

W. RUDZKI (Warszawa)

## *POBIERANIE PRÓBEK Z PRODUKTÓW BEZKSZTAŁTNYCH ROZWARSTWIAJĄCYCH SIĘ*

1. W pracach [1], [2], [3] i [4] rozpatrywano zagadnienie szacowania właściwości średniej produktów bezkształtnych pakowanych w kształcie dowolnej bryły geometrycznej. Przyjęto, że wartość badanej właściwości w każdym punkcie produktu zależy od miejsca położenia tego punktu w produkcie, przy czym zależność ta jest zależnością funkcyjną. Określono takie miejsca pobierania próbek z produktu, żeby oszacowanie właściwości średniej było w pewnym sensie najlepsze. Rozważania przeprowadzono przy założeniu określonej funkcji zależności między wartością właściwości w punkcie wewnątrz produktu a położeniem tego punktu.

Celem niniejszego opracowania jest podanie metod postępowania przy badaniu właściwości średnich takich produktów bezkształtnych, które podlegają rozwarstwianiu się ze względu na badaną właściwość.

Przyjmujemy, co naturalnie zmniejszy zakres możliwości stosowania omawianych metod postępowania, że będziemy zajmowali się jedynie produktami w naczyniach (opakowaniach) o jednakowych przekrojach poziomych.

Przypadek ten był już wspomniany w pracy [3]. Zajmiemy się tu nim bardziej szczegółowo, przyjmując bardziej ogólne założenia, oraz podając inne niż w wymienionych pracach estymatory wartości średniej. Estymatory te mogą być oczywiście stosowane i w przypadkach omawianych w cytowanych pracach.

Do omawianych tu produktów rozwarstwiających się będą należały przykładowo ciała maziste, roztwory, mieszaniny itp. składające się z cząsteczek o różnych ciężarach właściwych. Będą tu należały również pewne produkty sypkie, składające się z drobin o różnej wielkości, w których rozwarstwianie się następuje w wyniku wstrząsania naczyniem (opakowaniem), np. podczas transportu. Wreszcie, omawiane tu metody powinny znaleźć zastosowanie w przypadku takich produktów, w których na wartość badanej właściwości ma wpływ otoczenie (np. warunki atmo-

sferyczne), przy czym może ono wpływać bezpośrednio jedynie na górną powierzchnię produktu. Może więc to być zboże w otwartym zbiorniku badane ze względu na wilgotność.

W przypadku pierwszej grupy artykułów przedmiotem badania może być między innymi zawartość określonego składnika w mieszaninie czy roztworze. W drugiej grupie właściwością badaną może być zawartość drobin o określonej wielkości lub średnia wielkość drobin.

**2.** Zajmijmy się najpierw przypadkami skrajnymi. Rozpatrzmy produkty, w których po stosunkowo krótkim czasie następuje całkowite rozwarstwienie się ze względu na badaną właściwość. Przykładem może tu być mieszanina wody z olejem.

W tym przypadku badanie zawartości określonego składnika (np. oleju), oddzielającego się całkowicie od pozostałych, nie przedstawia większych trudności.

Drugim skrajnym przypadkiem będą produkty, w których proces rozwarstwiania się jest bardzo powolny lub następuje pod wpływem działania czynników zewnętrznych. W takim przypadku, dla zbadania średniej zawartości danego składnika lub drobin o określonej wielkości (jeżeli można przyjąć, że czas rozwarstwiania się był dostatecznie krótki lub nie działały przyczyny zewnętrzne powodujące rozwarstwianie się) wystarczy pobrać z dowolnego miejsca produktu jedną próbkę i wynik jej zbadania uznać za reprezentujący cały produkt.

**3.** W dalszym ciągu niniejszej pracy będziemy zajmowali się jedynie takimi produktami, w których proces rozwarstwiania się jest dość szybki, ale nie prowadzi do zupełnego wydzielenia się poszczególnych składników. Proces ten może być samoistny, bądź też przebiegać pod wpływem działania czynników zewnętrznych.

Pierwszą nasuwającą się tu i zdawałoby się najlepszą metodą postępowania jest zmieszanie produktu, a następnie pobranie próbki z dowolnego jego miejsca i poddanie jej badaniu ze względu na interesującą nas właściwość.

