

J. O D E R F E L D (Warszawa)

## O WYRYWKOWYM SPRAWDZANIU PRZEDMIOTÓW PRZY WARUNKU DWUSTRONNYM\*)

**1. Wstęp.** Wyroby przemysłowe sprawdza się na zgodność z pewnymi wymaganiami. Bardzo często formułuje się te wymagania w sposób następujący:

Przedmiot masowego wytwarzania uważa się za dobry, jeśli liczba charakteryzująca jego właściwość jest zawarta w umówionych granicach. Na przykład za dobry uważamy sworzeń o średnicy od 1,8 do 2,0 mm, odcinek kabla o oporze od 0,48 do 0,50 oma, splotkę pocisku, która spala się w czasie od 0,002 do 0,005 sekundy itd.

W wielu przypadkach, na przykład gdy sprawdzenie wszystkich przedmiotów jest technicznie niemożliwe lub nieopłacalne, musimy poprzestać na sprawdzaniu wrywkowym.

Znamy wiele metod sprawdzania wrywkowego w opisanych warunkach. Większość jednak dotyczy kontroli w toku produkcji, gdy kolejność wytwarzania przedmiotów jest znana i gdy produkcję systematycznie korygujemy na podstawie okresowego badania próbek. W. A. Wallis<sup>1)</sup> podał dwa warianty testu, nadającego się do przypadku, gdy źródłem informacji jest tylko próbka z partii przedmiotów wytworzonych w nieznannej kolejności i gdy za dobry przedmiot uważamy taki, że liczba charakteryzująca jego właściwość (o rozkładzie normalnym) jest zawarta w pewnym przedziale założonym z góry.

Wallis zauważył, że moc tych testów zależy zarówno od średniej w populacji generalnej, jak od odchylenia średniego. Nie wyznaczył jej jednak poprzestając na dość grubym oszacowaniu. W niniejszym artykule podajemy numeryczny sposób, który pozwala na ustalenie mocy testu z dowolną dokładnością.

**2. Plan badania wrywkowego.** Własność  $X$  przedmiotu masowo wytwarzanego uważamy za zmienną losową. Zakładamy, że rozkład  $X$

---

\*) Praca referowana 7 kwietnia 1952 r. na posiedzeniu Komisji Mechaniki Wydz. IV Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

<sup>1)</sup> W. A. Wallis, *Use of variables in acceptance inspection for percent defective*, Selected Techniques of Statistical Analysis, New York and London 1947, str. 7-93

jest normalny ze średnią  $\mu$  i z odchyleniem średnim  $\sigma$ . Założenie normalności jest spełnione z dość dużą dokładnością w wielu przypadkach. Na przykład średnica wałka wykonanego na szlifierce bezkłowej lub czas spalania się spłonki pocisku mają rozkład w przybliżeniu normalny.

Przedmiot uważamy z definicji za *dobry*, gdy

$$(1) \quad D \leq X \leq G,$$

gdzie  $D$  i  $G$  są danymi liczbami stałymi. Uważamy go za *niedobry*, gdy

$$(2) \quad X < D,$$

lub gdy

$$(3) \quad X > G.$$

*Wadliwość* w partii nazywamy stosunek liczby niedobrych przedmiotów w partii do liczby wszystkich przedmiotów w partii.

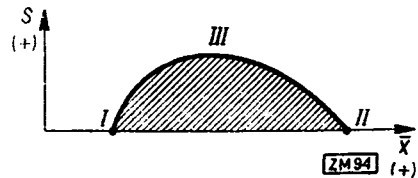
Z doświadczenia znamy tylko parametry próbki, mianowicie średnią  $\bar{x}$  i odchylenie średnie  $s$ , określone wzorem

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

*Planem badania wyrywkowego* nazywamy regułę, która na podstawie znajomości  $\bar{x}$  i  $s$  każe partię uznać za dobrą lub uznać ją za niedobłą. *Charakterystyką wyrywkowego planu badania* (krótko *charakterystyką*) nazywamy zależność między prawdopodobieństwem  $P$  uznania partii za dobrą na podstawie planu badania a wadliwością  $w$ . W tej zależności występuje jeszcze jeden parametr, określający wraz z  $w$  jednoznacznie rozkład  $X$ .

