M. FISZ (Warszawa)

DOKŁADNOŚĆ PEWNEGO WZORU ASYMPTOTYCZNEGO

1. Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie Poissona, tj.

$$u_r = P(X=r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}, \tag{1}$$

gdzie $\lambda > 0$. Wiadomo, że dla dużych λ prawdopodobieństwo u_r można aproksymować przez wyrażenie v_r określone wzorem

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-t^2/2}, \tag{2}$$

gdzie

$$t = \frac{r-\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3}$$

Feller[1]) wspomina, że oszacowanie błędu, jaki się popełnia zastępując u_r przez v_r, można uzyskać z teorii szeregów rozbieżnych. Hardy[2]) podaje wzór

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-t^2/2}\left[1 + O\left(\frac{|t|+1}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{|t|^3}{\sqrt{\lambda}}\right)\right], \tag{4}$$

który wtedy zachodzi, gdy ze wzrostem λ do nieskończoności r dąży do nieskończoności, jednakże tak, że t określone przez wzór (3) spełnia związek

$$|t| \leqslant \lambda^\eta, \tag{5}$$

gdzie $0 \leqslant \eta \leqslant 1/6$.

Wzór (4) nie nadaje się oczywiście do zastosowań.

---

1) [1], § 10.1.
2) [2], § 9.1.

Z twierdzenia udowodnionego w dalszym ciągu niniejszej pracy wynika, że prawdopodobieństwo u_r można z większą dokładnością aproksymować przez wyrażenie w_r określone wzorem

$$w_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}}\right) \tag{6}$$

niż przez v_r. Twierdzenie to daje zarazem stopień dokładności każdej z rozważanych aproksymacji[3]).

2. Twierdzenie. *Gdy $\lambda \to \infty$, $r \to \infty$, i to tak, że t określone przez wzór* (3) *jest absolutnie ograniczone, to wzory*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{1-\varepsilon} (u_r - v_r)\right] = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{3/2-\varepsilon} (u_r - w_r)\right] = 0 \tag{8}$$

zachodzą dla dowolnego $\varepsilon > 0$.

Dowód. Według wzoru Stirlinga jest

$$\log r! = \log \Gamma(r+1) = \left(r + \frac{1}{2}\right) \log r - r + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Stąd i z wzoru (1) mamy

$$\log u_r = -\lambda + r \log\lambda - \left(r + \frac{1}{2}\right) \log r + r - \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$

Uwzględniając, że z wzoru (3) wynika $r = t\sqrt{\lambda} + \lambda$, otrzymujemy

$$\log u_r = -\log\sqrt{2\pi\lambda} + t\sqrt{\lambda} - \left(t\sqrt{\lambda} + \lambda + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{10}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \left(t\sqrt{\lambda} + \lambda + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) &= \left(t\sqrt{\lambda} + \lambda + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{3\lambda^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] = \\ &= t\sqrt{\lambda} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

[3]) W pracy [3] autor podał, opierając się na twierdzeniu Esseena [4], metodę aproksymowania wyrażenia u_r z dowolną dokładnością.

Z wzorów (10) i (11) wynika

$$\log u_r = -\frac{t^2}{2} - \log\sqrt{2\pi\lambda} - \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

a więc

$$(12)\qquad \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{t}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-t^2/2} \left[1 - \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{t^3}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \end{aligned}$$

Z wzoru (12) otrzymujemy natychmiast wzory (7) i (8).

3. Tablice 1 i 2 ilustrują dokładność aproksymacji prawdopodobieństwa u_r przez v_r i w_r, odpowiednio. Jak widać z tych tablic, wyrażenie w_r dużo dokładniej aproksymuje u_r niż to czyni v_r.

