S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

O OPTYMALNEJ METODZIE ODBIORU WODOMIERZY

1. Urząd Miar legalizuje wodomierze na podstawie wyniku m pomiaru błędu wodomierza, określonego wzorem

$$m = \frac{\text{wskazanie wodomierza} - \text{wskazanie przyrządu wzorcowego}}{\text{wskazanie przyrządu wzorcowego}}.$$

Przepis legalizacyjny Urzędu Miar ustala liczbę q zwaną *największym dozwolonym błędem systematycznym* i tok postępowania, według którego decyzja o wodomierzu następuje albo po jednokrotnym, albo po dwukrotnym pomiarze błędu. Oznaczmy przez m_1 i m_2 odpowiednio wynik pierwszego i drugiego pomiaru błędu wodomierza. Przewidziany w przepisach tok postępowania jest następujący: Zmierzyć m_1; uznać wodomierz za dobry, zły, albo zmierzyć m_2 stosownie do tego, czy $|m_1| \leqslant 0{,}9q$, czy $|m_1| > 1{,}1q$, czy wreszcie $0{,}9q < |m_1| \leqslant 1{,}1q$; jeśli doszło do drugiego pomiaru, uznać wodomierz za dobry lub zły zależnie od tego, czy jest spełniona nierówność

$$\frac{|m_1 + m_2|}{2} \leqslant q,$$

czy nie. Wodomierze uznane za dobre zostają zalegalizowane, pozostałe zaś nie.

2. Dla ustalonego wodomierza wynik m pomiaru błędu zależy od przypadku; *błędem systematycznym* x wodomierza nazywa się wartość oczekiwaną wyniku m.

Będziemy zakładali, że dla każdego wodomierza z osobna wynik m pomiaru błędu ma rozkład normalny z odchyleniem średnim σ_1, takim samym dla wszystkich wodomierzy. Będziemy rozpatrywali przypadek, kiedy jest znany rozkład prawdopodobieństwa *a priori* błędów systematycznych x wodomierzy przedstawionych do legalizacji. Będzie tak na przykład, gdy wodomierze te będą pochodziły z tej samej fabryki, która produkuje je w ustalonych warunkach. Będziemy zakładali, że wśród wodomierzy przedstawionych do legalizacji błąd systematyczny x ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną a i odchyleniem średnim σ_0, oraz, że wyniki kolejnych pomiarów błędu systematycznego na tym samym wodomierzu lub też na różnych wodomierzach są niezależne. Parametry a, σ_0, σ_1, będziemy uważali za znane z doświadczenia.

Są to takie same założenia, jakie przyjmuje Obalski w pracy [1].

3. Postępowanie legalizacyjne Urzędu Miar ma na celu, z grubsza mówiąc, uznanie za dobre tych wodomierzy, które mają mały błąd systematyczny x. Nie można jednak zrobić tego zupełnie dobrze, gdyż pomiary są obarczone błędami przypadkowymi, a więc będziemy spotykali wodomierze zalegalizowane i mające duży błąd systematyczny x oraz wodomierze z małym błędem systematycznym x, które zostaną uznane za złe.

Przy uczynionych założeniach o rozkładzie błędów x i o rozkładzie wyników m pomiaru błędu można probabilistycznie scharakteryzować działanie przepisu legalizacyjnego i ocenić jego dobroć. Obalski w pracy [1] stawiał jako postulat zapewnienie jak największego prawdopodobieństwa, że wodomierz uznany za dobry jest dobry. *Dobrymi* nazywa się tu wodomierze, dla których $|x| \leqslant q$, gdzie q jest wzięte z przepisu Urzędu Miar. Oderfeld i Zubrzycki w pracy [2] badali selektywność przepisu legalizacyjnego również korzystając z opisanego podziału wodomierzy na *dobre* i *złe*.

