

J. MURZEWSKI (Kraków)

*O OBJĘTOŚCI I ŚRODKU CIĘŻKOŚCI  
KUBŁA ELIPTYCZNEGO*

1. Sprawa poprawnego obliczenia objętości i środka ciężkości kubła eliptycznego wynikała przy wykonywaniu ekspertyzy przez prof. F. Wojnarskiego, kierownika katedry budownictwa stalowego Politechniki Krakowskiej. Przedmiotem tej ekspertyzy było zarysowanie się stropu w budynku mieszczącym urządzenia do zmiękczenia wody kotłowej; groziło to zatrzymaniem ruchu w dużym zakładzie przemysłowym. Dla przedsięwzięcia odpowiednich środków zaradczych należało zbadać przyczyny tego uszkodzenia budowlanego.

Spośród sił, na które strop był narażony, decydujący wpływ miał ciężar blaszanego leja zsykowego, wypełnionego mączką wapienną. Lej ów miał dolny otwór kołowy, górny zaś — eliptyczny; był więc kształtu eliptycznego kubła. Przy obliczeniach statycznych wyłoniła się nieprzewidziana trudność. Mianowicie wzór na odległość środka ciężkości kubła od dolnej podstawy, wzięty ze znanego zbioru wzorów matematycznych i tablic stosowanych w budownictwie stalowym [4], dał nieprawdopodobny wynik. Rzecz charakterystyczna, że ten błędny wzór powtarzał się od kilkudziesięciu lat we wszystkich wydaniach tego skrupulatnego skądinąd podręcznika. Rewizja wzoru na odległość środka ciężkości kubła nasunęła dalsze wątpliwości, nieco ogólniejszej natury. W ich wyniku zakwestionowany został także wzór na objętość kubła, jakkolwiek nie tkwi w nim zapewne żadna pomyłka obliczeniowa ani drukarska. Nieścisłość tego wzoru wynika z niewłaściwego, naszym zdaniem, przyjęcia kształtu przekrojów kubła. Ponieważ sprawa poprawnego obliczania objętości i środka ciężkości kubła może mieć znaczenie w liczniejszych zastosowaniach technicznych (np. dna bunkrów i silosów), wydaje się, że warto ją przedstawić bliżej.

2. Różne źródła [1], [3], [4], [5] objaśniają zgodnie, że *kubel* jest to bryła, której podstawami są *dowolne elipsy*. Rysunek aksonometryczny kubła (rys. 1), jaki jest często do tych objaśnień dołączany, wskazuje ponadto, że odpowiednie osie podstaw są równoległe i że prosta łącząca środki podstaw jest do podstaw prostopadła. Przekroje pionowe kubła

przechodzące przez odpowiednie osie podstaw są *symetrycznymi trapezami*. Te wskazówki jednakże nie określają jednoznacznie kształtu bryły. Aby to zrobić, należy je uzupełnić jeszcze jednym stosownym postulatem co do własności geometrycznych kubła.

Mógłby to być na przykład następujący postulat:

(A) *Wszystkie przekroje poziome (prostopadłe do osi bryły) są elipsami.*

Niewątpliwie taki właśnie warunek przyjęli autorzy znanych nam wzorów na objętość kubła [1], [3], [4], [5]. Jest rzeczą oczywistą, że warunek ten jest spełniony w szczególnym przypadku *stożka eliptycznego ściętego*, czyli kubła eliptycznego o podstawach podobnych. Jeśli jednak założymy, że warunek ten ma być spełniony dla dowolnych kubłów, a więc także dla kubłów o podstawach

niepodobnych, to zachodzi pytanie, czy przyjęcie takiego postulatu nie pociąga za sobą konieczności odmówienia tym ostatnim innych własności charakterystycznych dla stożków eliptycznych ściętych. Weźmy pod uwagę na przykład takie własności geometryczne:

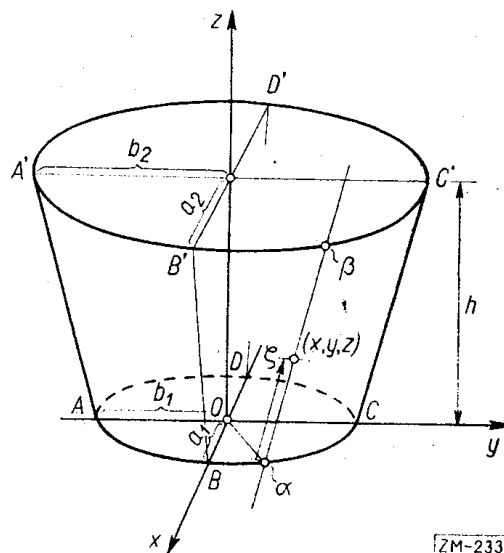
(B) *Wszystkie przekroje pionowe przechodzące przez oś bryły są trapezami.*

(C) *Pobocznica jest powierzchnią prostokreślną tego rodzaju, że dowolne dwie proste leżące na pobocznicy dzielą obwody podstaw na części proporcjonalne.*

Okazuje się, że każdy z postulatów (A), (B), (C), łącznie z założeniami wymienionymi na wstępie tego ustępu, określa inną bryłę<sup>(1)</sup>. Przekonano się o tym, gdy obliczając objętość tych brył otrzymano za każdym razem inny wzór. Którą z tych brył nazwać kubłem? Wydaje się, że żadna z powyżej zdefiniowanych na to nie zasługuje. Ze względu na skojarzenia praktyczne i techniczne możliwości produkcji (np. przy wykonaniu z blachy), *kubłem* powinna być bryła, której

(D) *pobocznica jest powierzchnią rozwijalną na płaszczyźnie, a taka bryła na ogół różni się od trzech poprzednich.*

Gdy podstawami kubła (tj. bryły  $D$ ) są mocno wydłużone elipsy o dłuższych osiach wzajemnie prostopadłych, bryła  $D$  zbliża się kształtem



Rys. 1.  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  – elipsy,  $ACC'A'$  i  $BDD'B'$  – trapezy.

<sup>(1)</sup> Bryły te oznaczono odpowiednio przez  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ .

do czworościanu. Gdy podstawy są w przybliżeniu podobne geometrycznie, bryła  $D$  różni się niewiele od brył  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . W tym ostatnim więc przypadku można by dopuścić dla bryły o poboczniczy rozwijalnej wzory wyprowadzone dla innych brył o podstawach eliptycznych (np. rozpozszecznione w literaturze wzory dla bryły  $A$ ), należy jednak zdawać sobie sprawę z wielkości błędu, jaki się wtedy popełnia. Dla wyjaśnienia i rozstrzygnięcia tych rzeczy podajemy: w ustępie 3 — wyprowadzenie równania poboczniczy kubła eliptycznego (tzn. bryły  $D$ ), w ustępie 4 — obliczenie objętości i położenia środka ciężkości kubła eliptycznego, w ustępie 5 — porównanie wzorów dla kubła z wzorami uzyskanymi dla brył  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

3. *Równanie poboczniczy kubła eliptycznego* wyprowadzimy opierając się na *twierdzeniu Gaussa* z geometrii różniczkowej. Głosi ono, że powierzchnia jest rozwijalna na płaszczyźnie, jeżeli we wszystkich punktach iloczyn krzywizn głównych równa się zeru:

$$(1) \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = 0.$$

Przez każdy punkt poboczniczy kubła da się poprowadzić prosta leżąca na poboczniczy. Wszystkie proste leżące na poboczniczy muszą oczywiście przeciąć się z obwodem podstawy dolnej i podstawy górnej.

Współrzędne punktów poboczniczy uzależnimy od dwóch parametrów. Jeden parametr przypiszemy prostej, na której dany punkt się znajduje, drugi parametr wyznaczy położenie punktu na tej prostej.

Za pierwszy parametr obieramy wielkość  $a$  charakteryzującą punkt, w którym prosta przecina elipsę dolną. Położenie punktów na prostej określamy parametrem  $\zeta$  proporcjonalnym do odległości punktu od podstawy dolnej.

