A. ZIĘBA (Wrocław)

ELEMENTARNA TEORIA POŚCIGU

Wstęp

Praca niniejsza jest poświęcona zagadnieniu, które już dawno postawił H. Steinhaus[1]).

Przypuśćmy, że na nieograniczonej płaszczyźnie znajdują się dwa statki, z których jeden S ściga drugi statek U. Chodzi o to, jaką metodę pościgu powinien stosować statek ścigający, aby schwytać uciekającego w czasie możliwie krótkim, oraz o to, jaką metodę ucieczki powinien stosować uciekający, aby zagwarantować sobie możliwie długi czas ucieczki. Zakładamy, że statek ścigający ma większą prędkość od statku uciekającego.

Najlepszą metodą pościgu jest, jak zauważył Steinhaus, pościg w kierunku uciekającego, najlepszą metodą ucieczki jest ucieczka od ścigającego. Wyjaśnienie, co należy rozumieć przez *najlepszą* metodę, znajdzie czytelnik w teoretycznej części naszej pracy. Przy założeniu pierwszej części tezy prawdziwość drugiej wynika z tego, że wtedy różnica rzutów prędkości statków na prostą je łączącą jest minimalna (zatem uciekający nie ma lepszej metody ucieczki), prawdziwość zaś pierwszej części tezy wynika z tego, że, jak łatwo zauważyć (również rzutując prędkości), gdy uciekający stosuje powyższą metodę ucieczki, nie ma lepszej metody pościgu niż przedstawiona w tezie twierdzenia.

Przypuśćmy teraz, że dwa statki mają schwytać trzeci na otwartym morzu. Zakładamy, że statki obserwują się wzajemnie, tzn. że każdy zna położenie każdego w każdej chwili, oraz że każdy z nich zna największą możliwą prędkość swoją i pozostałych.

Chodzi o to, jak mają płynąć statki ścigające, aby schwytać statek uciekający jak najwcześniej, i o to, jak powinien płynąć statek uciekający, aby został schwytany jak najpóźniej. Przez

---

[1]) H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*, Złota Myśl Akademicka, Lwów 1927.

schwytanie rozumiemy schwytanie statku co najmniej przez jeden ze ścigających statków.

Pościg jest grą. Niejednokrotnie w historii matematyki gry były punktem wyjścia nawet bardzo poważnych teorii matematycznych, jak np. rachunku prawdopodobieństwa, który znalazł później olbrzymie zastosowanie w statystyce, w przemyśle, w fizyce itd. umożliwiając osiągnięcia nieporównywalnie większe od tych, jakich można się było spodziewać po teorii gier hazardowych.

Teoria pościgu jest teorią nową i trudno dziś przewidzieć jej dalszy rozwój. W każdym razie trzeba zwrócić uwagę na fakt, że wiele podstawowych zjawisk ekonomicznych i biologicznych ma, z matematycznego punktu widzenia, cechy gry pościgowej. Odnosi się to nie tylko do zjawisk, w których występują elementy antagonistyczne (strony przeciwne), ale i takich, w których partnerzy współpracują.

Rozważanie tak ogólnego problematu byłoby w tej chwili przedwczesne i dlatego będziemy mówić o pościgu w potocznym intuicyjnym znaczeniu, tzn. o takim, z jakim mają do czynienia chłopcy na boisku, okręty na morzu, czy myśliwi na polowaniu. Jednak trzeba pamiętać, że jest to ilustracja na prostym przykładzie o wiele ogólniejszego zagadnienia matematycznego, taka, jak przykład urn napełnionych kulami białymi i czarnymi na pierwszej stronicy książki o rachunku prawdopodobieństwa.

Rozważania matematyczne nad teorią pościgu są dosyć żmudne i skomplikowane. Dlatego czytelnikowi, którego interesują raczej jej zastosowania, podajemy na wstępie główne wyniki teorii pościgu i ich zastosowania na przykładach.

Precyzyjne, matematyczne definicje występujących tu pojęć znajdują się na początku dalszej części pracy, przeznaczonej dla czytelników interesujących się matematyczną stroną teorii pościgu.

Przypuśćmy, że mamy dwa statki S i U o prędkościach v_s i v_u i współrzędnych (x_s, y_s) i (x_u, y_u). Rozważmy zbiór punktów, z których każdy ma tę własność, że gdyby statki S i U równocześnie zaczęły płynąć w jego kierunku, to przypłynęłyby do niego równocześnie. Niech taki punkt ma współrzędne (x, y). Wtedy jego odległości od statków S i U wynoszą

$$\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{(x-x_u)^2+(y-y_u)^2},$$

a czasy t_s i t_u potrzebne na osiągnięcie go przez statki S i U wyrażą się wzorami

$$t_s = \frac{\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}}{v_s}, \qquad t_u = \frac{\sqrt{(x-x_u)^2+(y-y_u)^2}}{v_u}.$$

Ponieważ z definicji punktu (x,y) czasy te są równe, więc

$$\frac{\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}}{v_s} = \frac{\sqrt{(x-x_u)^2+(y-y_u)^2}}{v_u},$$

czyli

$$\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}\cdot v_u = \sqrt{(x-x_u)^2+(y-y_u)^2}\cdot v_s,$$

tzn.

$$x^2(v_u^2-v_s^2) - 2x(x_s v_u^2 - x_u v_s^2) + x_s^2 v_u^2 - x_u^2 v_s^2 +$$
$$+ y^2(v_u^2-v_s^2) - 2y(y_s v_u^2 - y_u v_s^2) + y_s^2 v_u^2 - y_u^2 v_s^2 = 0.$$

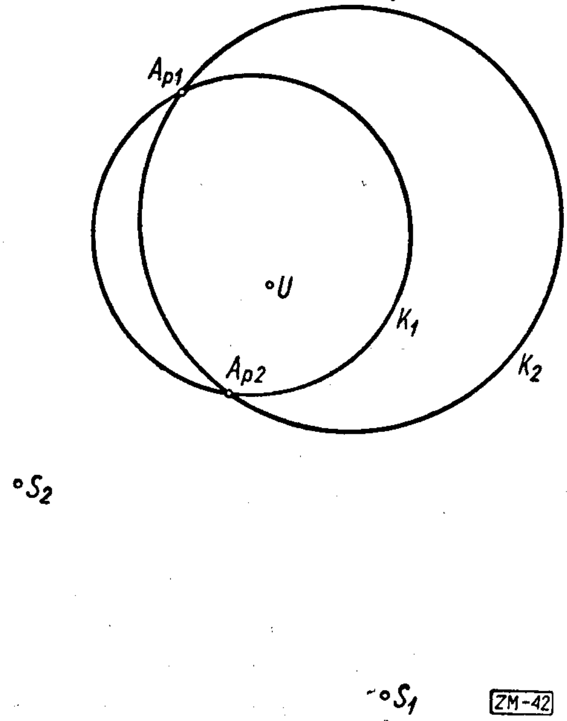
Wynika z tego, że rozważany zbiór punktów jest kołem, bo współczynniki przy x^2 i y^2 są równe i nie ma wyrazu zawierającego iloczyn xy. Środek tego koła leży na jednej prostej ze statkami nie przedzielając ich, bliżej tego ze statków, który ma mniejszą prędkość. Koło to nazwiemy *kołem Apolloniusza* statków S i U. Statek mający mniejszą prędkość leży wewnątrz tego koła, pozostały — zewnątrz.

Przypuśćmy, że mamy dwa statki S_1 i S_2, które mają schwytać trzeci statek U o mniejszej od nich prędkości. Pytamy o najlepszą metodę pościgu i o najlepszą metodę ucieczki w sensie uprzednio określonym.

Wykreślmy koła Apolloniusza statków S_1 i U oraz S_2 i U. Koła te przetną się na ogół w dwóch punktach, które nazwiemy punktami Apolloniusza (por. rys. 1).

Podstawowe twierdzenie teorii pościgu orzeka, że najlepszą metodą pościgu jest skierowanie się obu ścigających na dalszy punkt Apolloniusza, a najlepszą metodą ucieczki jest również podążanie w kierunku dalszego punktu Apolloniusza.

Zauważmy, że punkt Apolloniusza zależy od położenia statków ścigających i uciekającego, a jeśli będzie się zmieniał w czasie, wówczas tor zakreślony przez statek stale kierujący się na niego nie będzie prostoliniowy. Można jednak wykazać, że jeśli obie strony (ścigająca i uciekająca) stosują najlepsze metody pościgu, punkt Apolloniusza jest w czasie niezmienny i torami statków są proste.