H. Steinhaus zwrócił uwagę na to, że alternatywny podział wodomierzy na dobre i złe jest tu tylko pomocniczą umową; właściwą zaś miarą dobroci wodomierza jest właśnie jego błąd systematyczny x, i że można w miejsce postulatu Obalskiego postawić inny, wolny od konwencjonalnego podziału wodomierzy na dobre i złe. Można mianowicie zażądać, żeby oczekiwana wartość kwadratu błędu systematycznego u wodomierzy zalegalizowanych była najmniejsza. Samo to żądanie prowadziłoby do nieskończenie wielu pomiarów każdego wodomierza i do odrzucenia w zasadzie wszystkich wodomierzy. Dlatego trzeba je uzupełnić postulatami co do oczekiwanej liczby pomiarów na wodomierz przedstawiony do legalizacji i co do prawdopodobieństwa zalegalizowania wodomierza przedstawionego do legalizacji. Te trzy żądania, a więc ustalona oczekiwana ilość pomiarów na wodomierz, ustalone prawdopodobieństwo zalegalizowania wodomierza i zminimizowanie oczekiwanego kwadratu błędu systematycznego u wodomierzy zalegalizowanych, stanowią zaproponowany przez H. Steinhausa układ postulatów, jakie powinien spełniać przepis legalizacyjny.

4. Z obecnego przepisu legalizacyjnego wynika (dla każdego zespołu wartości q, a, σ_0, σ_1) wielkość prawdopodobieństwa, że wodomierz będzie zalegalizowany, a także oczekiwana liczba pomiarów na wodomierz. Okazuje się, że nie zmieniając tych liczb można zmniejszyć do minimum,

przy dopuszczeniu co najwyżej dwukrotnego pomiaru wodomierza, oczekiwany kwadrat błędu wodomierzy zalegalizowanych. Mianowicie tok postępowania wynikający z przepisu Urzędu Miar jest szczególnym przypadkiem następującego postępowania: Zmierzyć m_1; uznać wodomierz za dobry, zły, lub zmierzyć m_2 stosownie do tego, czy $|m_1|\leqslant\alpha$, czy $|m_1|>\beta$, czy $\alpha<|m_1|\leqslant\beta$; jeśli doszło do drugiego pomiaru, uznać wodomierz za dobry lub zły stosownie do tego, czy zachodzi nierówność

$$\frac{|m_1+m_2|}{2}\leqslant\gamma,$$

czy nie. Przepis Urzędu Miar odpowiada przypadkowi, gdy $\alpha=0{,}9q$, $\beta=1{,}1q$, $\gamma=q$.

Zmniejszenie oczekiwanego kwadratu błędu można uzyskać przez dobór odpowiednich α,β,γ. Wielkość tego zmniejszenia najlepiej ilustruje przykład numeryczny przedstawiony w tablicy 1. W przykładzie tym przyjąłem $a=0$, $\sigma_0=1\%$, $\sigma_1=1\%$, $q=1{,}5\%$. Przy tych założeniach z przepisu legalizacyjnego wynika, że

1° prawdopodobieństwo zalegalizowania wodomierza równa się 0,7309,

2° prawdopodobieństwo dwukrotnego mierzenia wodomierza równa się 0,0964.

W tablicy podaję pięć układów liczb α,β,γ, uporządkowanych według rosnącego α, dla których wymienione prawdopodobieństwa są zachowane, oraz odpowiadające im oczekiwane kwadraty błędu systematycznego u wodomierzy zalegalizowanych, pierwiastki z tych oczekiwanych kwadratów błędu i ich pochodne względem α.

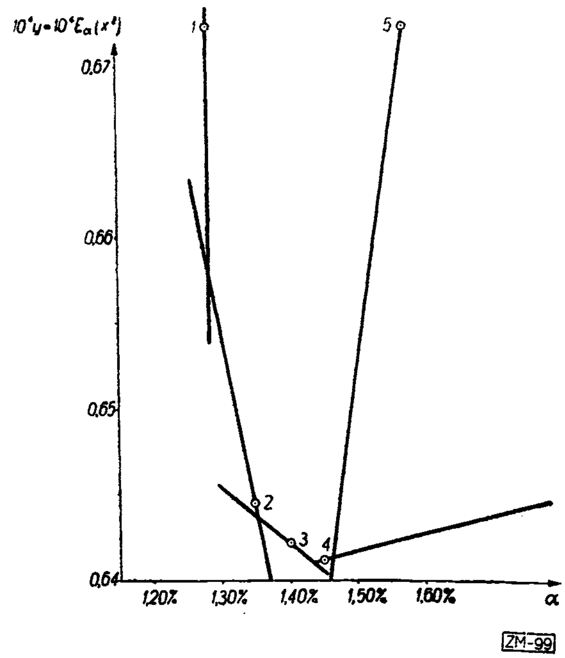
Pierwszy i piąty z tych układów są układami ekstremalnymi, w których decyzja o wodomierzu zależy tylko od pierwszego pomiaru. Przepisowi GUM odpowiada układ drugi. Widzimy, że układ czwarty daje