Przez *właściwość badaną* będziemy w dalszym ciągu rozumieć zarówno zawartość określonego składnika, jak i wielkość interesujących nas drobin. *Średnia wartość właściwości* będzie oznaczała zarówno średnią wielkość drobin, ilość drobin określonej wielkości, jak i zawartość danego składnika w produkcie podlegającym badaniu.

Wróćmy po tej dygresji do zagadnienia mieszania. Jak wynika z obserwacji praktycznej, uzyskanie dobrego wymieszania jest w wielu przypadkach bardzo trudne, szczególnie w produktach sypkich, a w innych wręcz niemożliwe. Na przykład niemożliwe prawie jest wymieszanie mąki badanej ze względu na popiołowość bądź wymieszanie zawartości kotła przy warzeniu mydła. Trudne może być również ze względów

technicznych wymieszanie produktów w wielkich zbiornikach lub wagonach.

W przypadku omawianych produktów najczęściej stosuje się pobieranie wielu próbek z naczynia bądź w sposób losowy, bądź z określonych miejsc, np. z góry, ze środka i z dołu, zarówno z produktu rozwarstwowionego, jak i po jego zmieszaniu.

Oczywiście, im bardziej produkt jest rozwarstwiony oraz im gorzej jest wymieszany, tym większa powinna być liczba pobieranych próbek. Pobieranie dużej liczby próbek nastęrcza nieraz poważne trudności techniczne, a także pociąga za sobą zwiększenie kosztów badania produktu.

4. Niech  $X$  będzie badaną właściwością produktu. Zakładamy, że w zbiorze naczyń  $X$  jest zmienną losową o pewnej gęstości prawdopodobieństwa. W danym naczyniu, w każdym punkcie  $p$  produktu, zmienna ta przyjmuje określoną rzeczywistą wartość  $x$ . W przypadku rozwarstwiania się produktu wartość  $x$  badanej właściwości w każdym punkcie  $p$  produktu będzie zależała od położenia tego punktu w produkcie.

Przyjmijmy tu, opierając się na pracy [1], umowną miarę odległości  $r$  punktu  $p$  od powierzchni produktu, zdefiniowaną jako stosunek

$$(4.1) \quad r = h/H,$$

gdzie  $H$  jest odległością dna naczynia od powierzchni produktu, a  $h$  — odległością od powierzchni produktu do danego punktu  $p$ , mierzona w tych samych jednostkach co  $H$  i wzdłuż tej samej prostej.

Tak więc  $r$  jest względną odległością punktu wewnątrz produktu od jego powierzchni i przyjmować może wartości od 0 do 1.

Zgodnie z przyjętym założeniem, wartość  $x$  właściwości w każdym miejscu produktu zależna jest od odległości  $r$  tego miejsca. Przyjmujemy, że jest to zależność funkcyjna. Tak więc  $x$  w danym naczyniu jest pewną funkcją rzeczywistą odległości  $r$ .

Wartość  $x$  badanej właściwości, w każdym punkcie produktu, zależna jest od stopnia jego rozwarstwienia się. Niech  $M$  będzie wielkością wyrażającą ten stopień. Wielkość ta jest zależna od czynników powodujących rozwarstwianie się, a więc np. od czasu, temperatury, składu produktu, warunków transportu itd. Wielkość  $M$  jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa  $g(m)$ , przyjmującą wartości  $m$  z pewnego obszaru  $Q$ . W danym naczyniu, w chwili pobierania próbki, zmienna  $M$  przyjmuje określoną, ale nieznaną wartość  $m$ , ponieważ nieznaną jest stopień rozwarstwienia się. Możemy przyjąć, że  $M$  jest losowym parametrem funkcji wyrażającej zależność  $x$  (w zbiorze naczyń) od odległości  $r$  (porównaj ustęp 5).

Tak więc

$$(4.2) \quad X = f(r; M)$$

jest w zbiorze naczyń funkcją zmiennej rzeczywistej  $r$  i zmiennej losowej  $M$ . W każdym natomiast konkretnym naczyniu w chwili pobierania próbki

$$(4.3) \quad x = f(r; m)$$

jest funkcją zmiennej rzeczywistej  $r$ , której przebieg zależy od parametru  $m$  będącego realizacją zmiennej losowej  $M$ .