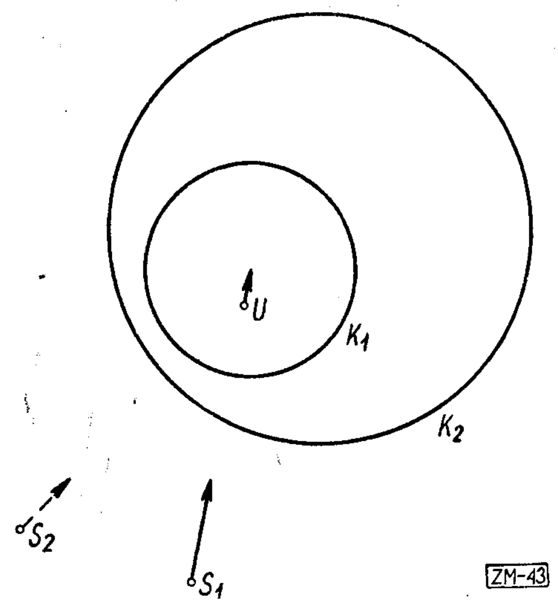
Rys. 1

Twierdzenie to wymaga jednak pewnych komentarzy. Po pierwsze, może się zdarzyć, że koła Apolloniusza odpowiadające parom S_1U i S_2U nie przecinają się. Wtedy jedno koło leży wewnątrz drugiego (rys. 2); zewnątrz siebie nie mogą leżeć, gdyż punkt, w którym znajduje się uciekający U leży wewnątrz obu tych kół. Wówczas najlepszą metodą ucieczki jest ucieczka przed tym statkiem, któremu odpowiada koło wewnętrzne, w kierunku od niego, nie licząc się zupełnie z drugim statkiem ścigającym, a najlepszą metodą pościgu jest pościg dokładnie w kierunku uciekającego.

Po drugie, gdy uciekający znajduje się na odcinku łączącym ścigających, oba punkty Apolloniusza są równoodległe od każdego statku, co stanowi nową trudność. Najlepszą metodą ucieczki jest wówczas ucieczka w kierunku któregokolwiek z nich. Dokładnej, najlepszej metody pościgu wtedy nie ma. Ścigający muszą chwilę Δt jechać w kierunku uciekającego i, jeśli uciekający w ciągu tego czasu opuści łączącą je prostą, płynąć w kierunku teraz już jednoznacznie wyznaczonego punktu Apolloniusza. Jeśli uciekający nie opuści tej prostej, ścigający powinni płynąć przez następną chwilę Δt w kierunku uciekającego; jeśli po upływie tej następnej chwili uciekający nie znajduje się na prostej łączącej ścigających — skierować się na punkt Apolloniusza; jeśli uciekający wciąż jeszcze znajduje się na prostej, o której mowa, znowu przez czas Δt płynąć w jego kierunku itd., póki uciekający nie opuści prostej lub nie zostanie schwytany.

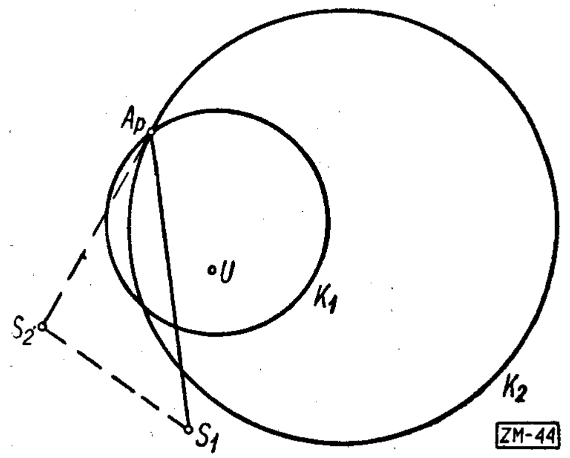
Taka metoda pościgu, gdy przyjąć Δt dostatecznie małe, gwarantuje ścigającym czas dowolnie bliski pewnego czasu granicznego którego jednak dokładnie żadna metoda im nie zagwarantuje.

Jednak tym przypadkiem, jako wyjątkowym, nie będziemy się na razie zajmowali, tym bardziej, że prawdziwe jest twierdzenie, iż jeżeli wspomnianej współliniowości nie było na początku pościgu, to nie może się ona zdarzyć i później, jeśli obie strony stosują poprawne metody. Uciekający doprowadzając do współliniowości ponosi przez to większą stratę od zysku, wynikającego dla niego z kłopotu, jaki ścigającym sprawia wspomniana współliniowość.



Rys. 2

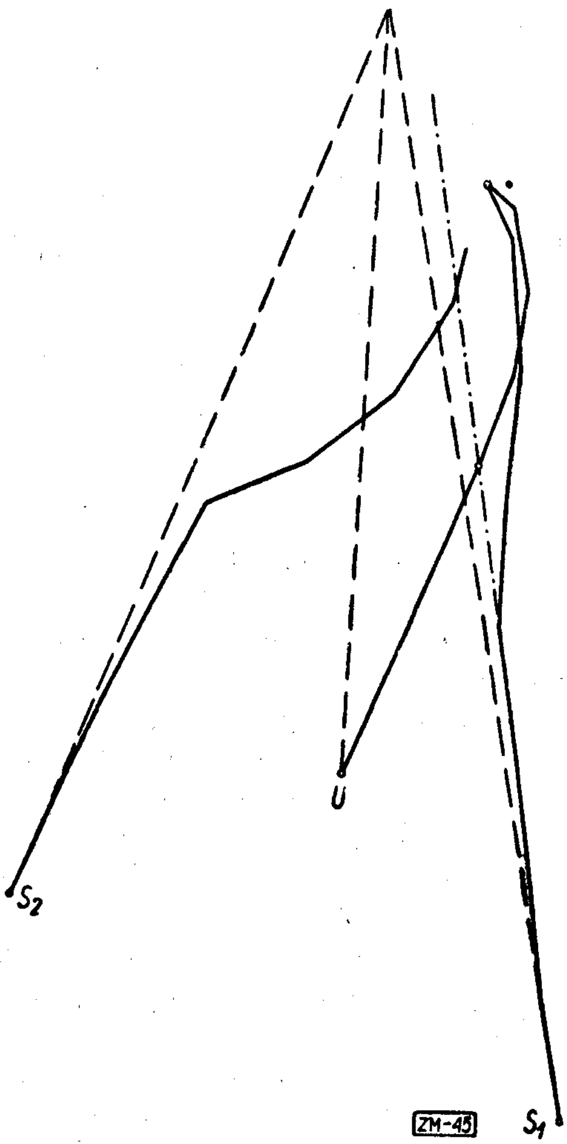
Po trzecie, jeśli narysujemy trójkąt Apolloniusza, wyznaczony przez położenia obu statków ścigających i punkt Apolloniusza, statek uciekający zaś leży poza tym trójkątem (rys. 3), to, jak poprzednio, najlepsza metoda ucieczki redukuje się do ucieczki przed jednym statkiem nie licząc się z drugim, a mianowicie przed tym, który ma tę własność, że prosta łącząca go z punktem Apolloniusza oddziela uciekającego od drugiego ścigającego statku. Najlepszą metodą pościgu jest pościg w kierunku uciekającego.



Rys. 3

Przejdźmy teraz do przykładów.

Przypuśćmy, że dwa współdziałające okręty, krążownik S_1 o szybkości 30 węzłów i lekki krążownik S_2 o szybkości 25 węzłów, odległe od siebie o 14 mil zauważyły nieprzyjacielski kontrtorpedowiec znajdujący się w odległości 10 mil od krążownika S_1 i 8 mil od lekkiego krążownika S_2 (rys. 4). Krążowniki rozpoznawszy po typie przeciwnika jego największą prędkość (20 węzłów) wyznaczyły punkt Apolloniusza i rozpoczęły pościg najlepszą metodą, tj. skierowały się z największą możliwą prędkością na punkt Apolloniusza. Kontrtorpedowiec również zauważył i rozpoznał przeciwników i zaczął uciekać metodą, która jemu *wydała się* najlepszą, a mianowicie prostopadle do prostej łączącej ścigających w kierunku od niej.

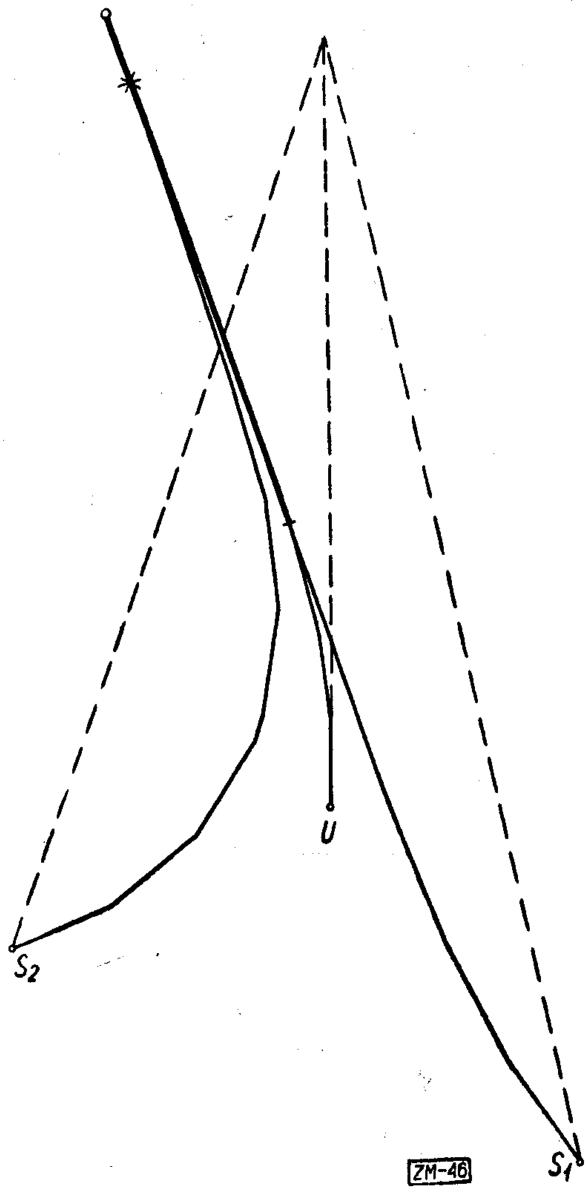


Rys. 4

Rys. 4 przedstawia tory pościgu i ucieczki odpowiadające takim metodom pościgu i ucieczki (z niewielkimi niedokładnościami powstałymi przez wyznaczenie punktu Apolloniusza co pewien krótki czas zamiast bez przerwy — stąd załamania torów).