TABLICA 1

L. p.	$10^2\alpha$	$10^2\beta$	$10^2\gamma$	$10^4\mathrm{E}_a(x^2)$	$10^2\sqrt{\mathrm{E}_a(x^2)}$	$10^2\cdot\frac{d}{da}\mathrm{E}_a(x^2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1,280	1,563	∞	0,6723	0,8200	$-\infty$
2	1,350	1,650	1,500	0,6443	0,8027	$-0{,}2033$
3	1,400	1,713	1,242	0,6422	0,8014	$-0{,}0472$
4	1,430	1,752	1,101	0,6411	0,8007	0,0103
5	1,563	1,929	0	0,6723	0,8200	0,3259

najmniejszy oczekiwany kwadrat błędu. A więc nadając liczbom α,β,γ wartości z czwartego wiersza tablicy 1 można zmniejszyć oczekiwany kwadrat $E_a(x^2)$ błędu u wodomierzy zalegalizowanych. Zmniejszenie to wynosi jednak tylko $0{,}6443 \cdot 10^{-4} - 0{,}6411 \cdot 10^{-4} = 0{,}0032 \cdot 10^{-4}$, czyli zaledwie około pół procentu obecnej wartości [1]).

Rysunek 1, sporządzony na podstawie tej tablicy, pokazuje jak blisko minimum jesteśmy dla $\alpha = 1{,}43\%$. Na rysunku zaznaczono pięć punktów obrazujących wielkość $E_a(x^2)$ dla pięciu wartości α z tablicy 1. Ponadto, na podstawie wartości pochodnej (kolumna 7 tablicy 1) narysowano styczne w tych punktach do wykresu (nienarysowanego) funkcji $y(\alpha) = E_a(x^2)$.



Rys. 1

5. Opiszemy teraz sposób znajdowania najlepszych liczb α, β, γ. Będziemy oznaczali gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej u przez $f(u)$, gęstość prawdopodobieństwa pary u, v zmiennych losowych przez $f(u, v)$, trójki u, v, w przez $f(u, v, w)$, gęstość prawdopodobieństwa warunkowego zmiennej losowej u ze względu na wartość zmiennej losowej v przez $f_v(u)$. Będziemy przy tym używali łatwo zrozumiałych symboli $E(u), E_v(u), E_{vu}(w)$ na oznaczenie wartości oczekiwanych i warunkowych wartości oczekiwanych oraz $\omega(u)$, $\omega_v(u)$, $\omega_{vu}(w)$ na oznaczenie wariancyj.

W naszym zadaniu wchodzą w grę trzy zmienne losowe: błąd systematyczny x wodomierza oraz wyniki m_1, m_2 odpowiednio pierwszego i drugiego pomiaru. Z założenia znamy następujące gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_0^2}\right), \tag{1}$$

[1]) Liczby w kolumnie (6) są oszacowaniem oczekiwanego błędu u wodomierzy zalegalizowanych. Najmniejsza z nich jest 0,80%, największa 0,82%. Ponieważ różnią się między sobą tak mało, celowe może być zdecydowanie się na układ pierwszy lub piąty. Przepis stałby się wtedy jednostopniowy, a więc dużo prostszy niż obecnie (*przyp. Redakcji*).

(2a) $$f_x(m_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m_1-x)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

(2b) $$f_x(m_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m_2-x)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

(3) $$f_x(m_1, m_2) = f_x(m_1) f_x(m_2).$$

Znajdziemy teraz na podstawie uczynionych założeń potrzebne nam gęstości prawdopodobieństwa i wartości oczekiwane.

