alpha\xi+\beta. \tag{36}$$

Mając kształt funkcji modelującej, możemy znaleźć σ. A mianowicie niech funkcja $\psi=\psi(u,v)$ spełnia równanie (9). Wtedy funkcja $\varphi(u,v)=$ $=a\psi(u,v)+\beta$ musi spełniać równanie (13), co daje

$$\sigma(u,v)[\psi_{uu}+\psi_{vv}]+\sigma_u\psi_u+\sigma_v\psi_v=0. \tag{37}$$

Stosując do równań (9) i (37) lemat, dostajemy

$$\frac{P_0}{\sigma}=\frac{Q_0}{\sigma}=\frac{P_{0u}}{\sigma_u}=\frac{P_{0v}}{\sigma_v},$$

co daje $P_0=Q_0$, $\sigma=\sigma_0 P_0$, a to wraz z (36) dowodzi konieczności warunku (14).

Dowód twierdzenia 3 wynika bezpośrednio z twierdzeń 1 i 2 oraz równań (6). Przeprowadzimy teraz

Dowód twierdzenia 4. Wzór (22b) wynika bezpośrednio z twierdzenia 3, a mianowicie z wzoru (19). Zajmiemy się teraz warunkiem (22a).

Równania elektrod można napisać w postaci

$$\psi(u,v)=C_k, \tag{38}$$

gdzie $\psi(u,v)$ jest polem odpowiadającym warunkom brzegowym (20) lub (21). Pole modelu dane jest przez wzór

$$\varphi(u,v)=a\psi(u,v)+\beta, \tag{39}$$

a elektrody modelu, jako ekwipotencjały pola φ o stałych $c_k=aC_k+\beta$, dane są równaniem $\varphi(u,v)=c_k$. Korzystając z (38) i (39) możemy przedstawić równania elektrod modelu w postaci $\psi(u,v)=C_k$, identycznej z (38), co dowodzi (22a).

Aby okazać (22c), obliczamy ładunki elektrod Σ_k i prądy dopływające do elektrod Λ_k. Prądy dane są przez wzór

$$I_k=\int\limits_{\Lambda_k}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_k}\,d\Lambda_k=a\int\limits_{\Lambda_k}\sigma\frac{\partial\psi}{\partial\nu_k}\,d\Lambda_k, \tag{40}$$

gdzie ν_k jest normalną do Λ_k. Wzór (21) napiszemy w postaci

$$Q_k=\int\limits_{\Sigma_k}\frac{\partial\psi}{\partial n_k}\,d\Sigma_k=\int\limits_{\Sigma_k}\frac{\partial\psi}{\partial n_k}\,\omega(w)W_1\,dw\,ds_k=\int\omega(w)\,dw\int\limits_{\Lambda_k}\frac{\partial\psi}{\partial n_k}\,W_1\,ds_k.$$

Skorzystaliśmy tutaj z następującego przedstawienia elementu powierzchni:

$$d\Sigma_k=\omega(w)W_1(u,v)\,dw\,ds_k,$$

gdzie ds_k jest elementem łuku przekroju powierzchni Σ_k powierzchnią $w=\text{const}$. Na ds_k i $\partial\psi/\partial n_k$ mamy wzory

$$ds_k = U d\Lambda_k, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_k} = \frac{\partial\psi}{\partial\nu_k}\cdot\frac{1}{U}.$$

Wynikają one ze specjalnego kształtu elementu łuku (twierdzenie 3 oraz wzór (4)). Ostatecznie, po skorzystaniu z wzoru (16), otrzymujemy

$$Q_k = \frac{1}{\sigma_0}\int \omega(w)\,dw \cdot \int_{\Lambda_k} \frac{\partial\psi}{\partial\nu_k}\,\sigma\,d\Lambda_k. \tag{41}$$

Równania (41) i (40) dowodzą warunku (22c).

8. Przykłady. Wyniki poprzednich paragrafów zastosujemy do układu walcowego (r,z,α). Równania (3) przybierają postać

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha, \qquad z = z.$$

Element łuku (4) wyraża się wzorem

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\alpha^2.$$

Układ walcowy jest więc ortogonalny. Współczynniki U, V, W są $U=1$, $V=1$, $W=r$. Spełniają one warunki (17) twierdzenia 3, przy czym $\omega=1$, $W_1=r$. Widzimy, że wyróżnionej zmiennej w odpowiada kąt α. Z twierdzenia 3 wynika, że każde pole $\psi=\psi(r,z,\alpha)$ niezależne od kąta α da się modelować przez pole prądowe płaskie. Model budujemy na półpłaszczyźnie $0\leqslant r<\infty$, $-\infty<z<\infty$ o przewodnictwie właściwym danym przez wzór

$$\sigma = \sigma_0 r.$$

Wynik ten uzyskał częściowo Z. Godziński [1], dowodząc dostateczności powyższych warunków. Z twierdzenia 3 wynika, że warunki te są również konieczne, a więc, że nie ma innego sposobu modelowania dla współrzędnych walcowych w przypadku symetrii osiowej.

Z innych, częściej spotykanych współrzędnych, do modelowania powyższą metodą nadają się np. układy: paraboliczny, paraboloidalny i bipolarny. Przykładów nie przytaczamy, ponieważ wymagają one tylko prostych rachunków.

Na zakończenie warto jeszcze raz podkreślić, że pole elektrostatyczne wybrano w powyższej pracy tylko dla przykładu i że twierdzenia, które udowodniliśmy, można stosować również do modelowania innych pól spełniających równania (1), a metoda użyta w pracy niniejszej da się bez trudu przenieść na pola ogólniejsze.

Prace cytowane

[1] Z. Godziński, *Wyznaczanie rozkladu pola elektrycznego*, Przegląd Telekomunikacyjny 3 (1952), str. 77-86.

[2] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. II, Москва-Ленинград 1951.

[3] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, troisième édition, Paris 1927.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 13. 11. 1953 r.

С. ГЛАДЫШ и А. РЫБАРСКИЙ (Вроцлав)

О МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ ПЛОСКИМ ПОЛЕМ ТОКА

РЕЗЮМЕ

Электростатическое пространственное поле с потенциалом ψ, определенное в криволинейной системе координат (u,v,w), не зависит от одной переменной. Задача заключается в определении необходимых и достаточных условий моделируемости поля ψ полем электрического тока в плоскости. Моделирование не может зависеть от функции ψ. Соответственные условия определено, причем оказалось, что оин осуществляются только в некотором классе систем криволинейных координат. Для этого класса определено способ моделирования краевых условий. Результаты проиллюстрированы на системе цилиндрических координат.

S. GŁADYSZ and A. RYBARSKI (Wrocław)

ON MODELLING THREE-DIMENSIONAL FIELDS BY A PLANE FIELD OF CURRENT

SUMMARY

A three-dimensional electrostatic field with the potential ψ, expressed in an orthogonal curvilinear system (u,v,w), does not depend on one variable. The problem consists in finding the necessary and sufficient conditions of modelling the field ψ by an electric field in the plane. Modelling cannot depend on the function ψ. The required conditions have been obtained and it has been found that they are satisfied only for a certain class of curvilinear systems. For that class a method of modelling boundary conditions is also given. The results are illustrated on the example of cylindrical coordinates.