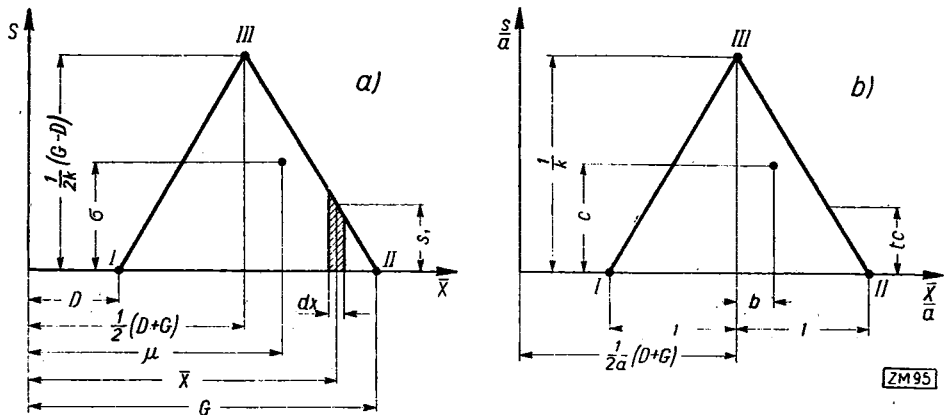
Obierzmy układ współrzędnych (rysunek 1)  $\bar{x}, s$  i zaznaczmy punkty  $I$  i  $II$  na osi  $\bar{x}$ . Poprowadźmy dowolną krzywą ciągłą  $I III II$  w pierwszej ćwiartce. Obszar  $I III II I$ , zawierający również brzeg, nazywamy *obszarem przyjęć*.

Będziemy partię uznawali za dobrą, gdy punkt  $(\bar{x}, s)$  wypadnie wewnątrz obszaru przyjęć; będziemy ją uznawali za niedobłą, gdy wypadnie poza tym obszarem. Linia  $I III II$  oraz liczebność  $n$  próbki określają całkowicie plan badania. Kontroler ma sprawdzić  $n$  sztuk, obliczyć  $\bar{x}$  oraz  $s$  i sprawdzić, gdzie leży punkt  $(\bar{x}, s)$ : w obszarze przyjęć czy poza nim.



Rys. 1. Obszar przyjęć

Zajmiemy się przypadkiem, gdy obszar przyjęć jest trójkątem równoramiennym (rysunek 2a), takim że odcięta punktu I jest  $D$ , odcięta punktu II jest  $G$ , a wysokość trójkąta jest  $(G-D)/2k$ , gdzie  $k$  jest liczbą stałą. Liczby  $n$  i  $k$  określają jednoznacznie plan badania.



Rys. 2. Oznaczenia w przypadku obszaru trójkątnego: a) wielkości wymiarowe b) wielkości bezwymiarowe

Za wyborem takiego obszaru przemawiają następujące względy:

Wielkość  $s$  jest nieujemna, więc obszar umieszczamy w pierwszej ćwiartce.

Oszacowaniem  $\mu$  jest  $\bar{x}$ , a oszacowaniem  $\sigma$  jest  $s$ . Można przypuszczać, że wartości zmiennej losowej  $X$  są tym bardziej skupione w okolicy  $\bar{x}$ , im  $s$  jest mniejsze. Plan badania powinien więc pozwalać bez dyskwalifikowania partii na tym większe zbliżenie się średniej  $\bar{x}$  do  $D$  lub do  $G$ , im odchylenie średnie  $s$  jest mniejsze. Symetria obszaru względem  $D$  i  $G$  wynika z równouprawnienia obu granic. Prostoliniowe ograniczenie obszaru przyjęć upraszcza orzekanie. Mianowicie warunek, że punkt  $(\bar{x}, s)$  ma leżeć w obszarze przyjęć, takim jak na rysunku 2a, jest równoznaczny z wymaganiami, żeby był spełniony zespół nierówności

$$(4) \quad \bar{x} - ks \geq D, \quad \bar{x} + ks \leq G.$$

Otóż rachunkowe sprawdzenie, czy (4) zachodzi, jest w warunkach fabrycznych dostatecznie łatwe.

Z tego co powiedziano wynika, że określiliśmy obszar przyjęć rozsądnie. Nie wynika natomiast, że określiliśmy go „najlepiej”. Aby wyznaczyć „najlepszy” obszar przyjęć, należy postawić planowi badania dodatkowe warunki. Na przykład można żądać, żeby, przy określonym ryzyku dostawcy, ryzyko odbiorcy było najmniejsze lub żeby w pewnych warunkach koszt badania był najmniejszy. W cytowanej już pracy

Wallis ograniczył obszar przyjęć taką krzywą, że gdy punkt o współrzędnych  $(\mu, \sigma)$  leży na niej, to prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą jest 50%.

Nie będziemy dyskutowali obszarów przyjęć wymienionych i wielu innych możliwych. Wyznamy natomiast charakterystykę dla obszaru określonego przez warunek (4).