Możemy napisać

(4) $$m_1 = x + (m_1 - x).$$

Z wzoru (2a) wynika, że warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $m_1 - x$ nie zależy od x, a więc zmienne losowe x i m_1-x są niezależne. Korzystając z tego i z wzoru (4) otrzymujemy

(5) $$\omega(m_1) = \omega(x) + \omega(m_1 - x), \qquad \mathrm{E}(m_1) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(m_1 - x),$$

a więc na podstawie wzorów (1) i (2)

(6) $$\omega(m_1) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(m_1) = a.$$

Ponieważ zaś zmienne losowe x i m_1-x mają rozkłady normalne, więc korzystając z (6) mamy

(7) $$f(m_1) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_1^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m_1-a)^2}{2(\sigma_0^2+\sigma_1^2)}\right).$$

Opierając się na tożsamości

(8) $$f(x) f_x(m_1) = f(m_1) f_{m_1}(x)$$

i wzorach (1), (2), (7) znajdujemy

(9) $$f_{m_1}(x) = \frac{1}{A\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2A^2}\right),$$

gdzie

$$A = \frac{\sigma_0\sigma_1}{\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_1^2}}, \qquad B = \frac{m_1\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}.$$

Aby znaleźć rozkład $f_{m_1}(m_2)$ zwróćmy uwagę, że pytamy tu o rozkład wyników m_2 wśród wodomierzy, u których wynik pierwszego pomiaru jest m_1. A więc zagadnienie różni się od szukania rozkładu $f_{m_1}(x)$ tym tylko, że teraz rolę rozkładu błędów x *a priori* gra rozkład $f_{m_1}(x)$. Korzystając z tego znajdujemy[2]), że

$$(11) \qquad f_{m_1}(m_2) = \frac{1}{A_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m_2-B_1)^2}{2A_1^2}\right),$$

gdzie

$$A_1 = \sigma_1 \sqrt{\frac{2\sigma_0^2+\sigma_1^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}}, \qquad B_1 = \frac{m_1\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2}.$$

Tożsamości

$$(12) \qquad f(m_1, m_2) = f(m_1) f_{m_1}(m_2),$$

$$(13) \qquad f(m_1, m_2) f_{m_1,m_2}(x) = f(x) f_x(m_1, m_2)$$

oraz wzory (1), (3), (7) i (11) pozwalają nam znaleźć

$$(14) \qquad f_{m_1,m_2}(x) = \frac{1}{A_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-B_2)^2}{2A_2^2}\right),$$

gdzie

$$A_2 = \frac{\sigma_0\sigma_1}{\sqrt{2\sigma_0^2+\sigma_1^2}}, \qquad B_2 = \frac{(m_1+m_2)\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{2\sigma_0^2+\sigma_1^2}.$$

Wzór (9) daje

$$(15) \qquad \mathrm{E}_{m_1}(x^2) = \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_0^2+\sigma_1^2} + \frac{m_1^2\sigma_0^4}{(\sigma_0^2+\sigma_1^2)^2} = A^2 + B^2,$$

a wzór (14)

$$(16) \qquad \mathrm{E}_{m_1,m_2}(x^2) = \frac{\sigma_0^2\sigma_1^2}{2\sigma_0^2+\sigma_1} + \left(\frac{(m_1+m_2)\sigma_0^2 + a\sigma_1^2}{2\sigma_0^2+\sigma_1^2}\right)^2 = B_2^2 + A_2^2.$$

Decyzja o wodomierzu jest funkcją pary (m_1, m_2). Funkcja ta jest dana, gdy wskazany jest zbiór L tych par (m_1, m_2), dla których wodomierz legalizujemy. W naszym zadaniu jest to zbiór tych par, dla których bądź $|m_1| \leqslant \alpha$, bądź $\alpha < |m_1| \leqslant \beta$ i $|(m_1+m_2)|/2 \leqslant \gamma$ (zobacz rys. 2).