W pewnych przypadkach  $M$  może być wektorem losowym o  $q$  składowych,  $M = (M_1, M_2, \dots, M_q)$ . Obszar  $Q$  będzie wówczas obszarem  $q$ -wymiarowym, a  $g(m)$  łączną gęstością prawdopodobieństwa wektora losowego  $M$ . Funkcja (4.3) będzie w takim przypadku funkcją zmiennej rzeczywistej  $r$  zależną od wektora parametrów  $m = (m_1, m_2, \dots, m_q)$ .

Zakładamy, że znamy kształt funkcji (4.2) oraz obszar  $Q$  i funkcję  $g(m)$  określoną na tym obszarze.

Przyjmujemy ponadto, że funkcja (4.3) jest ciągła i całkowalna ze względu na  $r$  i  $m$ .

5. Przyjeliśmy, że parametr  $M$  jest zmienną losową, przyjmującą wartości  $m$  z pewnego obszaru  $Q$ , o funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $g(m)$ . Założyliśmy ponadto, że znany jest zarówno obszar  $Q$ , jak i funkcja  $g(m)$ .

Zajmijmy się obecnie praktycznym sensem parametru losowego  $M$  oraz sposobem empirycznego znajdowania  $Q$  i  $g(m)$ .

Przyjmijmy dla konkretyzacji zagadnienia, że produkt podlegający badaniu jest ciałem mazistym, składającym się z cząsteczek o różnych ciężarach właściwych i, związanych z tym ciężarem, różnych własnościami chemicznymi. Przyjmijmy dalej, że celem badania jest określenie średniego ciężaru właściwego cząsteczek. Niech jedynym czynnikiem powodującym rozwarstwienie się produktu będzie czas przebywania jego w naczyniu. Z biegiem więc czasu cząsteczki o większym ciężarze właściwym będą opadały w kierunku dna naczynia, wypierając jednocześnie ku górze cząsteczki lżejsze.

Zgodnie z dotychczasowymi założeniami przyjmujemy, że *okres od chwili umieszczenia produktu w pojemniku do czasu rozpoczęcia badania jest zmienną losową*.

W rozpatrywanym przykładzie parametr  $M$  będzie więc czasem przebywania produktu w naczyniu. Może on być również funkcją tego czasu, przy czym kształt tej funkcji można określić empirycznie.

Ustalenie obszaru  $Q$  będzie więc w obu przypadkach równoznaczne z empirycznym ustaleniem przedziału czasu, w jakim produkt może przebywać w naczyniu do chwili badania. Znalezienie natomiast funkcji

gęstości  $g(m)$  będzie polegało na znalezieniu empirycznego rozkładu tego czasu i na ewentualnym dopasowaniu do niego rozkładu teoretycznego.

Rozpatrywany przykład jest bardzo prosty. W praktyce proces rozwarstwiania się produktu może być wynikiem działania więcej niż jednego czynnika. Ustalenie wszystkich czynników wpływających na ten proces, a także ustalenie zależności parametru  $M$  od tych czynników może być trudne, a nawet niemożliwe. W takim przypadku należałoby, po uprzednim znalezieniu kształtu funkcji (4.3) określić zarówno obszar  $Q$ , jak i funkcję gęstości  $g(m)$  bezpośrednio dla  $M$  na drodze doświadczalnej.

6. Niech  $\bar{x}$  oznacza wartość średnią badanej właściwości w danym naczyniu. Wartość ta jest

$$(6.1) \quad \bar{x} = \int_0^1 f(r; m) dr.$$

Zajmijmy się teraz znalezieniem takiego estymatora  $\hat{x}$ , aby oszacowanie za jego pomocą wartości średniej  $\bar{x}$  było w pewnym sensie najlepsze.

Przyjmijmy następujący sposób postępowania. Pobieramy z produktu  $n$  próbek ze ściśle określonych miejsc  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Za oszacowanie średniej  $\bar{x}$  przyjmujemy liniową kombinację wartości badanej właściwości w punktach  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , o współczynnikach  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Tak więc estymator  $\hat{x}$  ma postać

$$(6.2) \quad \hat{x} = a_1 f(r_1; m) + a_2 f(r_2; m) + \dots + a_n f(r_n; m).$$

Zakładamy, że w wyniku pomiaru otrzymujemy faktyczną wartość badanej właściwości w każdym z punktów  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

Zauważmy, że dla każdej wartości  $m$  można szukać takiego wektora współczynników  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , dla którego spełniona by była równość  $\hat{x} = \bar{x}$ . Ponieważ jednak  $m$  jest nieznaną wartością realizacji zmiennej losowej  $M$ , możemy znaleźć jedynie taki wektor  $\alpha$ , żeby ocena średniej była możliwie najlepsza bez względu na wartość jaką przyjmie ta zmienna.