Podaną metodę można zresztą, po drobnych modyfikacjach, zastosować do każdego obszaru przyjęć.

**3. Charakterystyka.** Wobec założonej normalności  $X$ , zmienne losowe  $\bar{x}$  i  $s$  są niezależne, wskutek czego prawdopodobieństwo  $P$ , że punkt  $(\bar{x}, s)$  znajduje się wewnątrz obszaru I III II I (rysunek 2a), można wyrazić w postaci

$$(5) \quad P = \iint_{(I \text{ III } II \text{ I})} \varphi(\bar{x}) \psi(s) d\bar{x} ds,$$

gdzie  $\varphi$  i  $\psi$  oznaczają odpowiednie gęstości prawdopodobieństwa.

Na rysunku 2a pokazano wszystkie parametry geometryczne  $D, G, \mu, \sigma, k$ , które wraz z liczebnością  $n$  próbek pozwalają obliczyć  $P$ .

Rozkład  $\bar{x}$  jest normalny ze średnią  $\mu$  i odchyleniem średnim  $\sigma/\sqrt{n}$ , rozkład zmiennej  $s$  jest dość skomplikowany, mianowicie

$$(6) \quad \psi(s) = \frac{n^{(n-1)/2} e^{-ns^2/2\sigma^2} s^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-3)/2} \sigma^{n-1}}.$$

Próby wykorzystania wzoru (6) do wyraźnego obliczenia (5) zawiodły, wobec czego wybrano drogę obliczenia numerycznego. Najpierw obliczono <sup>2)</sup> prawdopodobieństwo, że w próbie o liczebności  $n$  sztuk wielkość  $s/\sigma$  nie przekracza  $t$ , które oznaczamy symbolem  $p(s/\sigma \leq t)$ , a w dalszych obliczeniach krótko  $p(t)$ . Tablicę  $p(t)$  obliczono dla  $n=2, 3, \dots, 30$ .

Korzystając z tablicy  $p(t)$ , możemy we wzorze (5) całkować względem  $s$  wzdłuż zakreskowanych pasów  $\bar{x} = \text{const}$ , jak na rysunku 2a. A więc

$$(7) \quad P = \int_{\bar{x}=D}^{\bar{x}=G} f\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) p\left(\frac{s}{\sigma} \leq \frac{s_1}{\sigma}\right) d\left(\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right),$$

gdzie  $f$  oznacza gęstość rozkładu normalnego, a  $s_1$  ma znaczenie wyjaśnione na rysunku 2 a.

<sup>2)</sup> Obliczenie to wykonał M. Jeżewski.

Wzór (7) jest ważny dla każdego ograniczenia obszaru przyjęć. Dla interesującego nas przypadku wprowadzamy wielkości  $a, b, c, t$  określone wzorami (8), (9), (10), (11):

$$(8) \quad \frac{1}{2}(G - D) = a,$$

$$(9) \quad ab = \mu - \frac{1}{2}(D + G),$$

$$(10) \quad ac = \sigma,$$

$$(11) \quad t = \frac{s_1}{\sigma}.$$

Geometryczne znaczenie wprowadzonych wielkości ilustruje rysunek 2b. Do dalszych obliczeń przepisujemy wzór (7) w postaci

$$(12) \quad P = \int_{\bar{x}=D}^{(D+G)/2} f\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) p\left(\frac{s}{\sigma} \leq \frac{s_1}{\sigma}\right) d\left(\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \int_{\bar{x}=(D+G)/2}^G f\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) p\left(\frac{s}{\sigma} \leq \frac{s_1}{\sigma}\right) d\left(\frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = I_1 + I_2.$$

Po wyznaczeniu  $I_1$  i  $I_2$  znajdujemy

$$(13) \quad P = k\sqrt{n} \int_0^{1/ck} p(t) \left[ f\left(\frac{1+b}{c}\sqrt{n} - k\sqrt{nt}\right) + f\left(\frac{1-b}{c}\sqrt{n} - k\sqrt{nt}\right) \right] dt.$$

Wzór (13) daje prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą zależnie od parametrów  $n, k, b, c$ , gdy przyjmuje się warunek (4).

Ze względu na skomplikowaną postać funkcji podcałkowej obliczymy całkę (13) sposobem przybliżonym. Można to zrobić za pomocą wykresu lub dokładniej jednym ze znanych sposobów numerycznych.