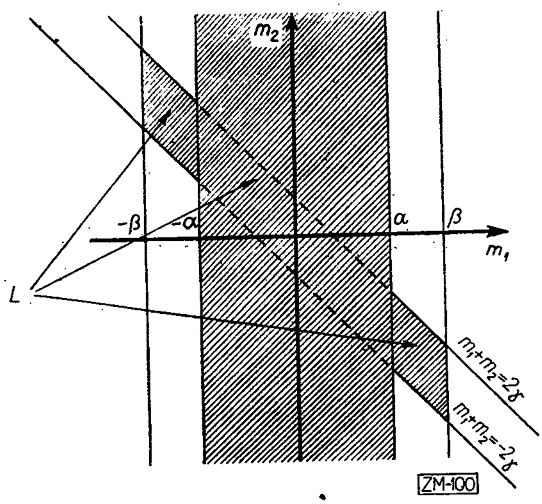
Prawdopodobieństwo P_1, że wodomierz przedstawiony do legalizacji zostanie zalegalizowany, wyraża się wzorem

$$(17) \qquad P_1 = \iint_L (f m_1, m_2)\, dm_1\, dm_2.$$

[2]) To wyprowadzenie wzoru (11), zawarte w pracy [2], powtórzyłem dla wygody czytelnika.

Wpisując granice całkowania otrzymujemy

$$(18)\qquad P_1 = \int_{-\beta}^{-\alpha} dm_1 \int_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma} f(m_1, m_2)\, dm_2 + \int_{-\alpha}^{\alpha} dm_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(m_1, m_2)\, dm_2 + \int_{\alpha}^{\beta} dm_1 \int_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma} f(m_1, m_2)\, dm_2 .$$



Rys. 2

Korzystając z tego, że

$$(19)\qquad f(m_1, m_2) = f(m_2) \cdot f_{m_1}(m_2)$$

i że

$$(20)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_{m_1}(m_2)\, dm_2 = 1,$$

możemy nadać wzorowi (18) postać

$$(21)\qquad P_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(m_1)\, dm_1 + \int_{-\beta}^{-\alpha} dm_1 \int_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma} f(m_1) f_{m_1}(m_2)\, dm_2 + \int_{\alpha}^{\beta} dm_1 \int_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma} f(m_1) f_{m_1}(m_2)\, dm_2 .$$

Prawdopodobieństwo P_2, że wodomierz przedstawiony do legalizacji zostanie zmierzony dwa razy, decyduje o oczekiwanej liczbie pomiarów na wodomierz i wyraża się przez

$$(22)\qquad P_2 = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(m_1)\, dm_1 + \int_{\alpha}^{\beta} f(m_1)\, dm_1 .$$

Chcemy wybrać najlepszą spośród takich trójek α,β,γ, dla których P_1 i P_2 są stałe, na przykład takie, jakie wynikają z obowiązującego przepisu legalizacyjnego. W naszym przykładzie wartości tych stałych znajdziemy podstawiając do (21) i (22) $\alpha=0{,}9q$, $\beta=1{,}1q$, $\gamma=q$. Znając zaś P_1 i P_2 możemy z (21) wyrazić β jako funkcję α i dalej z (21) przedstawić γ jako funkcję α i $\beta(\alpha)$, a więc jako funkcję α.

Ostatecznie granice zbioru L okazują się zależne od jednego tylko parametru α. Wartość oczekiwana $\mathrm{E}_\alpha(x^2)$ kwadratu błędu systematycznego wyraża się wzorem

$$\mathrm{E}_\alpha(x^2)=\frac{1}{P_1}\iint\limits_L \mathrm{E}_{m_1,m_2}(x^2)f(m_1)f_{m_1}(m_2)\,dm_1\,dm_2. \tag{23}$$

Zaznaczamy, że ta wartość oczekiwana zależy tylko od jednego parametru α, a nasze zadanie polega na znalezieniu α minimizującego $\mathrm{E}_\alpha(x^2)$.