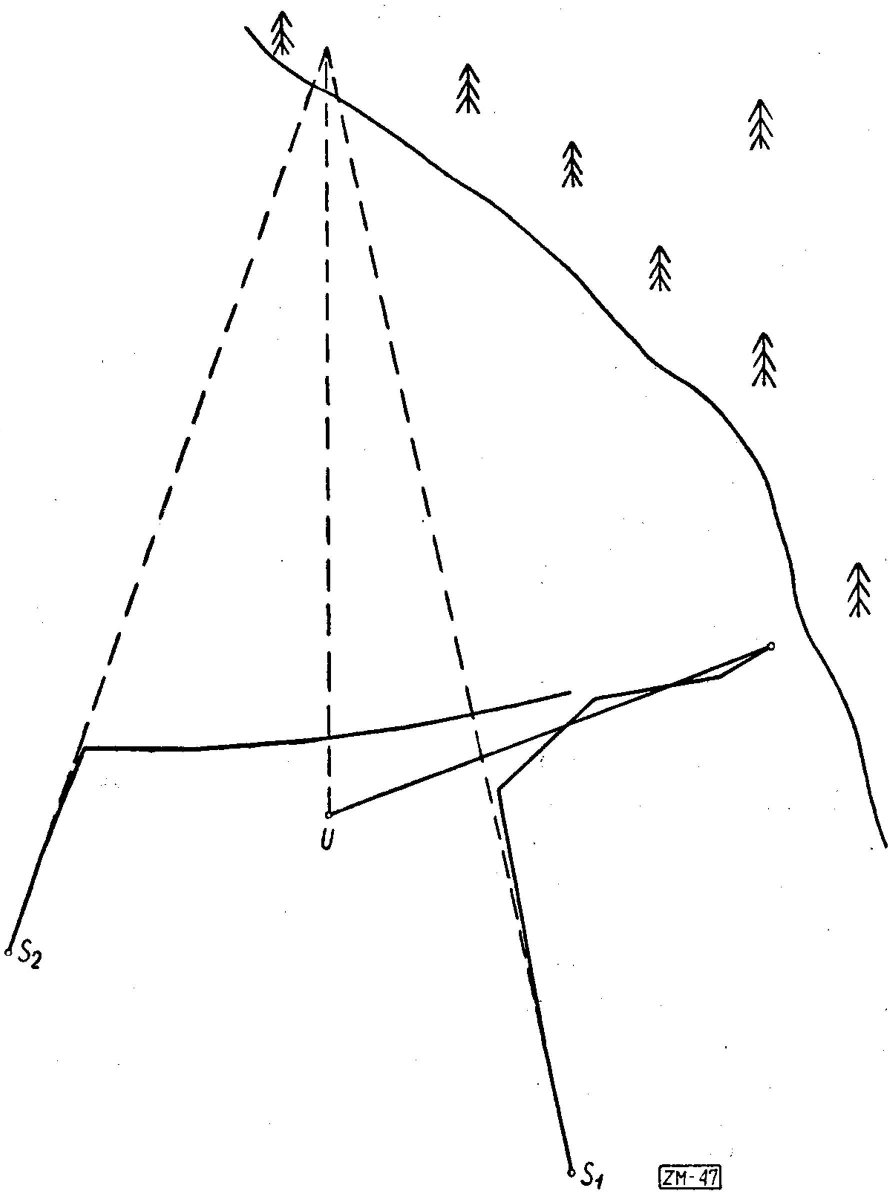
Linia przerywana (kreska kropka) przedstawia jeden z aktualnie wyznaczonych boków trójkąta Apolloniusza, mianowicie ten, przez który kontrtorpedowiec wyjechał z wnętrza trójkąta Apolloniusza. Z chwilą przejścia uciekającego przez tę linię, ścigający rozpoczęli, zgodnie z przepisem najlepszej metody pościgu, pościg w kierunku uciekającego. Tory pościgu i ucieczki może czytelnik porównać z torami, jakie powstałyby, gdyby uciekający stosował najlepszą metodę ucieczki, kierując się na punkt Apolloniusza. Tory te, jak i na dalszych rysunkach, zaznaczone są liniami przerywanymi.

Rys. 5 przedstawia sytuację odwrotną, kiedy uciekający stosuje najlepszą metodę ucieczki, a ścigający płyną stale w jego kierunku, zamiast na punkt Apolloniusza. Tłustą linią oznaczono tę część toru uciekającego, która powstała po wyjściu uciekającego z trójkąta Apolloniusza, przez stosowanie (zgodnie z przepisami najlepszej metody ucieczki) metody ucieczki przed jednym statkiem (S_1) nie licząc się zupełnie z drugim (S_2). Trzeba zaznaczyć, że zmiana metody następuje w chwili, gdy uciekający znajduje się na boku trójkąta Apolloniusza; wtedy obie metody zbiegają się i prędkość statku uciekającego nie doznaje nieciągłości (podobnie rzecz się ma ze zmianą metody pościgu w przypadku, gdy ścigający stosują najlepszą metodę pościgu). Gwiazdką oznaczono punkt, w którym znajduje się krążownik S_1 w chwili, gdy krążownik S_2 złapał uciekającego (w punkcie oznaczonym kółeczkiem).



Rys. 5

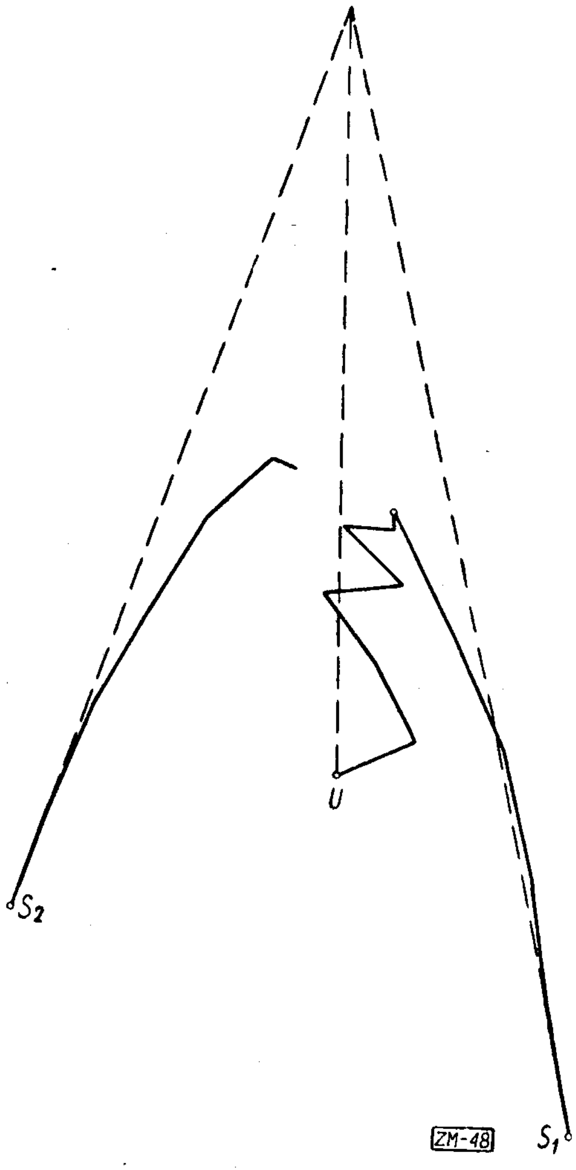
Podamy jeszcze dwa przykłady, których charakter odpowiada polowaniu: dwóch jeźdźców będzie polowało na lisa. Dla zachowania jednak porównywalności z poprzednimi rysunkami przyjmiemy, że odległości i prędkości jeźdźców i lisa są proporcjonalne do poprzednich odległości i prędkości statków. Niech jeździec S_1 ma prędkość 15 km/godz., S_2 — 12,5 km/godz., a lis 10 km/godz. Odległość między jeźdźcami niech wynosi 1400 m, między lisem a jeźdźcami zaś kolejno 1000 m i 800 m.



Rys. 6

Jeźdźcy i lis znajdują się na polu; w pewnej odległości (patrz rys. 6) przebiega linia lasu. Lis stara się uciec do lasu i rzuca się z całą prędkością ku najbliższym drzewom. Jeźdźcy stosują poprawną, najlepszą metodę pościgu. Tory pościgu, zaznaczone na rysunku liniami ciągłymi można porównać z torami (linie przerywane), jakie powstałyby, gdyby obie strony stosowały najlepsze metody.