Z kolei wyrazimy wadliwość  $w$  partii w funkcji parametrów  $b$  i  $c$ . Ponieważ  $X$  ma rozkład normalny o średniej  $\mu$  i odchyleniu średnim  $\sigma$ , a za niedobre uważamy te przedmioty, dla których  $X < D$  lub  $X > G$ , więc

$$(14) \quad w = 1 - \Theta\left(\frac{\mu - D}{\sigma}\right) - \Theta\left(\frac{G - \mu}{\sigma}\right),$$

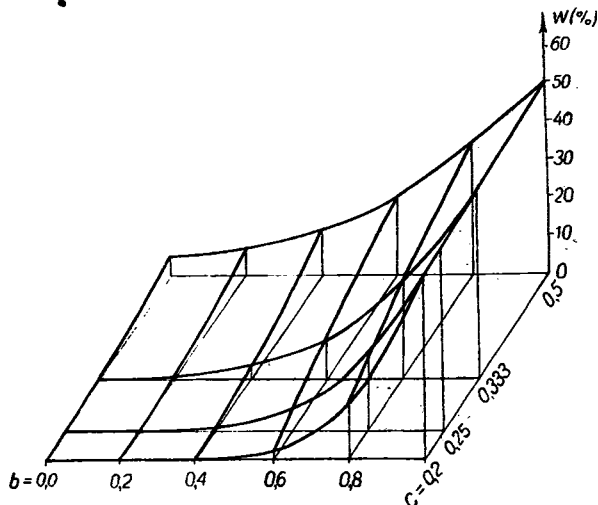
gdzie  $\Theta$  oznacza funkcję Laplace'a. Wobec (9) i (10) wzór (14) przechodzi w

$$(15) \quad w = 1 - \Theta\left(\frac{1+b}{c}\right) - \Theta\left(\frac{1-b}{c}\right).$$

Wzory (13) i (14) stanowią rozwiązanie zagadnienia. Dla każdej bowiem pary wielkości  $b$  i  $c$  otrzymujemy parę wielkości  $P$  i  $w$ , czyli jeden punkt charakterystyki. Znajdujemy więc charakterystykę w postaci  $P = \Phi(w; n, k, b)$ .

**4. Rozwiązanie efektywne.** Do wzoru (15) wchodzi tylko parametry  $b$  i  $c$  charakteryzujące partię, a nie wchodzi parametry  $n$  i  $k$  charakteryzujące plan badania. Można więc sporządzić tablicę 1 funkcji  $w(b, c)$  lub jej wykres przestrzenny (rysunek 3).

Aby pokazać jak się wyznacza charakterystykę, przyjęto  $n=14$ ,  $k=1,18$ . Z tablicy  $p(t)$  omówionej



Rys. 3. Wadliwość  $w$  w funkcji  $b$  i  $c$

TABLICA 1

Wadliwość  $w$  w funkcji parametrów  $b$  i  $c$   
(Liczby w oczkach tablicy są wyrażone w procentach)

$b \backslash c$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,200	0,0	0,0	0,1	2,3	15,9	50,0
0,250	0,0	0,0	0,8	5,5	21,2	50,0
0,333	0,3	0,8	3,6	11,5	27,4	50,0
0,500	4,6	6,3	11,8	21,3	34,5	50,0
0,666	13,4	15,1	20,2	28,2	38,6	50,1
1,000	31,7	32,7	35,5	40,0	45,7	52,3

TABLICA 2

Prawdopodobieństwo  $p(t)$ , że w próbie o liczności  $n$  sztuk  $s/\sigma$  nie przekracza  $t$ .  
Przykład dla  $n=14$

$t$	0,3780	0,4629	0,5345	0,5416	0,5834	0,6487	0,7092	0,7853	0,8420
$p(t)$	0,0002	0,0021	0,0088	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30
$t$	0,9388	1,0392	1,1015	1,1896	1,2638	1,3189	1,4063	1,5704	
$p(t)$	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999	