Po podstawieniu granic całkowania możemy przekształcić wzór (23) w następujący:

$$P_1\mathrm{E}_\alpha(x^2)=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{E}_{m_1}(x^2)f(m_1)\,dm_1+\int\limits_{-\beta}^{-\alpha}f(m_1)M(m_1)\,dm_1+\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(m_1)M(m_1)\,dm_1, \tag{24}$$

gdzie

$$M(m_1)=\int\limits_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma}\mathrm{E}_{m_1,m_2}(x_2)f_{m_1}(m_2)\,dm_2.$$

Korzystamy przy tym z łatwej do sprawdzenia równości

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}_{m_1,m_2}(x^2)f_{m_1}(m_2)\,dm_2=\mathrm{E}_{m_1}(x^2). \tag{25}$$

6. W przypadku gdy $\alpha=0$, wzory (21), (22) i (24) upraszczają się do postaci

$$P_1=2\int\limits_0^{\alpha}f(m_1)\,dm_1+2\int\limits_{\alpha}^{\beta}Q(m_1)f(m_1)\,dm_1, \tag{25}$$

gdzie

$$Q(m_1)=\int\limits_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma}f_{m_1}(m_2)\,dm_2$$

$$P_2=2\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(m_1)\,dm_1; \tag{26}$$

$$P_1\mathrm{E}_\alpha(x^2)=2\int\limits_0^{\alpha}\mathrm{E}_{m_1}(x^2)f(m_1)\,dm_2+2\int\limits_{\alpha}^{\beta}M(m_1)f(m_1)\,dm_1, \tag{27}$$

gdzie

$$M(m_1)=\int_{-m_1-2\gamma}^{-m_1+2\gamma} \mathrm{E}_{m_1,m_2}(x^2) f_{m_1}(m_2)\,dm_2 .$$

W naszym przykładzie numerycznym przyjęliśmy $a=0$, $\sigma_0=1\%$, $\sigma_1=1\%$, $q=1{,}5\%$. Po odpowiednich podstawieniach prawe strony wzorów (25), (26) i (27) wyrażają się przez stablicowane funkcje

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \qquad \Phi(t)=\int_0^t \varphi(u)\,du$$

w sposób następujący:

$$P_1=2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\alpha\right)+2\int_\alpha^\beta Q(m_1)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,m_1\right)dm_1, \tag{28}$$

gdzie

$$Q(m_1)=\left[\Phi(u)\right]_{-m_1\sqrt{3/2}-2\sqrt{3/2}\,\gamma}^{-m_1\sqrt{3/2}+2\sqrt{3/2}\,\gamma},$$

$$P_2=2\left[\Phi(u)\right]_{\sqrt{2}\,\alpha/2}^{\sqrt{2}\,\beta/2}, \tag{29}$$

$$P_1\mathrm{E}_\alpha(x^2)=2\left[\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\alpha\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\,\alpha\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\alpha\right)\right]+ \tag{30}$$

$$+2\int_\alpha^\beta M(m_1)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,m_1\right)dm_1,$$

przy czym

$$M(m_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,m_1^2\right)Q(m_1)-\frac{1}{6}\,u\varphi(u)\Big|_b^c-m_1\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\varphi(u)\Big|_b^c,$$

gdzie

$$b=-m_1\sqrt{\frac{3}{2}}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\gamma, \qquad c=-m_1\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\gamma.$$

Drugie wyrazy po prawej stronie wzorów (28) i (30) zastąpiłem w rachunkach przez sumy simpsonowskie

$$2\int_\alpha^\beta Q(m_1)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,m_1\right)dm_1\approx 2\,\frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\alpha\right)+Q(\alpha)\right.$$

$$\left.+4\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)Q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\beta\right)Q(\beta)\right],$$

$$2\int_{\alpha}^{\beta} M(m_1)\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m_1\right)dm_1 \approx 2\,\frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)M(\alpha)+\right.$$

$$\left.+4\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta\right)M(\beta)\right].$$

Dla kontroli wyników korzystałem z wzoru

$$\frac{d}{d\alpha}P_1\mathrm{E}_\alpha(x^2)=2\frac{\sqrt{2}}{2}\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)\Big([\mathrm{E}_{m_1}(x^2)]_{m_1=\alpha}-M(\alpha)+M(\beta)-$$

$$-[\mathrm{E}_{m_1,m_2}(x^2)]_{m_1+m_2=2\gamma}\Big).$$

Prace cytowane

[1] J. Obalski, *O pewności sprawdzania narzędzi mierniczych*, Zastosowania Matematyki 1 (1953), str. 105-124.