Parametr  $a$  obieramy w ten sposób, by współrzędne punktu dolnej elipsy, w układzie pokazanym na rysunku 1, były określone wzorami

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos a, \\ y_1 &= b_1 \sin a, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Każdemu punktowi obwodu podstawy dolnej przyporządkowana jest prosta, która z kolei wyznacza na obwodzie podstawy górnej punkt o współrzędnych

$$(3) \quad \begin{aligned} x_2 &= a_2 \cos \beta, \\ y_2 &= b_2 \sin \beta, \\ z_2 &= h. \end{aligned}$$

Parametr  $\beta$  jest funkcją parametru  $a$ , na razie bliżej nie znaną:

$$(4) \quad \beta = f(a).$$

Parametr  $\zeta$  definiujemy jako stosunek odległości punktu od podstawy dolnej do całkowitej wysokości kubła:

$$(5) \quad \zeta = z/h; \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Współrzędne punktów prostej leżącej na poboczniczy kubła są funkcjami liniowymi parametru  $\zeta$  i spełniają warunki brzegowe (2) i (3):

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= a_1(1 - \zeta) \cos a + a_2 \zeta \cos \beta, \\ y &= b_1(1 - \zeta) \sin a + b_2 \zeta \sin \beta, \\ z &= h\zeta. \end{aligned}$$

Przy nieznanej funkcji (4) równania (6) odpowiadają dowolnej poboczniczy prostokątnej. Jak wiadomo z geometrii różniczkowej [2], zachodzi wzór

$$(7) \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

gdzie

$$(8) \quad E = \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2,$$

$$(9) \quad F = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial a},$$

$$(10) \quad G = \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)^2,$$

$$(11) \quad L = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \end{vmatrix} : \sqrt{EG - F^2},$$

$$(12) \quad M = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial a} & \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial a} & \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \end{vmatrix} : \sqrt{EG - F^2},$$

$$(13) \quad N = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{vmatrix} : \sqrt{EG - F^2}.$$

Ze wzorów (1) i (7) wynika, że równanie poboczniczy rozwijalnej ma spełniać warunek

$$(14) \quad LN - M^2 = 0.$$

Z równań (6) i wzoru (11) wynika, że

$$(15) \quad L = 0,$$

a to dlatego, że

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} = 0,$$

a zatem warunek (14) przyjmuje postać

$$(16) \quad M = 0.$$

W wyrażeniu (12) licznik przyrównujemy do zera:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} a_1 \sin \alpha - a_2 \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} & -b_1 \cos \alpha + b_2 \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha} & 0 \\ -a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta & -b_1 \sin \alpha + b_2 \sin \beta & h \\ -a_1(1-\zeta) \sin \alpha - a_2 \zeta \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} & b_1(1-\zeta) \cos \alpha + b_2 \zeta \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy równanie

$$(18) \quad a_1 b_2 \sin \alpha \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha} - a_2 b_1 \cos \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Ponieważ funkcja (4) nie może być funkcją stałą, więc

$$(19) \quad d\beta/d\alpha \neq 0$$

i w rezultacie

$$(20) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1} \operatorname{tg} \alpha = k_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{gdzie} \quad k_1 = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}.$$

Z równań poboczniczy prostokreślnej (6) rugujemy zmienną  $\beta$  za pomocą wzoru (20) i otrzymujemy równanie poboczniczy kubła:

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= a_1(1-\zeta) \cos \alpha + a_2 \zeta \sqrt{1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ y &= b_1(1-\zeta) \sin \alpha + b_2 k_1 \zeta \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ z &= h\zeta. \end{aligned}$$

4. Objętość kubła we współrzędnych walcowych wyraża się wzorem

$$(22) \quad V = \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi,$$

gdzie

$$(23) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Przy ustalonym  $z$  współrzędne biegunowe (23) są funkcjami jedynie parametru  $\alpha$ . Odpowiednio do tego transformujemy wzór (22):

$$(24) \quad V = 2h \int_0^1 d\zeta \int_0^{\pi/2} \left( x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} y \right) d\alpha.$$

Objętość kubła obliczono za pomocą wzoru (24) i równań (21). Otrzymano

$$(25) \quad V = 2h \int_0^1 d\zeta \int_0^{\pi/2} \left[ a_1 b_1 (1-\zeta)^2 \cos^2 \alpha + a_2 b_2 \zeta^2 \frac{k_1}{\cos^2 \alpha (1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} + \right. \\ \left. + a_1 b_2 \zeta (1-\zeta) \frac{k_1}{\cos \alpha (1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}} + a_2 b_1 \zeta (1-\zeta) \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + a_1 b_1 (1-\zeta)^2 \sin^2 \alpha + a_2 b_2 \zeta^2 \frac{k_1^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} + \right. \\ \left. + a_1 b_2 \zeta (1-\zeta) \frac{\sin \alpha k_1 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} + a_1 b_2 (1-\zeta) \frac{k_1^2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha (1+k_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^{3/2}} \right] d\alpha = \\ = \frac{\pi h}{3} \left[ a_1 b_1 + \frac{2E(k_1)}{\pi \sqrt{k_1}} \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2 b_2} \right],$$

gdzie  $E(k)$  oznacza całkę eliptyczną zupełną drugiego rodzaju, a

$$k_1 = a_1 b_2 / a_2 b_1, \quad k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}.$$