Wydaje się rozsądne, żeby poszukiwany estymator  $\hat{x}$  był estymatorem nieobciążonym. Zgodnie z warunkiem nieobciążenia zażądamy, żeby wartość oczekiwana różnicy między estymatorem a szacowaną wartością średnią badanej właściwości była równa zeru, a więc

$$(6.3) \quad E(\hat{x} - \bar{x}) = \int_Q (\hat{x} - \bar{x}) g(m) dm = 0.$$

Niech  $\hat{x}_0$  będzie estymatorem nieobciążonym, spełniającym ten warunek.

W przypadku, gdy  $n > 1$ , a więc gdy pobieramy próbkę więcej niż z jednego miejsca produktu, warunek (6.3) nie wystarcza dla jednoznacznego wyznaczenia wektora  $\alpha$ , a tym samym nie wyznacza jednoznacznie estymatora  $\hat{x}_0$ .

W dalszych rozdziałach pracy zajmiemy się sformułowaniem następujących warunków, pozwalających na całkowite wyznaczenie poszukiwanego wektora  $\alpha$ .

7. Przyjmijmy, że każde błędne oszacowanie wartości średniej  $\bar{x}$  powoduje powstanie pewnej straty. Niech

$$(7.1) \quad w = (\hat{x} - \bar{x})^2$$

będzie stratą, spowodowaną błędnym oszacowaniem wartości średniej badanej właściwości.

Wartość tej straty będzie w każdorazowym badaniu zależna od realizacji  $m$  zmiennej losowej  $M$  i od przyjętego wektora  $\alpha$ . Zażądamy, żeby wartość oczekiwana straty ze względu na parametr  $m$  była możliwie najmniejsza ze względu na wybrany wektor  $\alpha$ .

Tak więc chcemy znaleźć taki wektor  $\alpha$ , żeby oczekiwana strata

$$(7.2) \quad E(w) = \int_Q w g(m) dm$$

osiągnęła minimum.

Warunek minimum dla (7.2) wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia wektora  $\alpha$ , a tym samym i estymatora  $\hat{x}$ . Warunek ten odpowiada warunkowi na najefektywniejszy estymator.

Przyjęcie tak zdefiniowanej straty i warunku minimum dla (7.2) zakłada, że wielkości błędów różniące się jedynie znakiem mają tę samą wartość. Założenie to jest rozsądne przede wszystkim w takich przypadkach, kiedy od wyniku oceny statystycznej zależy zapłata za produkt. W przypadkach, w których niedoszacowanie wartości średniej pociąga za sobą większą stratę niż jej przeszacowanie (lub odwrotnie), należy zmienić warunek minimum dla (7.2) wprowadzając doń funkcję wagową. Na przykład można zażądać, żeby

$$\int_Q \alpha w g(m) dm = \min,$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \bar{x} - \hat{x}_0 \leq 0, \\ c, & \text{jeżeli } \bar{x} - \hat{x}_0 > 0, \end{cases}$$

oraz  $c > 1$  — stała wyrażająca zwiększenie straty w wyniku niedoszacowania w stosunku do straty w wyniku przeszacowania.

W dalszym ciągu niniejszej pracy, przy rozpatrywaniu warunku minimum dla (7.2) będziemy przyjmowali, że założenia wynikające z tego warunku są spełnione.

Warunek (6.3) i warunek minimum dla (7.2) są praktycznie uzasadnione w przypadku, kiedy badania są przeprowadzane wielokrotnie, np. przy stałych dostawach danego produktu do zakładu przetwórczego. Wydają się jednak mało przydatne przy pojedynczych badaniach, związanych np. z pojedynczymi transakcjami.

8. Zajmijmy się teraz określeniem takiego warunku, który byłby bardziej odpowiedni właśnie w przypadkach pojedynczych badań. Pozostawmy jednak w mocy warunek (6.3).