TABLICA 1

	$\lambda=3$			$\lambda=7$		
r	u_r	v_r	w_r	u_r	v_r	w_r
0	0,0498	0,0514	0,0514			
1	,1494	,1182	,1401	0,0064	0,0115	0,0080
2	,2240	,1950	,2239	,0223	,0253	,0236
3	,2240	,2303	,2303	,0521	,0481	,0513
4	,1680	,1950	,1661	,0912	,0793	,0890
5	,1008	,1182	,0963	,1277	,1133	,1264
6	,0504	,0514	,0514	,1490	,1404	,1499
7	,0216	,0160	,0243	,1490	,1508	,1508
8	,0081	,0036	,0089	,1304	,1404	,1308
9	,0027	,0006	,0023	,1014	,1133	,1002
10	,0008	,0001	,0004	,0710	,0793	,0696
11				,0452	,0481	,0448
12				,0263	,0253	,0270
13				,0142	,0115	,0150
14				,0071	,0046	,0076
15				,0033	,0016	,0034
16				,0014	,0005	,0013
17				,0006	,0001	,0004

TABLICA 2

	$\lambda=11$			$\lambda=15$		
r_r	u_r	v_r	w_r	u_r	v_r	w_r
2	0,0010	0,0030	0,0012			
3	,0037	,0066	,0043	0,0002	0,0008	0,0001
4	,0102	,0130	,0110	,0006	,0018	,0007
5	,0224	,0234	,0228	,0019	,0037	,0022
6	,0411	,0386	,0407	,0048	,0069	,0053
7	,0646	,0581	,0636	,0104	,0122	,0108
8	,0888	,0799	,0878	,0194	,0201	,0197
9	,1085	,1003	,1083	,0324	,0310	,0323
10	,1194	,1149	,1200	,0486	,0448	,0481
11	,1194	,1203	,1203	,0663	,0604	,0656
12	,1094	,1149	,1099	,0829	,0763	,0824
13	,0926	,1003	,0923	,0956	,0902	,0956
14	,0728	,0799	,0719	,1024	,0996	,1029
15	,0534	,0581	,0527	,1024	,1030	,1030
16	,0367	,0386	,0365	,0960	,0996	,0964
17	,0237	,0234	,0240	,0847	,0902	,0847
18	,0145	,0130	,0150	,0706	,0763	,0702
19	,0084	,0066	,0087	,0557	,0604	,0552
20	,0046	,0030	,0048	,0418	,0448	,0415
21	,0024	,0013	,0025	,0299	,0310	,0298
22	,0012	,0005	,0011	,0204	,0201	,0205
23	,0006	,0002	,0005	,0133	,0122	,0136
24				,0083	,0069	,0086
25				,0050	,0037	,0052
26				,0029	,0018	,0030
27				,0016	,0008	,0016
28				,0009	,0004	,0008
29				,0004	,0001	,0004

Prace cytowane

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, New York — London 1950.

[2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford 1949.

[3] M. Fisz, *Refinement of a probability limit theorem and its applications to Bessel functions*, Acta Mathematica Acad. Scient. Hungaricae 6 (w druku).

[4] C. G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions*, Acta Mathematica 77 (1945), p. 1-125.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 18. 6. 1953 r.

М. ФИШ (Варшава)

ТОЧНОСТЬ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ

РЕЗЮМЕ

Пусть X пуассоновская случайная величина, закон распределения которой дан формулой (1), где $\lambda > 0$. Известно, что для больших значений λ вероятность u_r может быть аппроксимирована выражением v_r определяемым формулой (2), где t дано формулой (3). Предлагается аппроксимация w_r определенная формулой (6). Точность этих аппроксимаций является предметом предлагаемой заметки.

Доказывается следующая теорема:

Пусть $r \to \infty$, когда $\lambda \to \infty$, так однако, что значения t принадлежат постоянному (впрочем произвольному) интервалу. Тогда имеют место соотношения (7) *и* (8).

Точность рассматриваемых аппроксимаций u иллюстрируют таблицы 1 и 2.

M. FISZ (Warszawa)

ACCURACY OF AN ASYMPTOTICAL FORMULA

SUMMARY

X is a Poisson variable with a probability distribution given by (1), where $\lambda > 0$. It is known that for large values of λ the probability u_r can be approximated by v_r, defined by (2), where t is given by (3). The approximation w_r, defined by (6), is proposed. The accuracy of these approximations is the subject of this note. The following theorem is proved:

Let $r \to \infty$ with $\lambda \to \infty$ but in such a way that the values of t belong to some constant (although arbitrary) interval. Then the relations (7) *and* (8) *hold.*

The accuracy of the considered approximations of u_r is illustrated by the tables 1 and 2.