TABLICA 3

Schemat obliczenia  $P$  dla  $n=14$ ,  $k=1,18$ ,  $b=0$ ,  $c=2/3$

$t$	$p(t)$	$f(5,61249 - 4,41516t)$	$A(t) = f(5,61249 - 4,41516t) = p(t) f(5,61249 - 4,41516t)$	$t_{t+1} - t_t$	$\frac{1}{2}(A_{t+1} + A_t)$	$\frac{1}{2}(A_{t+1} + A_t) \times (t_{t+1} - t_t)$
0,3780	0,0002	1,6688	3,9437	0,0849	—	—
0,4629	,0021	2,0438	3,5687	,0716	0,000010	0,000001
0,5345	,0088	2,3600	3,2525	,0071	,000020	—
0,5416	,0100	2,3912	3,2213	,0418	,000050	,000002
0,5834	,0200	2,5758	3,0367	,0653	,000267	,000017
0,6487	,0600	2,8641	2,7484	,0605	,001146	,000069
0,7092	,1000	3,1312	2,4813	,0761	,004913	,000374
0,7853	,2000	3,4672	2,1453	,0567	,013871	,000786
0,8420	,3000	3,7175	1,8950	,0968	,043851	,004245
0,9388	,5000	4,1449	1,4676	,1004	,116606	,011707
1,0392	,7000	4,6882	1,0243	,0623	,203159	,012657
1,1015	,8000	4,8633	0,7492	,0881	,288769	,025440
1,1896	,9000	5,2522	0,3603	,0742	,367633	,026536
1,2638	,9500	5,5798	0,0327	,0074	,359407	,002659
1,27118	,9626	5,61249	0,0000	—	—	0,084493

$P = 8,83032 \cdot 0,0884493 \approx 74,6\%$

w rozdziale 3 reprodukuje wartości dla  $n=14$ . Rozwiązując ten przykład ograniczymy się do przypadku  $b=0$ . Technologiczne znaczenie tego przypadku omówimy dalej. Teraz przyjmujemy kolejno różne wartości na  $c$  i dla każdej obliczamy  $P$  ze wzoru (13). Jako przykład podamy obliczenie dla  $c=2/3$ . Przez podstawienie  $n=14, k=1,18, b=0, c=2/3$  przekształcamy wzór (13) w następujący:

$$(16) \quad P = 8,83032 \int_0^{1,27118} p(t)f(5,61249 - 4,41516t)dt = 8,83032 \int_0^{1,27118} A(t)dt.$$

Wartości  $p$  bierzemy z tabelicy 2, wartości  $f$  z tabelicy funkcji normalnej. Obliczenie przebiega jak w tabelicy 3. Kolejne operacje opisano w nagłówkach. Całkę występującą we wzorze (16) oszacowano jako

$$\sum \frac{1}{2} (A_{i+1} + A_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Wartość  $p$  dla wartości argumentu  $t$  równej 1,27118, która nie występuje w tabelicy 2, ustalono przez interpolację kwadratową.

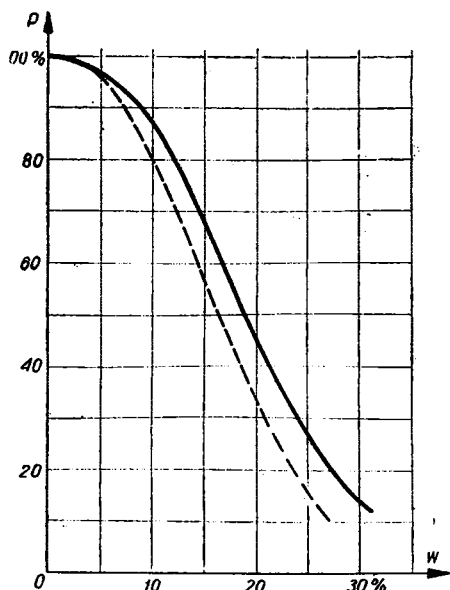
Powtarzając obliczenie jak w tabelicy 3 dla różnych wartości  $c$ , otrzymano wyniki zapisane w tabelicy 4. W tabelicy tej umieszczono również wartości  $w$  odczytane z tabelicy 1.

Dolne dwa wiersze tabelicy 4 dają trzy punkty charakterystyki, której przebieg pokazano linią ciągłą na rysunku 4.

TABLICA 4

$P$  i  $w$  w funkcji  $c$  przy  $n=14, k=1,18, b=0$  ( $P$  i  $w$  wyrażone w procentach)

$c$	0,500	0,666	1,000
$P$	97,6	74,6	11,6
$w$	4,6	13,4	31,7



ZM 97

Analogiczne krzywe można otrzymać dla innych wartości  $b$ , na przykład  $b=0,2, 0,4, \dots$ . Należy jednak przypuszczać, że w zastosowaniach praktycznych  $b$  ma wartości bliskie

