ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1961)

R. ZIELIŃSKI (Warszawa)

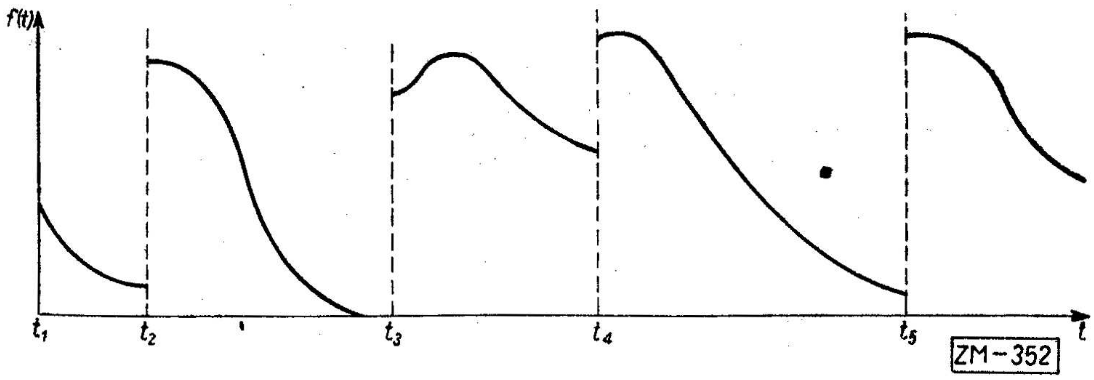
PEWNA METODA OBLICZANIA CZASU POSTOJU POCIĄGÓW PRZED WEJŚCIEM DO WĘZŁA

Wstęp. Zadaniem tego artykułu jest oszacowanie łącznego czasu postoju pociągów przed wejściem do węzła kolejowego. *Węzeł kolejowy* definiuję jako układ o dowolnej strukturze geometrycznej, składający się ze skończonej liczby elementarnych odcinków toru; przez *elementarny odcinek toru* rozumiem odcinek toru między dwoma kolejnymi semaforami. Zagadnienie rozwiązuje się przy założeniach:

1. W każdej chwili t może znajdować się na węźle tylko jeden pociąg.

2. Czas zajęcia węzła jest jednakowy dla wszystkich pociągów i wynosi d.

3. Znana jest gęstość $f(t)$ rozkładu zgłoszeń pociągów do węzła. Funkcja ta jest określona tak, że prawdopodobieństwo zgłoszenia jakie-



Rys. 1. Przykładowy kształt gęstości $f(t)$ rozkładu zgłoszeń. Wartości $t_1, t_2, \ldots$ odpowiadają chwilom, w których powinny zgłosić się pociągi jadące zgodnie z rozkładem jazdy

gokolwiek pociągu w chwili $(t, t+dt)$ jest równe $f(t)dt$. Funkcja $f(t)$ może mieć kształt przedstawiony na rysunku 1.

4. Liczba pociągów przejeżdżających przez węzeł w okresie $\langle 0, T\rangle$ jest równa n.

5. Czasy zgłoszeń poszczególnych pociągów są między sobą niezależne.

Uzyskany rezultat pozwala oszacować oczekiwany łączny czas postoju przed węzłem wszystkich pociągów przejeżdżających przez ten węzeł w badanym okresie $\langle 0, T\rangle$.

Rozwiązanie ogólne. Będziemy rozpatrywali odcinek $\langle 0, T\rangle$ osi czasu. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą punktami na tym odcinku, odpowiadającymi faktycznym momentom zgłoszeń poszczególnych pociągów. Wartości $x_1, \ldots, x_n$ są realizacjami niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o jednakowym rozkładzie $f(t)$. Jeżeli i-ty pociąg zgłosi się do węzła w chwili, gdy węzeł jest wolny, to okres zajęcia węzła przez ten pociąg jest równy (x_i, x_i+d). Jeżeli k-ty pociąg zgłosi się w momencie x_k, przy czym $x_i < x_k < x_i+d$, będzie czekał przez czas x_i+d-x_k, a następnie zajmie węzeł w czasie od x_i+d do x_i+2d. Łączny czas zajęcia węzła przez oba pociągi wynosi w tym przypadku $2d$. W ogólnym przypadku wielkość ta jest równa $D = nd$.

Gdyby węzeł kolejowy był tak skonstruowany, że oba pociągi mogłyby przejechać równocześnie, wówczas czas zajęcia węzła byłby równy $x_k+d-x_i < 2d$. W przypadku n pociągów wielkość tę oznaczymy przez D_n. Za oszacowanie łącznego czasu czekania wszystkich pociągów przyjmujemy wartość $D-D_n$. Oszacowanie takie jest słuszne przy pewnych dodatkowych założeniach, o których powiemy później.

Wielkość D_n, jako zależna od wartości x_i $(i = 1, \ldots, n)$, jest zmienną losową. Oszacujemy wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.

Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ przyjęły pewne konkretne wartości $x_1, \ldots, x_n$. Funkcja $C_i(x)$, spełniająca warunki

$$C_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad x_i < x < x_i+d, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases} \tag{1}$$

jest funkcją charakterystyczną zbioru punktów przedziału (x_i, x_i+d). Funkcja

$$1-\prod_{i=1}^{n}[1-C_i(x)] \tag{2}$$

jest funkcją charakterystyczną zbioru punktów, które znajdują się co najmniej w jednym z przedziałów (x_i, x_i+d). Przy danych wartościach x wielkości $C_i(x)$ zależą od zmiennej losowej X_i. Ponieważ zmienne losowe X_i są z założenia niezależne, zmienne losowe $C_i(x)$ są również niezależne. Łączna długość odcinka czasowego D_n jest zatem

$$D_n = E\Big[\int_0^T \Big\{1-\prod_{i=1}^{n}[1-C_i(x)]\Big\}\,dx\Big] = \int_0^T \Big\{1-\prod_{i=1}^{n} E[1-C_i(x)]\Big\}\,dx. \tag{3}$$

Zgodnie z definicją (1) otrzymujemy dla danego x

$$(4)\qquad E[1-C_i(x)] = 1-E[C_i(x)] = 1-P\{x-d < X_i < x\} = \\ = 1-F(x)+F(x-d)$$

i ostatecznie

$$(5)\qquad D_n = \int_0^T \{1-[1-F(x)+F(x-d)]^n\}\,dx.$$

Łączny czas czekania na wejście do węzła jest $D-D_n$, co zostało poprzednio omówione.

Zakres stosowania metody. Wprowadzam oznaczenie x_i^* dla wartości i-tej statystyki pozycyjnej w zbiorze $x_1, \ldots, x_n$. Jeżeli $x_{i+k+1}^* < x_i^*+kd$, powiadam, że zdarzyła się kolizja k-tego rzędu. Jeżeli w zaobserwowanym ciągu wartości $x_1, \ldots, x_n$ zdarzają się kolizje najwyżej pierwszego rzędu, to opisana metoda daje poprawny wynik. W przypadku kolizji drugiego rzędu w wielkości $D-D_n$ jest uwzględniony tylko raz łączny czas czekania drugiego i trzeciego pociągu, podczas gdy z ekonomicznego punktu widzenia istotne jest uwzględnianie m razy odcinka czasu, w którym czeka m pociągów. Analogicznie jest w przypadku kolizji rzędu wyższego od drugiego. Miernikiem błędu opisanej metody może być zatem prawdopodobieństwo powstania kolizji co najmniej drugiego rzędu. Jak łatwo zauważyć, wymaganie braku kolizji rzędu większego niż pierwszy jest równoznaczne z wymaganiem niewielkiej liczby n pociągów.

Rozwiązanie dla ruchu pociągów towarowych. W ruchu pociągów towarowych zakłada się zwykle, że rozkład $f(t)$ zgłoszeń jest równomierny na odcinku $\langle 0, T\rangle$; założenie to jest równoznaczne z założeniem, że w każdej chwili prawdopodobieństwo zgłoszenia się pociągu do węzła jest jednakowe. W tym przypadku otrzymujemy

$$D_n = \left[1-\left(1-\frac{d}{T}\right)^n\right]T.$$

Wyniki obliczeń wykonanych dla tego przypadku, przy założeniu $T = 1440$ min (doba) i $d = 4$ min, przedstawiono w tabelce:

Liczba pociągów n	Łączny czas czekania min
10	2
100	63
200	228

Praca wpłynęła 18. 11. 1959

Р. ЗЕЛИНСКИЙ (Варшава)

НЕКОТОРЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ВРЕМЕНИ СТОЯНКИ ПОЕЗДОВ ПЕРЕД ВЪЕЗДОМ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ УЗЕЛ

РЕЗЮМЕ

В работе при помощи характеристических функций множества даётся способ оценки времени ожидания поезда при стоянке его перед въездом на железнодорожный узел. Времена регистрации прибытия отдельных поездов трактуются как точки x_i, разложенные случайно на оси времени. Исследуется характеристическая функция (1) множества точек отрезка (x_i, x_i+d), где d является временем занятия железнодорожного узла поездом. Для общего времени ожидания даётся выражение $nd-D_n$, где n число поездов в рассматриваемом промежутке времени $(0, T)$, а D_n задано формулой (5). В работе также рассматриваются условия корректности применения описанного метода.

R. ZIELIŃSKI (Warszawa)

A METHOD OF CALCULATING THE WAITING TIME OF TRAINS BEFORE ENTERING A JUNCTION

SUMMARY

The paper contains a method of estimating the waiting time of a train before it enters a junction by means of characteristic functions of a set. The arrival times of individual trains are regarded as points x_i distributed in a random manner on the time axis. We consider the characteristic function (1) of the set of points of the interval (x_i, x_i+d) where d is the time of occupying the junction by a given train. For the joint period of waiting we obtain the expression $nd-D_n$ where n is the number of trains in a given time interval $(0, T)$ and D_n is given by formula (5). The paper discusses the conditions for which the application of the method described is correct.