[2] J. Oderfeld i S. Zubrzycki, *O sprawdzaniu wodomierzy*, Zastosowania Matematyki 1 (1953), str. 125-137.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 14. 4. 1954 r.

С. ЗУБЖИЦКИЙ (Вроцлав)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕТОДЕ ПРИЕМКИ ВОДОМЕРОВ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена приемке измерительных приборов, например водомеров, изготовляемых в определенных условиях, а именно: Полагается известным распределение вероятностей систематических ошибок x предложенных к приемке приборов и предлагается, что является оно нормальным с математическим ожиданием a и дисперсией σ_0. Приемка приборов совершается на основании однократного или двукратного измерения их систематической ошибки. Полагается, что измерение систематической ошибки обременно случайной ошибкой и что распределение вероятностей этих случайных ошибок известно: Предполагается, что результат m измерения случайной ошибки прибора с систематической ошибкой x подчинен нормальному распределению с математическим ожиданием x и дисперсией σ_0 общими для всех x.

Пусть m_1 и m_2 — результаты первого и второго измерения систематической ошибки. Рассматриваем следующий метод приемки: Измерить m_1, принять прибор, отбросить его или измерить m_2 в зависимости от того, что получаем как ре-

зультат первого измерения: $|m_1| \leqslant a$ или $|m_1| > \beta$, или $a < |m_1| \leqslant \beta$; в последнием случае принять прибор или отбросить в зависимости от того, имеет ли место неравенство $|(m_1+m_2)/2| \leqslant \gamma$ или нет.

Автор определяет числа a, β, γ так, чтобы 1° вероятность приемки прибора была равна заранее данному числу P_1, 2° чтобы вероятность, что предложенный к приемке прибор подвергнется двукратному измерению, равнялась заранее данному числу P_2, и 3° чтобы при этих условиях математическое ожидание квадрата систематической ошибки принятых приборов достигало минимума.

Приведен один численный пример иллюстрирующий, на сколько можно снизить математическое ожидание квадрата систематической ошибки принятых приборов, если заменить встречаемый в некоторых инструкциях прием, по которому $a=0{,}9q$, $\beta=1{,}1q$, $\gamma=q$ (q — постоянная определенная инструкцией), приемом удовлетворяющим условиям 1°, 2° и 3° с теми-же вероятностями P_1 и P_2.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

ON THE OPTIMAL METHOD OF WATER METER ACCEPTANCE

SUMMARY

The paper concerns the acceptance of measuring instruments, *e.g.* water meters manufactured in established conditions. The distribution of the probability of systematic errors x in instruments presented for acceptance is regarded as known and assumed to be normal with an expected value a and a standard deviation σ_0. Instruments are accepted on the basis of a single or double measurement of their systematic error. It is assumed that the measurement of the systematic error is charged with the random error and that the distribution of those random errors is known, *i.e.* we assume that the result m of the systematic error measurement of an instrument with the systematic error x has a normal distribution, with the expected value x and the standard deviation σ_1, the same for all x.

Let m_1 and m_2 denote the result of the first and the second measurements of the systematic error. The following acceptance procedure is considered: we measure m_1, accept the instrument, reject it or measure m_2, according to whether $|m_1| \leqslant a$, $|m_1| > \beta$ or $a < |m_1| \leqslant \beta$; if the second measurement has taken place, we accept the instrument or reject it according to whether the inequality $|(m_1+m_2)/2| \leqslant \gamma$ is satisfied or not.

The author concerns himself with determining such numbers a, β, γ that 1° the probability of accepting the instrument is equal to a given number P_1; 2° the probability of the instrument presented for acceptance being measured twice is equal to a given number P_2; 3° with these conditions the expected value of the square of the systematic error of the accepted instruments attains the minimum.

One numerical example is given, showing how much the expected square of the systematic error in accepted instruments can be diminished if we replace the procedure — indicated in some acceptance rules in which $a=0{,}9q$, $\beta=1{,}1q$, $\gamma=q$ (q — a constant fixed by the rules) by a procedure satisfying conditions 1°, 2° and 3° with the same probabilities P_1 and P_2.