Rys. 4. Charakterystyka.  $n=14, k=1,18, b=0$ ; linia ciągła obliczona z uwzględnieniem dokładnego rozkładu  $s$ ; linia przerywana obliczona dla przybliżonego rozkładu  $s$



zeru. Przypomnijmy bowiem, że  $b$  lokalizuje środek zgrupowania rozkładu  $X$  w partii względem środka pasa tolerancyjnego (rys. 2b). Intuicja i rachunek wskazują zgodnie, że przy tych samych parametrach  $n, k, c, w$  prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą maleje, w miarę jak  $|b|$  rośnie. Najkorzystniejsza jest więc taka regulacja procesu technologicznego, że  $b=0$ . Od tej reguły są co prawda wyjątki. Jeśli na przykład zmienna losowa  $X$  oznacza wymiar przedmiotu obrabianego skrawaniem, to zwykle krzywa rozkładu  $X$  jest nieco przesunięta w kierunku górnej granicy  $G$  pasa tolerancyjnego przy obróbce powierzchni zewnętrznych, jest zaś przesunięta w kierunku dolnej granicy  $D$  przy obróbce powierzchni wewnętrznych. Jest to spowodowane naturalną ostrożnością robotnika, który może poprawić przedmiot tylko przez dodatkowe skrawanie, a więc zawsze w głąb materiału. Bardziej szczegółowe rozpatrzenie tej sprawy wymaga uważnej analizy technologicznej opartej na doświadczeniu.

**5. Rozwiązanie graniczne.** Ze wzrostem liczności  $n$  próbki rozkład  $s$  zdoła, jak wiadomo, do rozkładu normalnego o średniej  $\sigma$  i odchyleniu średnim  $\sigma/\sqrt{2n}$ . Dla dużych  $n$  można więc napisać równanie (5) w postaci

$$(17) \quad P = \iint_{(IIII)} f\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) f\left(\frac{s-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}\right) d\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) d\left(\frac{s-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}}\right),$$

gdzie  $f$  oznacza gęstość rozkładu normalnego. Przyjmując znowu trójkątne ograniczenie obszaru całkowania jak na rysunku 2 i wprowadzając wielkości  $b$  i  $c$ , zdefiniowane przez wzory (9) i (10), otrzymamy po prostych przekształceniach

$$(18) \quad P = \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}(1/kc-1)} f(t) [\Theta(t_1) + \Theta(t_2)] dt,$$

gdzie

$$(19) \quad t_1 = \left(\frac{1+b}{c} - k\right) \sqrt{n} - \frac{k}{\sqrt{2}} t,$$

$$t_2 = \left(\frac{1-b}{c} - k\right) \sqrt{n} - \frac{k}{\sqrt{2}} t,$$

$\Theta$  zaś oznacza funkcję Laplace'a.

Wzorami (18) i (19) możemy posługiwać się podobnie jak wzorem (13), ale uciążliwość obliczeń nie znika. Korzyść polega na tym, że trudno o tablice, według których można by znaleźć wartości  $p(t)$  dla  $n > 30$ , podobnie jak to zrobiono w tabelicy 2, natomiast tablice funkcji normalnej są powszechnie dostępne.

Wyniki obliczeń według wzorów (18) i (19) porównano z wynikami obliczeń według (13) dla  $n=14$  i pozostałych danych jak w przykładzie z rozdziału 4 i przedstawiono je linią kreskowaną na rysunku 4. Różnice są znaczne. Dlatego przy niewielkich  $n$  należałoby używać wzoru (13).

**6. Przykład zastosowania.** Przedmiotem badania są lotnicze rakiety startowe na paliwo stałe.

Właściwością badaną jest ciąg rakiety. Badanie jest niszczące, wskutek czego możliwe są tylko badania wyrywkowe. Wymagania techniczne (wszystkie dane liczbowe przykładu są fikcyjne) przewidują, że ciąg dobrej rakiety ma być zawarty między  $D=215$  kG a  $G=245$  kG. Ponadto partie raket o wadliwości 4% mają być dyskwalifikowane przeciętnie raz na 50, partie zaś o wadliwości 8% przeciętnie raz na 10. Wytwórca stara się, żeby średni ciąg przypadał na środku pasa tolerancyjnego, gdyż po wyprodukowaniu rakiety nie są możliwe żadne poprawki (por. uwagi końcowe rozdziału 4); można więc przyjąć, że  $b=0$ . W tych warunkach do badania nadaje się plan o charakterystyce przedstawionej linią ciągłą na rysunku 3. Jest więc  $n=14$ ,  $k=1,18$ . Z partii wylosowano 14 rakiet i zmierzono ciąg każdej z nich.

Wyniki zapisano w tabelicy 5.