I wreszcie rysunek 7 przedstawia drugi przypadek pościgu lisa metodą najlepszą. Lis, któremu się wydaje, że ten jeździec jest dla niego groźniejszy, który znajduje się bliżej, ucieka przed bliższym, w kierunku od niego, nie licząc się z dalszym dopóki ten z kolei nie stanie się bliższym. Co robi lis, gdy obaj ścigający są od niego równoodlegli, jest obojętne, bo w sytuacji przedstawionej na rysunku przypadek taki zdarzał się tylko momentami, nie trwał nigdy przez czas dłuższy od zera. Ponieważ jeźdźcy stawali się na przemian bliższymi, lis biegł zygzakiem.



Rys. 7

Część I. Podstawowe twierdzenie teorii pościgu

Przejdziemy teraz do samej teorii pościgu. Jak już wspominaliśmy na wstępie, sytuacja współliniowości obu ścigających i uciekającego wymaga swoistych metod, których wprowadzenie od razu, zaciemniłoby rozważania w sposób istotny. Dlatego wprowadzamy chwilowo sztuczne założenie, że współliniowość nie może się zdarzyć.

Określenia i oznaczenia[1]. *Metodą pościgu (ucieczki)* danego statku nazywamy funkcję wektorową, której argumentami są współrzędne statków ścigających i uciekającego oraz bezwzględne wartości ich maksymalnych prędkości. Wartości funkcji są wektorami i mają moduły nie większe niż maksymalna prędkość danego statku, a przedstawiają wielkość i kierunek prędkości, z jaką statek stosujący tę metodę powienien płynąć.

Czasem gwarantowanym przez metodę pościgu S^1 (przez metodę pościgu należy rozumieć zespół metod pościgu obu statków) nazywam kres górny $T(S^1)$ takich czasów t, że stosując metodę S^1, schwytam uciekającego w czasie t (t zależy od stosowanej metody ucieczki).

W badanych dalej przypadkach istnieje taka metoda ucieczki, że pościg trwa dokładnie $T(S^1)$.

Analogicznie, czasem gwarantowanym przez metodę ucieczki U^1 nazywam kres dolny $T(U^1)$ takich czasów t, że uciekający stosując metodę U^1 zostanie schwytany w czasie t. W badanych przypadkach istnieje zazwyczaj taka metoda pościgu, że pościg trwa dokładnie $T(U^1)$.

Metodę S^1 nazywam *najlepszą metodą pościgu*, jeśli $T(S^1) = \inf T(S^i)$, gdzie S^i przebiega zbiór wszystkich metod pościgu.

Metodę U^1 nazywam *najlepszą metodą ucieczki*, jeżeli $T(U^1) = \sup T(U^i)$, gdzie U^i przebiega zbiór wszystkich metod ucieczki.

Odległością czasową punktu od statku nazywam czas potrzebny do przepłynięcia przez statek odcinka prostego, łączącego go z tym punktem.

Kołem Apolloniusza dwóch statków nazywam zbiór punktów równoodległych czasowo od tych statków; zależy ono oczywiście od położenia i prędkości statków. Z łatwego rachunku wynika, że koło Apolloniusza na płaszczyźnie jest kołem, w przestrzeni trójwymiarowej kulą itd.

I. Trzy koła Apolloniusza odpowiadające trzem (tj. wszystkim możliwym) parom statków, wybranych spośród trzech statków, przecinają się co najwyżej w dwóch punktach.

Wynika to od razu z tego że równoodległość czasowa jest przechodnia.

Punkty te nazywam *punktami Apolloniusza.*

Trójkątem Apolloniusza statków S_1, S_2, U_1 nazywam trójkąt wyznaczony przez położenie ścigających i dalszy z dwóch punktów Apolloniusza.

II. Dwa punkty leżące na kole, równoodległe od dowolnego trzeciego, są symetrycznym odbiciem jeden drugiego względem prostej przechodzącej przez środek koła i punkt, od którego są równoodległe.

III. Dwa punkty nie mogą być wzajemnym symetrycznym odbiciem względem dwóch różnych prostych.

IV. Jeżeli dwa punkty Apolloniusza są równoodległe od któregoś ze statków, to są równoodległe od każdego z pozostałych.

Z powyższych elementarnych uwag wynika, że jeżeli istnieją dwa punkty Apolloniusza i są równoodległe od któregoś ze statków, to wszystkie trzy statki muszą leżeć na jednej prostej.

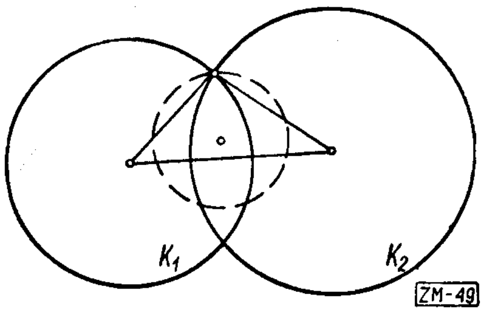
Wyłączając więc sytuację współliniowości nadajemy jednoznaczność pojęciu dalszego z punktów Apolloniusza (odległość mierzymy od któregokolwiek statku).

TWIERDZENIE 1. *Najlepszą metodą pościgu jest pościg w kierunku na dalszy z punktów Apolloniusza.*

Najlepszą metodą ucieczki jest ucieczka w kierunku na dalszy z punktów Apolloniusza.

Do dowodu tego podstawowego twierdzenia użyjemy kilku twierdzeń pomocniczych z teorii pościgu i geometrii elementarnej.

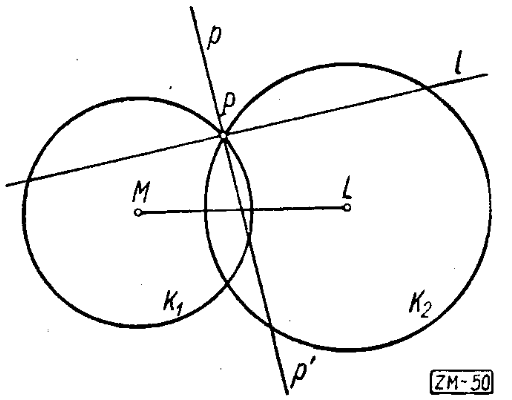
Lemat 1. Niech będą dane dwa przecinające się koła (rys. 8). Oznaczmy odpowiednio przez K_1 i K_2 obie tarcze wraz z brzegiem.



Rys. 8

Na to, by koło przechodzące przez punkt przecięcia obydwóch kół leżało całkowicie w obszarze K_1+K_2 potrzeba i wystarcza, żeby jego środek leżał wewnątrz lub na brzegu trójkąta wyznaczonego przez punkt przecięcia, o którym mowa, i środki obydwóch kół.

Łatwy dowód tego lematu opiera się na uwadze, że jeżeli jakaś prosta l przechodząca przez punkt P przecięcia kół K_1 i K_2 leży w pewnym jego otoczeniu wewnątrz kół K_1 i K_2, to normalna p wystawiona do niej w punkcie P zawiera się w kącie między promieniami MP i LP kół K_1 i K_2 (rys. 9). Stąd dalej, również z elementarnej własności kół, wynika, że środek koła K_3 zawartego wewnątrz K_1+K_2 i przechodzącego przez punkt P również leży w tym kącie. Poniżej prostej ML nie może on leżeć, gdyż wówczas drugi punkt przecięcia kół K_1 i K_2, symetryczny do P, byłby do niego bliższy, a zatem byłby on punktem wewnętrznym koła K_3, co jest niemożliwe, bo jest on punktem brzegowym obszaru K_1+K_2 zawierającego koło K_3.

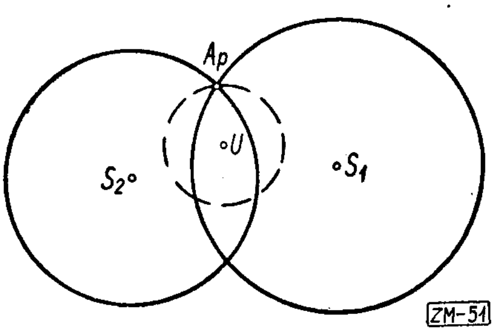


Rys. 9

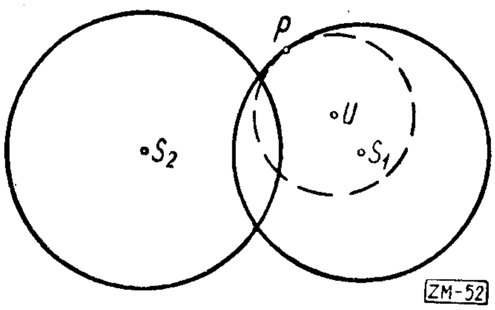
Łatwo już teraz wprowadzić elementarne, ale nader ważne

TWIERDZENIE 2. *Uciekający albo znajduje się wewnątrz trójkąta Apolloniusza, albo zagadnienie pościgu sprowadza się do pościgu statku jednym statkiem.*

Dowód wynika z lematu 1, jeśli zwrócimy uwagę na następującą interpretację punktu Apolloniusza: Wyobraźmy sobie, że każdy statek jest środkiem koła rozszerzającego się z prędkością równą prędkości danego statku. Dalszy z punktów Apolloniusza jest tym punktem koła o środku w miejscu statku uciekającego, który ostatni zostanie trafiony przez co najmniej jedno z rozszerzających się kół o środkach w statkach ścigających i który leży na ich przecięciu (rys. 10). Te ostatnie koła należy przyjąć za zadane w lemacie 1 (A, B), zaś koło, którego środkiem jest statek uciekający, za pozostałe, o którym mowa w lemacie.