Niech  $d_0$  będzie wartością bezwzględną różnicy między nieobciążonym oszacowaniem średniej a rzeczywistą jej wartością. Tak więc

$$(8.1) \quad d_0 = |\bar{x} - \hat{x}_0|$$

będzie błędem oszacowania średniej za pomocą estymatora  $\hat{x}_0$ .

Jednym z możliwych warunków, jaki możemy przyjąć dla ograniczenia maksymalnej wielkości błędu oszacowania, a tym samym straty, jest warunek minimaksowy.

Zgodnie z nim będziemy poszukiwali takiego wektora  $\alpha$ , żeby maksymalny błąd  $D_0$  ze względu na  $m$  był możliwie najmniejszy ze względu na  $\alpha$ , a więc żeby

$$(8.2) \quad D_0 = \min_{\alpha} \max_m |\bar{x} - \hat{x}_0|.$$

Warunek ten pozwala na górne ograniczenie wielkości błędu, zapewniając jednocześnie, że ograniczenie to nie zostanie przekroczone w żadnym badaniu.

Wielkość maksymalnego błędu  $D_0$  można dobierać do żądanych wymagań zwiększając liczbę miejsc, z których pobieramy próbki. Trzeba mieć jednak na uwadze, że zwiększenie liczby  $n$  powoduje wzrost kosztów badania, które mogą nieraz przekroczyć straty wynikające z błędu oszacowania.

Należy tu zauważyć, że dla znalezienia wektora  $\alpha$  spełniającego warunek (8.2) nie jest potrzebna znajomość funkcji rozkładu  $g(m)$ , jeżeli nie będziemy żądali jednoczesnego spełnienia warunku (6.3). Do znalezienia rozwiązania potrzebna jest tylko znajomość kształtu funkcji (4.3) oraz obszaru  $Q$ .

Porównując ze sobą konsekwencje warunku minimum dla (7.2) i warunku (8.2) należy stwierdzić, że pierwszy z nich pociąga za sobą z reguły większą maksymalną wartość błędu niż drugi; drugi natomiast daje wyższą wartość średnią błędu niż pierwszy.

Wybór jednego z warunków powinien zależeć w każdym przypadku od konkretnie istniejącej sytuacji oraz od wymagań, jakie ma spełnić oszacowanie.

9. Dla porównania konsekwencji proponowanych warunków zilustrujemy powyższe rozważania przykładem liczbowym, o znaczeniu wyłącznie dydaktycznym.

Przyjmijmy, że funkcja (4.3) ma postać

$$(9.1) \quad x = f(r; m) = r^m,$$

gdzie  $m$  może przyjmować wartości z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ , obszar  $Q$  jest więc przedziałem.

Jak łatwo sprawdzić, funkcja (9.1) spełnia założenia dotyczące funkcji (4.3).

Przyjmijmy dalej, dla uproszczenia rachunków, że zmienna  $M$  ma rozkład równomierny, a więc funkcją gęstości prawdopodobieństwa jest

$$(9.2) \quad g(m) = 1.$$

Korzystając z wzoru (6.1) znajdujemy, że wartością średnią badanej właściwości jest

$$(9.3) \quad \bar{x} = 1/(m+1).$$

Niech liczba miejsc, z których pobieramy próbki będzie  $n = 3$ , przy czym miejsca te niech będą w odległościach  $r_1 = 0,25$ ;  $r_2 = 0,50$  oraz  $r_3 = 0,75$ .

Estymator  $\hat{x}$  zgodnie z (6.2) i po uwzględnieniu (9.1) będzie miał postać

$$(9.4) \quad \hat{x} = a_1 0,25^m + a_2 0,50^m + a_3 0,75^m.$$

Podstawiając (9.2), (9.4) i (9.3) do warunku (6.3), otrzymujemy

$$(9.5) \quad \int_0^1 \left( a_1 0,25^m + a_2 0,50^m + a_3 0,75^m - \frac{1}{m+1} \right) dm = 0.$$