TABLICA 5  
Wyniki pomiarów

228,	239,	223,	221,	241,	232,	242,	<u>212,</u>	214,	223,	241,	<u>246,</u>	232,	231
------	------	------	------	------	------	------	-------------	------	------	------	-------------	------	-----

Obliczamy:

$$\bar{x} = 230,357,$$

$$s = 12,187,$$

$$\bar{x} - ks = 218,170 > 215,$$

$$\bar{x} + ks = 242,544 < 245.$$

A więc nierówności (4) są spełnione i partię uznajemy za dobrą, mimo że dwa pomiary (podkreślone w tabelicy 5) dały wyniki z lekka wykraczające poza pas tolerancyjny.

**7. Próby obiektywne.** Dla pogładowej weryfikacji metody wykonano 20 prób losując próbki z populacji o znanym rozkładzie normalnym, którego średnia  $\mu=30$  a odchylenie średnie  $\sigma=10$ . Przyjęto  $n=14$ ,  $k=1,18$   $b=0$   $c=2/3$ . Według wzoru (10)  $a=\sigma/c=15$ . A więc

$$D=30-15=15, \quad G=30+15=45.$$

Stosownie do tablicy 4 prawdopodobieństwo uznania partii za dobrą jest  $P=74,6\%$ . Znaczy to, że w 20 próbach około 15 powinno dać orzeczenie, że partia jest dobra, a 5 zaś orzeczenie, że partia jest niedobra. W rzeczywistości otrzymano wyniki 14 i 6, więc dobrze zgodne z przewidywanymi.

**8. Program przyszłych badań.** W toku dotychczasowych prac wyłonilo się kilka zagadnień do rozwiązania. Oto ich spis:

a. Analiza dokładności rozwiązania granicznego, poszukiwanie prostszych sposobów oszacowania całki (13), ułożenie tablicy<sup>3)</sup> znormalizowanych planów o charakterystykach odpowiadających dogodnej gradacji. Są to zadania dla rachmistrzów.

b. Analiza różnych obszarów przyjęcia, zgodnie z końcowymi uwagami rozdziału 2; rozwiązanie wymaga współpracy matematyka, technika i ekonomisty.

c. Wyjaśnienie, w jakich przypadkach technologicznych jest słuszna hipoteza rozkładu normalnego  $X$  i w jakich granicach zawiera się parametr  $b$ . Jest to zadanie dla inżynierów i praktyków statystycznej kontroli jakości w fabrykach.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca wpłynęła dnia 23. 7. 1952 r.*

ЯН ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

**О ВЫБОРОЧНОЙ ПРОВЕРКЕ ПРЕДМЕТОВ  
ПРИ ДВУСТОРОННИМ УСЛОВИИ**

**РЕЗЮМЕ**

Работа посвящена выборочной проверке при приеме таких предметов, свойства которых можно характеризовать некоторым числом  $X$ . Требования относительно качества часто так сформулированы, что к годным причисляются те предметы, для которых  $X$  заключается в техническом пределе ( $D \leq x \leq G$ ), а к негодным — те, для которых  $X$  находится вне этого предела ( $X < D$ ) или ( $X > G$ ). Отношение  $w$  числа негодных предметов в партии к числу всех предметов называем *долей брака*.

<sup>3)</sup> W czasie drukowania tej pracy Grupa S.K.J. Inst. Mat. PAN taką tablicę obliczyła (*przypisek autora*).

Важными примерами технических применений являются: допуски, прочность стали, сопротивление электрических катушек, емкость конденсаторов, вес консервов в банках и другие.

Прием предложенный В. А. Валлисом заключается в следующем: Извлекаем выборку  $n$  предметов и измеряем исследуемое свойство каждого из них, получая  $n$  чисел  $x_i$ .

Вычисляем

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

$$(2) \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Партию считаем годной, если одновременно имеют место неравенства

$$(3) \quad \bar{x} - ks \geq D,$$

$$(4) \quad \bar{x} + ks \leq G.$$

Величины  $n$  и  $k$  определяют план исследования.

Цель работы состоит в определении характеристики, т. е. зависимости между вероятностью, что партия будет годной, а долей брака в партии.

Предположим, что исследуемое свойство  $X$  распределено по нормальному закону со средней  $\mu$  и дисперсией  $\sigma$ .