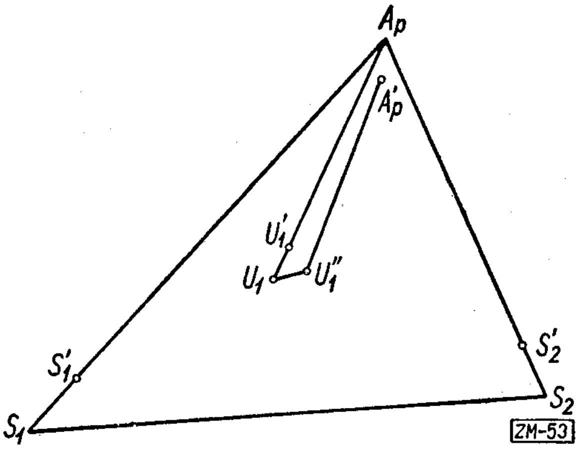
Rys. 10



Rys. 11

Gdyby punktu Apolloniusza nie było, lub gdyby statek uciekający leżał poza trójkątem Apolloniusza, to w powyższej interpretacji znaczyłoby, że koło rozszerzające się wokół statku uciekającego zostanie w pewnej chwili objęte całkowicie przez koło rozszerzające się wokół jednego ze statków ścigających, przy tym ich punkt styczności będzie leżał zewnątrz koła rozszerzającego się wokół drugiego ze statków ścigających (rys. 11). (Gdyby statek uciekający uciekał przed S_1, nie licząc się zupełnie z S_2, i został schwytany jakimś sposobem wcześniej przez S_2 niż przez S_1, to S_2, mający większą prędkość niż U, mógłby dopłynąć do punktu P przecięcia kół, szybciej niż S_1, co jest niemożliwe, jak wynika od razu z definicji rozszerzających się kół i prawa trójkąta.)

TWIERDZENIE 3. Założenie: *Statek uciekający znajduje wewnątrz trójkąta Apolloniusza (w całej teorii pościgu będziemy to zakładali wobec tw.* 2); *statek uciekający wie, że oba statki ścigające będą, przez czas* Δt *taki, że uciekający (jadąc jakkolwiek) nie może w czasie* Δt *opuścić trójkąta* $S_1S_2A_p$, *płynęły na punkt Apolloniusza po odcinkach* S_1S_1', S_2S_2' (*rys.* 12), *a on sam może przebyć bądź to w kierunku punktu Apolloniusza odcinek* U_1U_1' *bądź też pewien inny, tej samej długości, odcinek* U_1U_1'' (*odcinki* S_1S_1', S_2S_2', U_1U_2' *są proporcjonalne do prędkości statków* S_1, S_2, U_1).

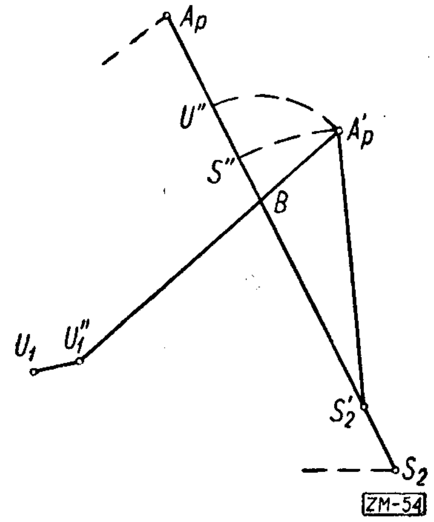


Rys. 12

Teza: *Odległość uciekającego od punktu Apolloniusza w drugim przypadku będzie mniejsza niż w pierwszym*: $U_1'A_p > U_1''A_p'$ (*lub* $S_2'A_p > S_2'A_p'$) (po czasie Δt mamy inny punkt Apolloniusza A_p' odpowiadający S_1', S_2', U_1'').

Dowód. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas nowy punkt Apolloniusza nie może leżeć poza starym trójkątem Apolloniusza. Przypuśćmy bowiem, że leży poza trójkątem (rys. 13). U_1 i U_1'' leżą z założenia wewnątrz trójkąta $S_1S_2A_p$. Niech B oznacza punkt przecięcia prostych $U_1''A_p'$ i S_2A_p (ewentualnie S_1A_p).

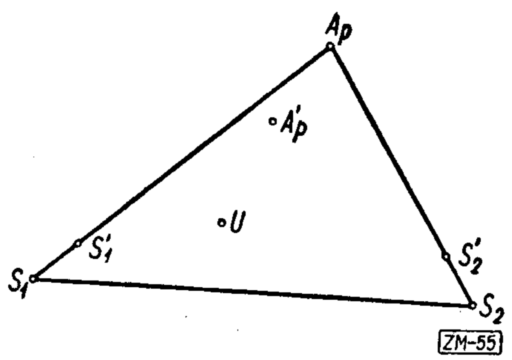
Ponieważ $U_1''A_p' < S_2'A_p'$, więc tym bardziej $BA_p' < S_2'A_p'$. Z prawa trójkąta wynika, że $S_2'B + BA_p' > S_2'A_p$. Jeśli więc odłożyć z punktu S_2 na prostej S_2A_p odcinki o długości $S_2'B + BA_p'$ i $S_2'A_p'$ i końce ich oznaczyć przez U'' i S'', to punkt U'' będzie leżał dalej od S_2' niż S'' od S_2'. Zatem uciekający może znaleźć się w U'' w tym samym czasie, co ścigający w S'', i być jeszcze od niego w dodatniej odległości, co wobec $S_2'A_p' = S_2'S'' > S_2'A_p$ jest niemożliwe, bo ścigający płynąc po prostej, musi, w czasie późniejszym niż ten, w którym znalazł się w punkcie Apolloniusza, być dalej od swojego pierwotnego położenia niż uciekający, znajdujący się na prostej S_2A_p od pierwotnego położenia ścigającego.



Rys. 13

Jeśli nowy punkt Apolloniusza znajduje się wewnątrz trójkąta Apolloniusza (rys. 14), to z elementarnej geometrii wiadomo od razu, że bądź $S_2A_p > S_2'A_p' + S_2S_2'$, bądź $S_1A_p > S_1A_p' + S_1S_1'$. Ponieważ $S_2'A_p' : S_2'A_p' = S_1'A_p' : S_1'A_p = U_1'A_p' : U_1'A_p$, twierdzenie jest udowodnione.

Twierdzenie 4. *Jeśli ścigający stosują metodę pościgu w kierunku punktu Apolloniusza, a uciekający najlepszą metodę ucieczki, to uciekający stale znajduje się w trójkącie Apolloniusza, który zacieśnia się w toku pościgu do punktu.*



Rys. 14

Gdyby bowiem uciekający, który, jak możemy założyć, znajduje się na początku pościgu wewnątrz trójkąta Apolloniusza, znalazł się w czasie jego trwania na brzegu, to zagadnienie zredukowałoby się do pościgu jednego statku przez jeden statek (jak w tw. 2); a więc powinienby zacząć uciekać od ścigającego, czyli po brzegu trójkąta Apolloniusza w kierunku punktu Apolloniusza.

Trójkąt ten w czasie pościgu w kierunku na punkt Apolloniusza zacieśnia się do punktu. Jak bowiem wynika z twierdzenia 3, ścigający (dwa wierzchołki trójkąta) zbliżają się do punktu Apolloniusza (trzeci wierzchołek) z szybkością co najmniej taką, jaką mają względem płaszczyzny, na której odbywa się pościg.

Skoro zaś uciekający stale znajduje się w trójkącie Apolloniusza, zacieśniającym się do punktu, to schwytanie nastąpi w punkcie Apolloniusza.

Łatwo już teraz udowodnić twierdzenie podstawowe.

Z twierdzenia 4 wynika, że gdy ścigający płyną na dalszy z punktów Apolloniusza, schwytanie nastąpi w aktualnym punkcie Apolloniusza; z twierdzenia 3 wynika, że punkt Apolloniusza przybliża się do uciekającego najwolniej, gdy ten płynie w jego kierunku.

A zatem żadna metoda ucieczki nie może gwarantować czasu lepszego, niż metoda ucieczki w kierunku dalszego punktu Apolloniusza. Z drugiej strony uciekający zawsze ma zagwarantowaną możliwość dopłynięcia do dalszego punktu Apolloniusza, a więc ucieczka na dalszy z punktów Apolloniusza jest najlepszą metodą ucieczki. Wynika stąd od razu, że ścigający nie mogą sobie zagwarantować czasu krótszego niż potrzebny na dopłynięcie do dalszego punktu Apolloniusza; ścigając zaś na dalszy z punktów Apolloniusza, taki czas sobie gwarantują, więc jest to także najlepsza metoda pościgu, c. n. d.