Stąd, po rozwiązaniu, otrzymujemy następujący związek między składowymi wektora  $\mathbf{a}$ :

$$(9.6) \quad a_3 = 0,7976 - 0,6226a_1 - 0,8301a_2.$$

Przyjmijmy początkowo, że chcemy znaleźć estymator  $\hat{x}_0$  spełniający warunek minimum dla (7.2), a więc taki, żeby wartość oczekiwana straty była najmniejsza. Zatem

$$(9.7) \quad \int_0^1 \left( a_1 0,25^m + a_2 0,50^m + a_3 0,75^m - \frac{1}{m+1} \right)^2 dm = \min.$$



Jako numeryczne rozwiązanie na elektronowej maszynie cyfrowej, po uwzględnieniu zależności (9.6), otrzymujemy

$$(9.8) \quad a_1 = 0,8200, \quad a_2 = -0,6550, \quad a_3 = 0,8308$$

oraz wartość oczekiwaną  $E(w) = 0,00000296$ . Można znaleźć, że maksymalny błąd powstaje przy  $m = 0$ , a więc w przypadku równomiernego rozłożenia się badanej właściwości wewnątrz produktu i wynosi około  $0,4^0/0$ .

Przypuśćmy teraz, że zależy nam na tym, żeby estymator spełniał warunek (8.2), to jest, żeby maksymalny błąd oszacowania był możliwie najmniejszy, a więc

$$(9.9) \quad D_0 = \min_a \max_m \left| a'_1 0,25^m + a'_2 0,50^m + a'_3 0,75^m - \frac{1}{m+1} \right|.$$

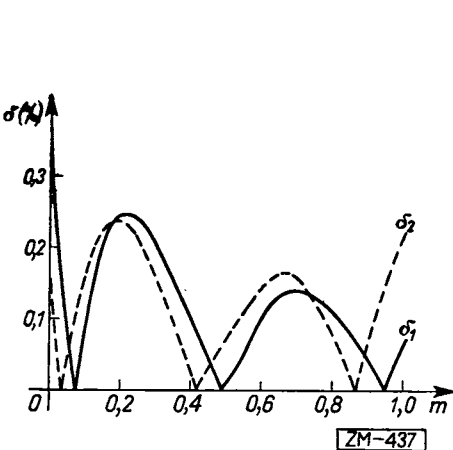
Tak jak i poprzednio, analityczne znalezienie wektora  $a$  jest tu niemożliwe. Numeryczne rozwiązanie na elektronowej maszynie cyfrowej, przy uwzględnieniu zależności (9.6), daje wynik

$$(9.10) \quad a'_1 = 0,874, \quad a'_2 = -0,764, \quad a'_3 = 0,888.$$

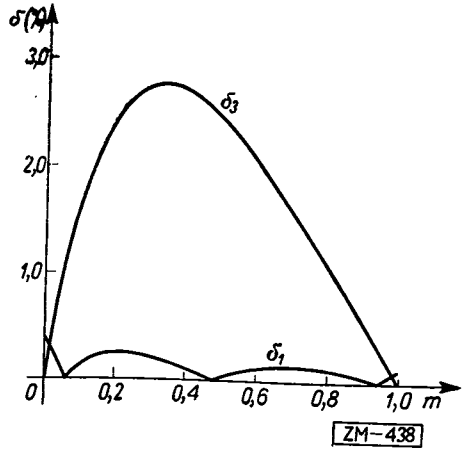
Maksymalny błąd oszacowania wynosi w tym przypadku  $D_0 \approx 0,23^0/0$ , natomiast oczekiwany błąd wynosi nieco powyżej  $0,18^0/0$ .

Traktując błąd oszacowania w obu przypadkach jako bezwzględną wartość różnicy między wartością estymatora a wartością średniej, możemy porównać ze sobą wielkości tych błędów w zależności od wartości parametru  $m$  w chwili badania.

Na rysunku 1 przedstawiono linią ciągłą błąd  $\delta_1$  oszacowania w przypadku przyjęcia współczynników (9.8), a linią przerywaną błąd  $\delta_2$  w przypadku współczynników (9.10).



Rys. 1



Rys. 2

Błąd oszacowania średniej w zależności od parametru  $m$

Jak wynika z tego porównania, obie metody wyznaczania estymatora nie dają w przypadku rozpatrywanego przykładu zbyt wielkich różnic w wielkościach błędów oszacowania.

