ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

T. KACZOREK (Warszawa)

PEWNE TWIERDZENIA O MACIERZACH OSOBLIWYCH

W zagadnieniach technicznych, a w szczególności w zagadnieniach elektrotechniki teoretycznej ([1], [2], [5], [6]), korzystamy z macierzy osobliwych o równych dopełnieniach algebraicznych (kofaktorach) i w ogólnym przypadku różnych od zera. W artykule tym podajemy pewne twierdzenia dotyczące takich właśnie macierzy osobliwych. Przytoczone niżej twierdzenie 1 można wyprowadzić z uogólnionego twierdzenia Cauchy'ego ([4], [3]). Każde z twierdzeń zostanie zilustrowane przykładem zaczerpniętym z dziedziny elektrotechniki teoretycznej.

TWIERDZENIE 1. *Macierz kwadratowa symetryczna AA_t, dla dowolnej macierzy $A = (a_{kl})$ stopnia $m \times n$, która ma więcej wierszy niż kolumn $(m > n)$, jest macierzą osobliwą.*

Dowód. Macierz A można zawsze przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = {}_{m}\!\begin{array}{c} \hfill {\scriptstyle m} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array} {}_{m}\!\begin{array}{c} \hfill {\scriptstyle n} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

lub krócej

$$(1') \qquad A = A'H,$$

gdzie A' jest macierzą kwadratową osobliwą powstałą z macierzy A przez dopisanie $m-n$ kolumn złożonych z samych zer, H jest macierzą prostokątną stopnia $m \times n$ złożoną z elementów h_{kl} takich, że

$$h_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = l, \\ 0 & \text{dla } k \neq l. \end{cases}$$

Utwórzmy macierz AA_t. Po uwzględnieniu równości (1') otrzymamy

$$(2) \qquad AA_t = A'[HH_t]A'_t.$$

Z równania (2) mamy

$$(3) \qquad \det AA_t = \det A' \det HH_t \det A'_t.$$

Ponieważ $\det A' = 0$, więc z równania (3) mamy

$$\det AA_t = 0. \tag{4}$$

AA_t jest zatem macierzą osobliwą.

PRZYKŁAD 1. Niech dla pewnego obwodu elektrycznego liniowego o m gałęziach i $n+1$ węzłach będzie dana macierz łącząca napięciowa A stopnia $m\times n$ oraz macierz łącząca prądowa C stopnia $m\times(m-n)$ ([1], [2]). Dla realnego obwodu elektrycznego $m > n$. Biorąc pod uwagę twierdzenie 1 stwierdzamy, że macierze AA_t i CC_t są macierzami osobliwymi.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli dla macierzy kwadratowej $A = (a_{kl})$ zachodzą związki*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad \textit{oraz} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad \textit{dla} \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

to

$$A_{lk} = A_{i_0 j_0},$$

gdzie A_{lk} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{lk} macierzy A, $l,k = 1,\ldots,n$.

Dowód. Rozważmy układ równości

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Jeżeli $A_{kl} = 0$ dla wszystkich k, l, to teza twierdzenia zachodzi. Niech więc dla pewnego i_0 i j_0 będzie $A_{i_0 j_0} \neq 0$. Mamy

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} a_{ij} = -a_{ij_0}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

Stosując wzory Craméra do układu (5) otrzymujemy dla $k = 1,2,\ldots,n$

$$1 = \frac{1}{(-1)^{j_0+i_0} A_{i_0 j_0}} \times \tag{6}$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots a_{1,k-1} & -a_{1j_0} & a_{1,k+1} & \ldots a_{1,j_0-1} & a_{1,j_0+1} & \ldots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_0-1,1} & \ldots a_{i_0-1,k-1} & -a_{i_0-1,j_0} & a_{i_0-1,k+1} & \ldots a_{i_0-1,j_0-1} & a_{i_0-1,j_0+1} & \ldots a_{i_0-1,n} \\ a_{i_0+1,1} & \ldots a_{i_0+1,k-1} & -a_{i_0+1,j_0} & a_{i_0+1,k+1} & \ldots a_{i_0+1,j_0-1} & a_{i_0+1,j_0+1} & \ldots a_{i_0+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots a_{n,k-1} & -a_{n,j_0} & a_{n,k+1} & \ldots a_{n,j_0-1} & a_{n,j_0+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

skąd $(-1)^{j_0+i_0} A_{i_0 j_0} = -(-1)^{j_0-k-1}(-1)^{i_0+k} A_{i_0 k}$, co pociąga za sobą