Część II. Współliniowość

Zanim rozpatrzymy trudność, która wiąże się z współliniowością ścigających i uciekającego, dogodnie będzie zbadać pewne nowe zagadnienie.

Zakładaliśmy dotąd, że każdy statek zna w każdej chwili położenie własne, położenie wszystkich pozostałych oraz bezwzględną wartość maksymalnej prędkości każdego statku $(|v_{s_1}|, |v_{s_2}|, |v_{u_1}|)$.

Metodą pościgu (ucieczki) dla statku S_1 (U_1) był zatem układ funkcji przedstawiających składowe jego prędkości w zależności od powyższych argumentów. Rozważmy możliwość dopuszczenia jeszcze jednego argumentu, mianowicie wektora prędkości pozostałych statków. Otóż uczynienie tego po prostu jest niemożliwe, uzależnienie bowiem wektora prędkości jednego statku od wektora prędkości drugiego, i odwrotnie, może doprowadzić do sprzeczności, np. wtedy, gdyby jeden chciał płynąć równolegle do drugiego, podczas gdy drugi usiłowałby płynąć prostopadle do pierwszego. Możliwe jest jednak uczynienie wektora prędkości jednego statku w chwili t funkcją wektora prędkości drugiego w chwili $t-\Delta t$ ($\Delta t>0$, ustalone).

Jeśli statki ścigające otrzymują w każdej chwili t informacje o położeniu i wektorze prędkości statku uciekającego w chwili $t-\Delta t$ i, abstrahując od opóźnienia, przyjmą je za dane odpowiadające chwili t, to rozpoczną pościg fikcyjnego statku, będącego opóźnionym obrazem statku U_1. Obraz ten jednak znajduje się w odległości nie większej niż $(\max v_{u_1})\cdot\Delta t$ od statku U_1. Jeśli więc zastosują najlepszą metodę pościgu względem obrazu, to jeśli w ogóle istnieje jakakolwiek skuteczna (tzn. doprowadzająca do schwytania) metoda pościgu S taka, że czas przez nią gwarantowany jest dowolnie mały, gdy tylko odległość między ścigającymi a uciekającym jest dostatecznie mała[2]), uzyskają tym samym przy dostatecznie małym Δt dowolnie dobrą aproksymację najlepszej metody pościgu statku U_1.

Należy właściwie rozróżnić dwie sytuacje w przypadku nieistnienia najlepszej metody pościgu (analogicznie ucieczki): 1^0 kiedy do każdej metody da się dobrać inną, gwarantującą czas dowolnie krótszy (dłuższy), oraz 2^0, kiedy istnieje kres możliwości poprawy wyniku, którego osiągnąć nie można, ale do którego można się dowolnie zbliżyć. W tym drugim przypadku powiemy, że istnieje najlepsza metoda pościgu (ucieczki) w sensie szerszym.

(Znajdując najlepszą metodę pościgu obrazu statku uciekającego, opóźnionego o Δt, znajduję rodzinę metod pościgu, zależnych od parametru Δt aproksymujących najlepszą metodę w sensie szerszym w przypadku, gdy nawet w zwykłym sensie metoda najlepsza nie istnieje. Z drugiej jednak strony metoda wykorzystująca informacje o wektorach prędkości n i g d y nie może być najlepszą w zwykłym sensie (por. uwagi na wstępie i na końcu niniejszej części) i zawsze mówiąc o niej będziemy mieli na myśli „najlepszość" w szerszym sensie, jeśli nawet tego wyraźnie nie zaznaczymy).

O statku S_i powiemy, że ściga uciekającego U metodą S^1, jeżeli rzut jego prędkości na prostą łączącą go ze statkiem uciekającym jest zgodnie skierowany z wektorem $\overline{S_iU}$, zaś rzuty pręd-

[2]) Metoda taka oczywiście istnieje. Jest nią np. pościg w kierunku uciekającego.

kości ścigającego i uciekającego na prostą prostopadłą do prostej łączącej je są sobie równe.

Metoda S^1 na pewno daje się stosować względem opóźnionego obrazu uciekającego i w tym sensie będziemy mówili o jej stosowaniu.

Banalny, ale potrzebny w dalszej części jest następujący:

Lemat 2. W przypadku pościgu jednego statku przez jeden najlepszą metodą pościgu jest metoda S^1, najlepszą zaś metodą ucieczki dla ściganego metodą S^1 jest ucieczka w kierunku od ścigającego.

Dowód. Stosując metodę S^1 zachowujemy kierunek prostej łączącej statki przez cały czas trwania pościgu. Niech kierunek uciekającego tworzy w pewnej chwili kąt φ z tą prostą. Prędkość zbliżania się do siebie statków wynosi wówczas (zakładamy oczywiście, że prędkość statku ścigającego jest większa od prędkości statku uciekającego):

$$(1) \qquad |v_u|\sqrt{c^2-\sin^2\varphi}-|v_u|\cos\varphi, \qquad \text{gdzie} \qquad c=\left|\frac{v_s}{v_u}\right|>1.$$

Funkcja ta jako ciągła i ograniczona ma ekstremum. Przyrównując pochodną do zera otrzymamy

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{2\sqrt{c^2-\sin^2\varphi}}+\sin\varphi=0.$$

Jedynymi pierwiastkami są $\varphi=k\pi$ $(k=\pm 0,1,2,3,\ldots)$, bowiem (po uproszczeniu przez $\sin\varphi$) otrzymujemy

$$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{c^2-\sin^2\varphi}}+1=0,$$

co jest niemożliwe, gdyż wtedy musiałoby być

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=c^2 \qquad (c>1).$$

Zatem najkorzystniej dla uciekającego jest przyjąć $\varphi=0$ (minimum). W tym przypadku zarówno pościg jak i ucieczka odbędą się po tej samej prostej, przy czym ścigający nie może czasu T gwarantowanego wtedy przez uciekającego w żaden sposób poprawić na swoją korzyść; z drugiej strony łatwo zauważyć, że metoda S^1

gwarantuje ścigającym czas T. Z wzoru (1) po podstawieniu $\varphi=0$ widać od razu, że zarówno dla ścigającego jak i dla uciekającego najkorzystniej jest rozwinąć maksymalne dopuszczalne dla nich prędkości.

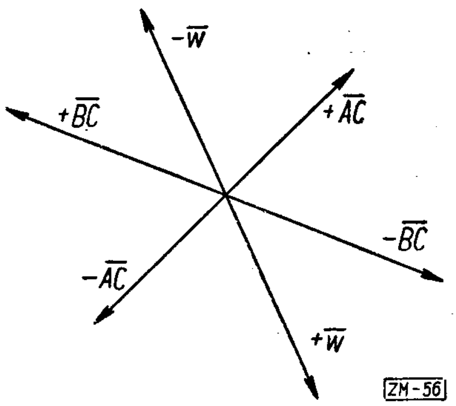
Ze względu na późniejsze zastosowania zauważmy jeszcze, że prędkość (1) zbliżania się obu statków jest funkcją monotoniczną argumentu φ w przedziałach $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ i $-\pi\leqslant\varphi\leqslant 0$, gdyż końcami ich są kolejne ekstrema wyrażenia (1). Ponieważ dla $\varphi=0$ wyrażenie (1) osiąga minimum, więc jest ono funkcją rosnącą bezwzględnej wartości argumentu φ.

Aby pokazać, że najlepsza metoda pościgu w sensie szerszym da się aproksymować przez metodę S^1, należy jeszcze wskazać jakąkolwiek metodę skuteczną, gwarantującą dowolnie krótki czas przy dostatecznie małej początkowej odległości między statkami. Metodą taką jest na przykład metoda podana na pierwszej stronicy niniejszej pracy.

Udowodnimy teraz kilka lematów, które będą nam później potrzebne.

Lemat 3. Niech A, B, C oznaczają kolejno początkowe położenia statków — ścigających i uciekającego.

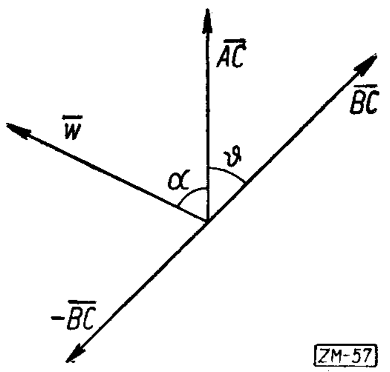
Jeżeli uciekający ma przebyć odcinek skierowany $\overline{w}$, i pościg metodą S^1 ma trwać możliwie długo, to odcinek ten powinien się znajdować między dodatnimi zwrotami wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ (zaczepionych w punkcie C).