W praktyce stosuje się nieraz pobieranie próbek z określonych miejsc produktu. Jako estymator przyjmuje się średnią arytmetyczną wartości badanej właściwości w punktach, z których pobrano próbki. Zbadajmy, jakie będą błędy oszacowania w przypadku naszego przykładu, jeżeli przyjmiemy taki właśnie sposób postępowania. Przypuśćmy, że pobieramy trzy próbki z miejsc określonych powyżej i przyjmijmy, że  $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ . Przebieg wartości błędu w takim przypadku (oznaczmy go  $\delta_3$ ), podany jest, w zależności od  $m$  na rysunku 2. Błąd w takim przypadku przyjmuje maksymalną wartość równą około 2,75%. Dla porównania, na tym samym rysunku podano również przebieg błędu  $\delta_1$ .

Z porównania obu przebiegów wynika, że błąd  $\delta_3$ , z wyjątkiem bardzo małych zakresów  $m$ , jest zawsze znacznie większy od  $\delta_1$ .

10. W rozważaniach przyjęliśmy, że pomiar właściwości w próbce daje faktyczną jej wartość. Przypadki takie jednak rzadko spotyka się w praktyce. Z reguły metoda pomiarowa obciążona jest błędami przypadkowymi. Wobec tego, wartości błędów będą zazwyczaj większe, niż to wynikałoby z obliczeń. Błędy wynikające z niedokładności metod pomiarowych występują przy każdym oszacowaniu, bez względu na jego metodę. Całkowite ich wyeliminowanie jest w większości przypadków praktycznie niemożliwe. Można jednak zmniejszyć je przez kilkakrotny pomiar tej samej próbki, bądź przez pobieranie kilku próbek z tej samej odległości i przyjęcie średniej arytmetycznej z wartości pomiarów za wartość właściwości w danej odległości. Liczbę powtórzeń pomiarów bądź liczbę próbek pobieranych z danej odległości można wyznaczyć znanymi powszechnie metodami statystycznymi w zależności od wielkości błędów metody pomiarowej i żądanej precyzji pomiaru.

#### Prace cytowane

[1] J. Oderfeld, *Powierzchnie o wilgotności średniej*, Zastosow. Mat. 4 (1959), str. 341-349.

[2] P. Mikulski, W. Rudzki i K. Wiśniewski, *Badanie właściwości średnich towarów bezkształtnych pakowanych w prostopadłościennne bele*, Zastosow. Mat. 4 (1959), str. 332-340.

[3] W. Rudzki, *Dokładność oceny właściwości średniej produktów bezkształtnych*, Zastosow. Mat. 6 (1961), str. 7-17.

[4] — *Szacowanie właściwości średnich produktów bezkształtnych*, Zastosow. Mat. 6 (1962), str. 235-248.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca wpłynęła 15. 12. 1961*

В. РУДЗКИ (Варшава)

*КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ БЕСФОРМЕННЫХ РАССЛАИВАЮЩИХСЯ  
ИЗДЕЛИЙ*

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются оценки среднего значения некоторого свойства исследуемых изделий, расслаивающихся с точки зрения этого свойства.

Расслаивание изделий может происходить или самопроизвольно с течением времени, или под воздействием внешних причин, как например среды или механических толчков во время транспортировки.

Рассматриваются случаи неполного расслоения во время испытаний и степень этого расслоения неизвестна исследователю.

Предполагаем известным вид функции, описывающей разложение исследуемого свойства, при условии определенного свойства опробования.

В заключении представлено (на примере) сравнение расчетных ошибок, предлагаемых методов и оценочных ошибок методов, применяемых до настоящего времени.

---

W. RUDZKI (Warszawa)

*SAMPLING OF SHAPELESS PRODUCTS UNDERGOING DELAMINATION*

SUMMARY

The subject of the paper are the estimators of the mean value of a certain characteristic of products undergoing delamination with regard to that characteristic.

Delamination of the product can occur either spontaneously with time or under the influence of certain external causes, such as the action of the environment or shocks during transport.

The author considers cases in which at the moment of inspection delamination is not complete and its degree is not known to the investigator.

It is assumed that we know the type of the function describing the distribution, caused by delamination, of the characteristic under investigation in the product.

The author gives the estimators of the mean value of the characteristic in question for a definite method of taking the sample.

Finally he draws a comparison (on an example) between the errors of estimation conducted by the proposed methods and the errors of assessment by the methods hitherto applied.

---