Вводя обозначения

$$(5) \quad b = \frac{\mu - 0,5(G+D)}{0,5(G-D)},$$

$$(6) \quad c = \frac{\sigma}{0,5(G-D)}.$$

$$(7) \quad f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2},$$

$$(8) \quad \Theta(z) = \int_0^z f(w) dw,$$

$$(9) \quad p(t) = \int_0^t \frac{n^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)! 2^{(n-3)/2}} e^{-ny^2/2} y^{n-2} dy,$$

получаем характеристику в параметрической форме

$$(10) \quad P = k\sqrt{n} \int_0^{1/ck} p(t) \left[ f\left(\frac{1-b}{c}\sqrt{n} - k\sqrt{nt}\right) + f\left(\frac{1-b}{c}\sqrt{n} + k\sqrt{nt}\right) \right] dt,$$

$$(11) \quad w = 1 - \Theta\left(\frac{1+b}{c}\right) - \Theta\left(\frac{1-b}{c}\right).$$

Величины  $w, z, y, t$  — действительные переменные и в окончательном результате не выступают; если кроме этого исключим  $s$  из (10) и (11), получим характеристику в следующем виде:

$$(12) \quad P = \Phi(w; n, k, b).$$

Можно показать, что для данных  $k$  и  $n$  максимальное значение  $P$  достигается при

$$b = 0,$$

т. е. при

$$\mu = 0,5(G + D).$$

Соответствует это локализации центра группировки распределения  $\bar{x}$  в середине технического предела. Приблизительно такая именно локализация применяется интуитивно в производстве. Для  $b = 0$  получаем

$$(13) \quad P = \Phi_1(w; n, k).$$

Подбирая  $k$  и  $n$  можно найти характеристику наиболее подходящую для каждого случая с технической и экономической точки зрения.

В работе приведен метод и пример эффективных вычислений и результат контрольного эксперимента.

J. ODERFELD (Warszawa)

### ON SAMPLING INSPECTION WITH A TWO-SIDED CRITERION

#### SUMMARY

The paper deals with sampling inspection in the acceptance of objects whose property can be expressed by a certain number  $X$ . The requirements regarding quality are often formulated in such a way that we consider as good those objects for which  $X$  is contained in the tolerance belt ( $D \leq X \leq G$ ), and as defective — those for which  $X$  lies beyond the tolerance belt ( $X < D$  or  $X > G$ ). The ratio of the number of defective objects in a lot to the total number of objects is called the *percent defective*.

Important examples of technical applications are dimensional tolerances, the strength of steel, electric coil resistance, condenser capacity, the weight of processed food in a tin, etc.

The procedure proposed by W. A. Wallis is as follows. We take a sample of  $n$  objects and measure the investigated property in each of them, obtaining  $n$  numbers  $x_i$ .

We calculate

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

$$(2) \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

The lot is regarded as good if the following inequalities hold simultaneously:

$$(3) \quad \bar{x} - ks \geq D,$$

$$(4) \quad \bar{x} + ks \leq G.$$

The quantities  $n$  and  $k$  determine the sampling plan. The subject of the paper is the calculation of the operating characteristics, *i.e.* the relation between the probability  $P$  of accepting the lot as good and the percent defective  $w$  of the lot.

We assume that the investigated property  $X$  has a normal distribution with the mean  $\mu$  and the mean deviation  $\sigma$ .

Introducing the notation

$$(5) \quad b = \frac{\mu - 0,5(G + D)}{0,5(G - D)},$$

$$(6) \quad c = \frac{\sigma}{0,5(G - D)},$$

$$(7) \quad f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2},$$

$$(8) \quad \Theta(z) = \int_0^z f(w) dw,$$

$$(9) \quad p(t) = \int_0^t \frac{n^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)! 2^{(n-3)/2}} e^{-ny^2/2} y^{n-2} dy.$$

we obtain the operating characteristics in the parametric form

$$(10) \quad P = k\sqrt{n} \int_0^{1/ck} p(t) \left[ f\left(\frac{1+b}{c}\sqrt{n} - k\sqrt{n}t\right) + f\left(\frac{1-b}{c}\sqrt{n} - k\sqrt{n}t\right) \right] dt,$$

$$(11) \quad w = 1 - \Theta\left(\frac{1+b}{c}\right) - \Theta\left(\frac{1-b}{c}\right).$$

The quantities  $w, z, y, t$  are apparent variables and do not appear in the final result; removing moreover  $c$  from (10) and (11), we obtain the operating characteristics in the form

$$(12) \quad P = \Phi(w; n, k, b).$$

It can be shown that with given  $k$  and  $n$  the greatest  $P$  occurs for

$$b = 0,$$

*i.e.* for

$$\mu = 0,5(G + D).$$

This corresponds to the localization of the concentration point of the distribution of  $\bar{x}$  in the centre of the tolerance belt. Such localization, approximately, is often intuitively applied in production. Taking  $b = 0$  we obtain

$$(13) \quad P = \Phi_1(w; n, k).$$

Choosing appropriate  $k$  and  $n$  we can find an operating characteristics suitable for any aim from the technical and economical point of view.

The paper gives a method and an example of effective calculations, and the result of a verifying experiment.

---