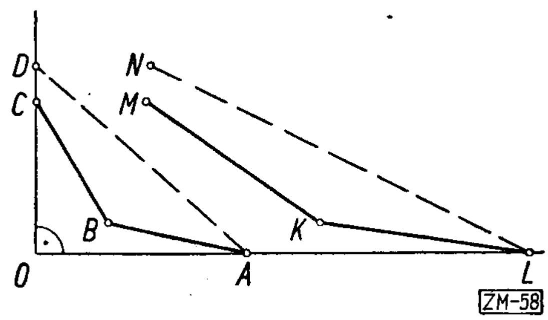
Rys. 15

1° Przypuśćmy najpierw, że znajduje się on między ujemnymi zwrotami tych wektorów (rys. 15) (tzn. wektorami $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ zaczepionymi w punkcie C). Wtedy zwroty dodatnie i ujemne wektorów $\overline{AC}, \overline{w}, \overline{BC}$ na przemian się przedzielają: $\overline{w}$ leży między $-\overline{AC}$ a $-\overline{BC}$; $\overline{AC}$ między $-\overline{w}$ a $-\overline{BC}$ itd. Odbijając $\overline{w}$ symetrycznie względem którejkolwiek z prostych łączącej A z C lub B z C, nie zmieniamy kąta, jaki tworzył z wektorami na niej leżącymi, zmniejszamy zaś kąt, jaki tworzył z wektorami pozostałej; jeśli bowiem dwa wektory rozdzielone są prostą, kąt między nimi równa się sumie kątów, jakie z nią tworzą, po odbiciu zaś — bezwzględnej wartości różnicy.

2° Jeśliby wektor $\overline{w}$ leżał między dodatnim zwrotem jednego a ujemnym drugiego z wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ (rys. 16), to tworzyłby z nimi kąty ($\leqslant \frac{1}{2}\pi$) α i $\alpha+\vartheta$ dodatnie, więc i teraz kładąc $\alpha=0$ (nie zwiększając kątów) wprowadzamy go między dodatnie zwroty wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



Rys. 16



Rys. 17

Konfrontacja tych wyników z dowodem lematu 2 (zmniejszanie kąta, jaki kierunek uciekającego tworzy z prostą łączącą go ze ścigającym, jest dla niego korzystne) dowodzi natychmiast tezy lematu.

L e m a t 4. Jeśli ścigający stosuje metodę pościgu S^1, a uciekający ma dwie możliwości:

a. przesunąć się z punktu A do C po łamanej, złożonej z dwóch odcinków AB i BC (rys. 17) albo

b. przesunąć się po prostej z punktu A do punktu D takiego, że $|AD|=|AB|+|BC|$ oraz CD jest prostopadłe do AL (L położenie ścigającego (rys. 17)), to możliwość b jest dla uciekającego korzystniejsza, tzn. ścigający mniej się przybliży niż w przypadku a [3]).

---

[3]) Lematu tego używa również M. W a r m u s w nieopublikowanej pracy „O pewnych twierdzeniach z teorii pościgu", por. streszczenie: M. W a r m u s, *Un théorème sur la poursuite,* Ann. de la Soc. Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 233-234.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\varphi_1 = \sphericalangle(\overline{AO}, \overline{AB}), \quad \varphi_2 = \sphericalangle(\overline{AO}, \overline{BC}), \quad \varphi = \sphericalangle(\overline{AO}, \overline{AD});$$

$$\psi_1 = \sphericalangle(\overline{LA}, \overline{LK}), \quad \psi_2 = \sphericalangle(\overline{LA}, \overline{KM}), \quad \psi = \sphericalangle(\overline{LA}, \overline{LN}),$$

$$c = \left|\frac{v_s}{v_u}\right|.$$

Łamana LKM oznacza tor ścigającego, który stosuje metodę S^1 względem uciekającego po łamanej ABC.

$$OA = AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2,$$

$$\cos\varphi = \frac{AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2}{AD},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2}{AD}\right)^2},$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{c} = \sin\psi_1, \qquad \frac{\sin\varphi_2}{c} = \sin\psi_2,$$

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \frac{1 - \left(\frac{AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2}{AD}\right)^2}{c^2}},$$

Trzeba pokazać, że rzut LN na OL jest mniejszy niż suma rzutów LK i KM.

Nierówność, którą chcemy uzyskać, ma postać

$$AD\cdot c\sqrt{1 - \frac{1 - \left(\frac{AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2}{AD^2}\right)^2}{c^2}} =$$

$$= \sqrt{AD^2c^2 - AD^2 + (AB\cos\varphi_1 + BC\cos\varphi_2)^2} <$$

$$< \sqrt{AB^2c^2 - AB^2 + AB^2\cos^2\varphi_1} + \sqrt{BC^2c^2 - BC^2 + BC^2\cos^2\varphi_2}.$$

Jest ona równoważna nierówności

$$2AB\cdot BC\,c^2 - 2AB\cdot BC + 2AB\cdot BC\cos\varphi_1\cos\varphi_2 <$$

$$< 2\sqrt{AB^2\cdot BC^2 c^4 + c^2 AB^2\cdot BC^2\cos^2\varphi_2 - AB^2\cdot BC^2 c^2 + AB^2\cdot BC^2 - AB^2\cdot BC^2\cos^2\varphi_2 + c^2 AB^2\cdot BC^2\cos^2\varphi_1 - AB^2\cdot BC^2\cos^2\varphi_1 + AB^2\times BC^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2} =$$

$$= 2AB\cdot BC\sqrt{c^2 + c^2\cos^2\varphi_2 - 2c^2 + 1 - \cos^2\varphi_2 + c^2\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},$$

co dalej jest równoważne (dzielimy przez $2AB\cdot BC$ i podnosimy do kwadratu, co jest możliwe, ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, gdyż wyrażają pewne odległości) z nierównością

$$c^4 + 1 + \cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 - 2c^2 + 2c^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 <$$

$$< c^4 + c^2\cos^2\varphi_2 - 2c^2 + 1 - \cos^2\varphi_2 + c^2\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2,$$

czyli

$$2c^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 < c^2\cos^2\varphi_1 + c^2\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2,$$

skąd

$$2(c^2-1)\cos\varphi_1\varphi_2 < (c^2-1)\cos^2\varphi_1 + (c^2-1)\cos^2\varphi_2,$$

a po uproszczeniu przez $c^2-1>0$

$$0<(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)^2 \qquad (\varphi_1\neq\varphi_2).$$

Uwaga 1. Zauważmy, że, jak wynika z uwag po lemacie 2 lemat 4 jest tym bardziej prawdziwy, gdy wektory $\overline{AL}$ i $\overline{CD}$ tworzą kąt rozwarty. Lemat 1 uogólnia się natychmisat na łamaną o dowolnej ilości ogniw, bowiem kierunki prostych $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ przy stosowaniu metody S^1 zachowują się.

Łatwo już teraz udowodnimy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 5. *Jeśli torem ucieczki jest łamana i ścigający stosują metodę pościgu S^1, to łamana jest odcinkiem, o ile uciekający stosują metodę gwarantującą im możliwie długi czas ucieczki.*

Dowód. Udowodnimy to dla łamanej złożonej z dwóch ogniw. Wtedy reszta wynika z trywialnej indukcji.

Z uogólnionego lematu 3 (p. uwaga 1) wynika, że łamana ta musi znajdować się między dodatnimi zwrotami wektorów $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ (oznaczenia jak poprzednio w lemacie 3). Z końcowego punktu łamanej wystawmy dowolny wektor tworzący z wektorami $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ kąty $\leqslant \pi/2$. Z uwagi 1 wynika natychmiast, że obranie na nim punktu D (jak w lemacie 4) wyznaczy tor korzystniejszy AD.

Zakładając zgodnie z naturą zagadnienia, że tor jest krzywą rektyfikowalną, możemy twierdzenie 5 natychmiast uogólnić na dowolną krzywą.

TWIERDZENIE 6. *Najlepszą metodą pościgu jest stosowanie przez każdego ze ścigających metody S^1, najlepszą zaś metodą ucieczki jest ucieczka na dalszy z punktów Apolloniusza (w przypadku równej odległości obu punktów Apolloniusza, na którykolwiek).*

Dowód. Jeśli pościg odbywa się metodą S^1, to w myśl twierdzenia 5 i lematu 3 torem ucieczki będzie wektor $\overline{w}$ leżący między dodatnimi zwrotami wektorów ($\overline{AC}$ i $\overline{BC}$) łączących ścigających z uciekającym, zaczepionych w miejscu, w którym znajduje się uciekający. Niech p oznacza prostą łączącą uciekającego z punktem Apolloniusza (jak łatwo zobaczyć, przy ucieczce na punkt Apolloniusza i pościgu metodą S^1, schwytanie nastąpi w punkcie Ap). Gdyby wektor $\overline{w}$ nie leżał na prostej p, to z jednym z wektorów $\overline{AC}$ lub $\overline{BC}$ tworzyłby kąt większy niż tworzy prosta p, a zatem, jak wynika z uwag po lemacie 2, wektor $\overline{w}$ byłby gorszym torem ucieczki niż prosta p.

Z drugiej strony jest oczywiste, że uciekający, kierujący się na punkt Apolloniusza, żadną metodą nie może być wcześniej schwytany niż w punkcie Apolloniusza, c.b.d.o.

Powróćmy teraz do trudności, o której wspomnieliśmy na początku, tj. do przypadku, kiedy istnieją dwa równouprawnione punkty Apolloniusza. Odpowiada to współliniowości wszystkich trzech statków. Poprzednio stosowana metoda pościgu staje się wówczas nieokreślona. Istnieje wtedy najlepsza metoda pościgu w sensie szerszym. Uzyskujemy ją np. ścigając metodą przedstawioną w niniejszej części pracy opóźniony o $\Delta t/2$ obraz uciekającego, któremu przypiszemy prędkość wyznaczoną z położeń uciekającego sprzed czasu $\Delta t/2$ i Δt.