$$A_{i_0 j_0} = A_{i_0 k}. \tag{7}$$

Stosując to samo rozumowanie do układu

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

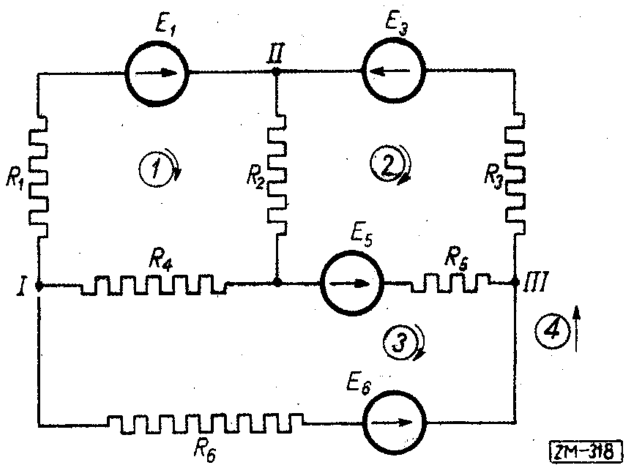
otrzymujemy

$$A_{i_0 k} = A_{mk} \quad \text{dla} \quad k, m = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Twierdzenie 2 zostało zatem dowiedzione.

Z twierdzenia 2 wynika natychmiast następujące twierdzenie, które ma ważne zastosowania, między innymi w elektrotechnice teoretycznej.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli dla macierzy kwadratowej symetrycznej* $A = (a_{kl})$ *zachodzi związek* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ *dla* $i = 1, \ldots, n$, *to wszystkie dopełnienia algebraiczne tej macierzy są sobie równe.*



PRZYKŁAD 2. Przedstawiony na rysunku obwód liniowy prądu stałego znajduje się w stanie ustalonym. Wyznaczyć macierz rezystancji $R_{\alpha+1}$ w metodzie oczkowej i macierz konduktancji G_{n+1} w metodzie węzłowej oraz ich macierze dołączone, mając dane wartości rezystancji

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad R_3 = 1\Omega, \quad R_4 = 4\Omega, \quad R_5 = 1\Omega, \quad R_6 = 1\Omega.$$

Dla przyjętej na rysunku numeracji węzłów, oczek oraz zwrotów prądów oczkowych, macierze R_4, G_4 będą miały postać (patrz [1])

$$R_4 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} R_1+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 & -R_1 \\ \hline -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 & -R_3 \\ \hline -R_4 & -R_5 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ \hline -R_1 & -R_3 & -R_6 & R_1+R_3+R_6 \end{array}\right|,$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_4} \\ \hline -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ \hline -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_5} \\ \hline -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5} \\ \hline \end{array}.$$

Po podstawieniu wartości rezystancji otrzymamy

$$R_4 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 2{,}25 & -1 & -1 & -0{,}25 \\ -1 & 2{,}5 & -1 & -0{,}5 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & -1 & 1{,}75 \end{bmatrix}.$$

Macierze dołączone są

$$R_4^* = \begin{bmatrix} 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \end{bmatrix}, \quad G_4^* = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \\ 57 & 57 & 57 & 57 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Jak wynika z wzoru (9), macierze dołączone R_4^*, G_4^* mają wszystkie elementy równe. Stwierdzamy zatem, że wybór oczka i węzła odniesienia (patrz [1]) nie ma wpływu na wartości wyznaczników macierzy R_a, G_n.

TWIERDZENIE 4. *Niech $A = (a_{kl})$ będzie macierzą, której suma elementów każdego wiersza jest równa zeru. Wtedy macierz $A_t A$ ma następujące własności:*

1° *suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny jest równa zeru,*

2° *wszystkie dopełnienia algebraiczne macierzy $A_t A$ są równe,*

3° *wyznacznik macierzy $A_t A$ jest równy zeru.*

Dowód. 1° Dla l-tego wiersza (kolumny) suma elementów macierzy $A_t A$ wyniesie

$$(10)\qquad \sum_{a=1}^{m} a_{al} a_{a1} + \sum_{a=1}^{m} a_{al} a_{a2} + \ldots + \sum_{a=1}^{m} a_{al} a_{an} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{a=1}^{m} a_{al} a_{a\mu} = \sum_{a=1}^{m} a_{al} \sum_{\mu=1}^{n} a_{a\mu}.$$

Z założenia suma elementów każdego wiersza macierzy A równa jest zeru: $\sum_{\mu=1}^{n} a_{a\mu} = 0$ dla $a = 1, \ldots, m$, więc z wzoru (10) otrzymujemy

$$(11)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{a=1}^{m} a_{al} a_{a\mu} = 0.$$

2° Korzystając z zależności (11) stwierdzamy, że druga własność macierzy $A_t A$ wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.