Czasu równego czasowej odległości od punktu Apolloniusza żadna metoda pościgu zagwarantować nie może. Wynika to z tego, że uciekający może ruszyć w kierunku na dowolny z dwóch punktów Apolloniusza, ścigający zaś musieliby wtedy ruszyć w kierunku na ten sam punkt, a nie mając żadnej informacji o kierunku ucieczki muszą zdecydować o wyborze niezależnie od decyzji uciekającego.

W przypadku kolineacji istnieje więc najlepsza metoda pościgu, ale tylko w sensie szerszym.

Najlepszą metodą ucieczki w przypadku kolineacji jest ucieczka w kierunku na jeden (obojętne który) z punktów Apolloniusza. Wynika z tego, że każde odchylenie się od tej metody w myśl dowodu lematu 2 jest szkodliwe dla uciekającego, jeśli ścigają go metodą, o której mowa w cytowanym lemacie. W niniejszej zaś sytuacji dysponujemy dowolnie dobrą aproksymacją tamtej metody pościgu.

Należy zwrócić uwagę na to, że powyższe rozważania dotyczą przypadku, gdy kolineacja zaszła na początku pościgu. Jeśli bowiem statki niewspółliniowe na początku pościgu znalazły się w kolineacji w czasie jego trwania, to w myśl twierdzenia 3, statki zbliżyły się do punktu Apolloniusza bardziej, aniżeli zbliżyłyby się, gdyby uciekający stale uciekał na punkt Apolloniusza. Wtedy kolineacja nie powstałaby, jeśli nie było jej na początku, a zatem, mimo że ścigający są zmuszeni od chwili, gdy powstała kolineacja, stosować aproksymacyjne metody pościgu obarczone pewnym błędem, to jednak, ponieważ błąd może być tak mały, jak chcą, mogą wynikłą stąd stratę uczynić mniejszą od zysku, jaki osiągnęli na czasowej odległości od punktu Apolloniusza dzięki temu, że uciekający doprowadzając do kolineacji, odchylił się od najlepszej metody ucieczki (jedynej najlepszej metody ucieczki, jak wynika z dowodu twierdzenia 3).

Zakończenie

Streszczając wyniki niniejszej pracy zauważmy, że zawsze istnieje najlepsza metoda ucieczki (ucieczka w kierunku na dalszy, w przypadku równoodległości — na którykolwiek z dwóch punktów Apolloniusza).

Najlepsza metoda pościgu istnieje tylko wtedy, gdy statki nie znajdują się na jednej prostej. (Jest nią pościg na dalszy z punktów Apolloniusza, jeśli uciekający nie doprowadzi do kolineacji, zresztą niekorzystnej dla niego. Wtedy uciekający muszą stosować pewne metody aproksymacyjne, jak np. przedstawione w poprzedniej części pracy.)

W przypadku kolineacji na początku pościgu istnieje najlepsza metoda pościgu tylko w sensie szerszym. (Można zagwarantować czas dowolnie bliski pewnego czasu granicznego, którego jednak dokładnie żadna metoda nie gwarantuje.)

Na zakończenie można jeszcze wspomnieć, że wyniki zawarte w poprzednich rozdziałach dają się uogólnić na przypadek m ścigających w przestrzeni n wymiarowej, jeśli $m \leqslant n$ lub słabiej, jeśli uciekający nie jest otoczony przez ścigających, tzn., że przez uciekającego daje się przeprowadzić przestrzeń $n-1$ wymiarowa, tak by rozcięła przestrzeń n wymiarową na dwie półprzestrzenie i by wszyscy ścigający leżeli w jednej z nich.

Analogicznie do powyższej teorii można zbudować teorię pościgu z uwzględnieniem obstrzału, kiedy celem pościgu nie jest schwytanie uciekającego, lecz objęcie go zasięgiem dział, a więc pewne zadane zbliżenie się.

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

(Praca wpłynęła dnia 16. 3. 1953 r.)

А. ЗЕМБА (Вроцлав)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГОНИ

РЕЗЮМЕ

Темой работы является погоня двух элементов за одним. Автор определяет наилучшие методы погони и побега предполагая, что эти элементы в каждом моменте времени знают свое взаимоположение и абсолютное значение максимальных скоростей. При конкретно заданых максимальных скоростях и начальном местоположении элементов определяется срок гарантированый данным методом погони как точная нижная граница таких промежутков времени t_x, что убегающий при любом методе побега будет пойман в промежутке времени не превосходящим t_x, если преследующие пользуются этим методом погони.

Наилучшим методом погони называется метод гарантирующий кратчайший срок.

Аналогично определяется наилучший метод побега как такой, который гарантирует длиннейший срок побега, причем сроком гарантированым данным методом побега называем точную верхнюю границу таких про-

межутков времени t_x, что преследующие при любом методе погони не поймают удирающего раньше срока t_x, если тот пользуется этим методом побега.

Временным расстоянием точки од данного элемента называем промежуток времени, необходимый для того, чтобы элемент прошел отрезок прямой соединяющей его с этой точкой.

Геометрическое место точек временно равноотстоящих от двух элементов с различными скоростями определяется кругом, называемым кругом Аполлония.

Пусть S_1 и S_2 обозначает преследующие элементы, а U — элемент преследуемый. Чертим два аполлониевы круга элементов S_1U и S_2U и обозначаем через Ap (аполлониева точка) ту из двух точек пересечения этих кругов, которая находится дальше от элемента U.

Наилучшим методом погони является погоня стремящеяся к аполлониевой точке, а наилучшим методом побега — побег направленный к аполлониевой точке.

Если аполлониевы круги не пересакаются или если элемент U лежит вне треугольника $S_1S_2A_p$ (аполлониев треугольник), то погоня сводится к банальному случаю погони одного элемента за одним.

Вышеприведенной теореме автор посвящает первую часть работы и вступление, где приведены примеры на применение разных методов погони и побега и сравнение их с наилучшими (черт. 4-7).

Вторая часть работы посвящена случаю коллинеации всех трех элементов. Тогда обе точки пересечения аполлониевых кругов равноотстоящи от преследуемого U и наилучший метод погони не существует (наилучший метод побега — побег в направлении к любой из этих двух точек).

Преследующие могут однако при помощи приближенных методов погони обеспечить для себя срок произвольно близкий к некоторому предельному сроку, которого точно не обеспечит никакой метод.

Если однако в начале погони не было коллинеации, то не состоит она и позже, если только обе стороны: преследующая и преследуемая пользуются наилучшими методами, так как преследуемому невыгодно в последним счете создать хлопотливую для преследующих ситуацию коллинеации.

Наконец автор замечает, что результаты эти применимы к иным сметным задачам, и также переносятся в пространства с большим числом измерений.

A. ZIĘBA (Wrocław)

ELEMENTARY THEORY OF PURSUIT

SUMMARY

The subject of the paper is the pursuit of one element by two elements. The author determines the best methods of pursuit and escape, assuming that the elements, at every moment, know each other's position and the absolute

value of maximum rates of speed. For definite maximum speeds and initial positions the time ensured by a given method of pursuit is defined as the lower limit of such times t_x that, no matter which way the escaping element runs, it will be caught by the pursuers using that method in a time not longer than t_x.

The best method of pursuit is that which ensures the shortest time.

The best method of escape is defined, in a similar way, as that which ensures the longest time of escape: the time ensured by a given method of escape is defined as the upper limit of such times x that, no matter what method of pursuit is used by the pursuers, the escaping element (if it uses that method of escape) will not be caught until the time t_x is over.

The time-distance of a point from a given element is the time needed by the element to pass along the segment joining it with that point.

The set of points temporally equidistant from two elements of different speeds forms a circle which is called their Apollonius' circle.

Let us denote the pursuing elements by S_1 and S_2 and the escaping element by U. Let us draw the Apollonius' circles of the elements S_1U and S_2U and denote that one of their intersection points which is farther from U by A_p (Apollonius' point).

The best method of pursuit is the pursuit in the direction of the Apollonius' point, and the best method of escape is the escape in the direction of the Apollonius' point.

If the Apollonius' circles do not intersect, or if the element U is beyond the Apollonius' triangle (the triangle $S_1S_2A_p$), the pursuit is reduced to an ordinary case of one element pursuing one element.

The above theorems are discussed in the first part of this paper and in the introduction, which includes examples of applying various methods of pursuit and escape as compared with the best methods (Figs. 4, 5, 6, 7).

The second part of the paper deals with the case of colinearity of all three elements. Both intersection points of the Apollonius' circles are then equidistant from the escaping U, and the best method of pursuit does not exist. (The best method of escape in that case is the escape in the direction of any of those two points).

However, the pursuers can ensure, by means of approximate methods of pursuit, a time arbitrarily near a certain limit time, which, however, no method can ensure with accuracy.

Still, provided there was no colinearity at the beginning of the pursuit, it will not arise later if both sides, the escaping one and the pursuing one, use the best methods, because, however perplexing the situation of colinearity is for the pursuers, it is of no advantage for the escaping side to create it.

Finally the author observes that the same results can be extended to various cognate problems, including spaces of a greater number of dimensions.