3° Rozwijając wyznacznik macierzy $A_t A$ na przykład według pierwszego wiersza otrzymujemy

$$(12)\qquad \det[A_t A] = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{a=1}^{m} a_{a\mu} a_{a1} C_{\mu 1},$$

gdzie $C_{\mu 1}$ jest dopełnieniem algebraicznym macierzy $A_t A$. Biorąc pod uwagę zależność (11) oraz drugą własność macierzy $A_t A$ otrzymujemy

$$(13)\qquad \det[A_t A] = C_{11} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{a=1}^{m} a_{a\mu} a_{a1} = 0.$$

Twierdzenie 4 zostało zatem dowiedzione.

Przykład 3. Niech dla obwodu liniowego o m gałęziach i $n+1$ węzłach dane będą macierze przekształceń (patrz [1]) $\Gamma a+1, m$, $\Delta n+1, m$. Suma elementów każdego wiersza macierzy $(\Gamma a+1, m)_t$, $(\Delta n+1, m)_t$ jest równa zeru. Na podstawie twierdzenia 4 stwierdzamy, że:

1° suma elementów każdego wiersza (kolumny) macierzy $\Gamma a+1, m(\Gamma a+1, m)_t$, $\Delta n+1, m(\Delta n+1, m)_t$ jest równa zeru,

2° wszystkie dopełnienia algebraiczne macierzy $\Gamma a+1, m(\Gamma a+1, m)_t$, $\Delta n+1, m(\Delta n+1, m)_t$ są równe,

3° macierze $\Gamma a+1, m(\Gamma a+1, m)_t$, $\Delta n+1, m(\Delta n+1, m)_t$ są macierzami osobliwymi.

Stąd wynika między innymi ważny wniosek o własnościach obwodów elektrycznych: Wybór oczka i węzła odniesienia nie ma wpływu na wartości wyznaczników $\det[A_t A]$, $\det[C_t C]$.

Składam p. A. Hulanickiemu podziękowanie za wiele wnikliwych uwag i propozycji.

Prace cytowane

[1] T. Cholewicki, *Macierzowa analiza obwodów liniowych*, Warszawa-Wrocław 1958.
[2] P. Le Corbeiller, *Matrix analysis of electric networks*, New York 1955.
[3] B. H. Гантнахер, *Теория матриц*, Москва 1954.
[4] A. Mostowski i M. Stark, *Algebra wyższa*, część 1, Warszawa-Wrocław 1953.
[5] J. Schmidtmayer, *Matricovy pocet i jeho pouziti v elektrotechnice*, Praha 1954.
[6] S. A. Stigant, *Modern electrical engineering mathematics*, London 1947.

Praca wpłynęła 27. 11. 1958

Т. КАЧОРЕК (Варшава)

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦАХ

РЕЗЮМЕ

В работе приводятся некоторые теоремы, касающиеся вырожденных матриц, имеющих большое значение, в частности, при исследовании топологических свойств электрических систем. Теорема 1 касается матрицы AA_t, где A — матрица порядка $m\times n$, при $m>n$. Теорема 2 гласит, что если для матрицы A порядка n выполняются равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0$, при $i,j=1,\ldots,n$, то $A_{lk}=A_{i_0 j_0}$, где A_{lk} является алгебраическим дополнением элемента a_k матрицы A. Теорема 4 характеризует свойства матрицы A_tA, где A — матрица порядка $m\times n$, удовлетворяющая условию $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$. Каждая теорема иллюстрируется примером из области теоретической электотехники.

T. KACZOREK (Warszawa)

SOME THEOREMS ON SINGULAR MATRICES

SUMMARY

The author presents certain theorems concerning singular matrices which play an important part in investigating the topological properties of electrical circuits. Theorem 1 concerns a matrix AA_t for a matrix A of degree $m\times n$ if $m>n$. Theorem 2 states that if for a matrix A of degree n we have the relations $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0$ for $i,j=1,\ldots,n$, then $A_{lk}=A_{i_0 j_0}$ where A_{lk} is the algebraic complement of the element a_{lk} in the matrix A. Theorem 4 defines the properties of a matrix A_tA for a matrix A of degree $m\times n$ which satisfies the condition $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$. Each of the theorems is illustrated by an example drawn from theoretical electricity.