Obliczenia przeprowadzono przy założeniu, że  $k_1 < 1$ .

Jeżeli nierówność powyższa nie jest spełniona, to przez całkowanie w układzie współrzędnych przeniesionych do górnej podstawy, otrzymamy analogiczne wzory, tylko modulem całek eliptycznych będzie

$$k_2 = a_2 b_1 / a_1 b_2 = 1/k_1, \quad k_2' = \sqrt{1 - k_2^2}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(26) \quad k = \min(k_1, k_2), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad 0 \leq k \leq 1,$$

otrzymujemy wzór ogólny

$$(27) \quad V = \frac{\pi h}{3} \left[ a_1 b_1 + \frac{2}{\pi \sqrt{k}} E(k') \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2 b_2} \right].$$

Aby nie przytaczać obliczeń momentu statycznego, analogicznych do obliczeń wskazanych wzorem (25), podamy od razu ostateczny wzór na odległość środka ciężkości kubła od dolnej podstawy:

$$(28) \quad z_0 = \frac{a_1 b_1 + (4/\pi\sqrt{k}) E(k') \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1} + 3a_2 b_2}{a_1 b_1 + (2/\pi\sqrt{k}) E(k') \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1} + a_2 b_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

5. Wyprowadzenie wzorów dla innych brył o podstawach eliptycznych pomijamy jako mniej istotne i mało urozmaicone pod względem matematycznym. Przytoczymy gotowe wyniki i porównamy je z wynikami uzyskanymi dla kubła.

Objętość bryły typu  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i kubła  $D$  można wyrazić jednym symbolicznym wzorem

$$(29) \quad V = \frac{1}{3} \pi h [a_1 b_1 + \gamma \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1} + a_2 b_2],$$

gdzie współczynnik  $\gamma$  zależny jest od parametru  $k$  określonego wzorem (26) i od typu bryły. Dla poszczególnych typów współczynnik ten wynosi odpowiednio

$$(30) \quad \gamma_A = (1+k)/2\sqrt{k},$$

$$(31) \quad \gamma_B = \frac{2}{\pi} K(k') \sqrt{k},$$

gdzie  $K(k')$  jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju,

$$(32) \quad \gamma_C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \sqrt{k} \cos a \cos \beta + \sqrt{\frac{1}{k}} \sin a \sin \beta \right) da,$$

gdzie  $a$  i  $\beta$  są związane równaniem przestępnym

$$\frac{E(c', a)}{E(c')} = \begin{cases} \frac{E(\sqrt{k^2 - c^2}/k, \beta)}{E(\sqrt{k^2 - c^2}/k)}, & \text{gdy } 0 \leq c \leq k, \\ 1 - \frac{E(\sqrt{c^2 - k^2}/c, \frac{1}{2}\pi - \beta)}{E(\sqrt{c^2 - k^2}/c)}, & \text{gdy } k \leq c \leq \sqrt{k}; \end{cases}$$

tutaj  $E(c', a)$  oznacza całkę eliptyczną niepełną drugiego rodzaju,

$$c = \min(a_1/b_1, b_1/a_1, a_2/b_2, b_2/a_2), \quad c' = \sqrt{1 - c^2}.$$

Dla bryły  $D$  (czyli kubła) mamy

$$(33) \quad \gamma_D = \frac{2}{\pi} E(k') \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

W dogodniejszej formie wzór (29) wygląda następująco:

$$(34) \quad V = \frac{1}{3}\pi h [a_1 b_1 + \delta(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2].$$

$$(35) \quad \delta_A = \frac{1}{2};$$

$$(36) \quad \delta_B = \frac{2}{\pi} K(k') \frac{k}{1+k};$$

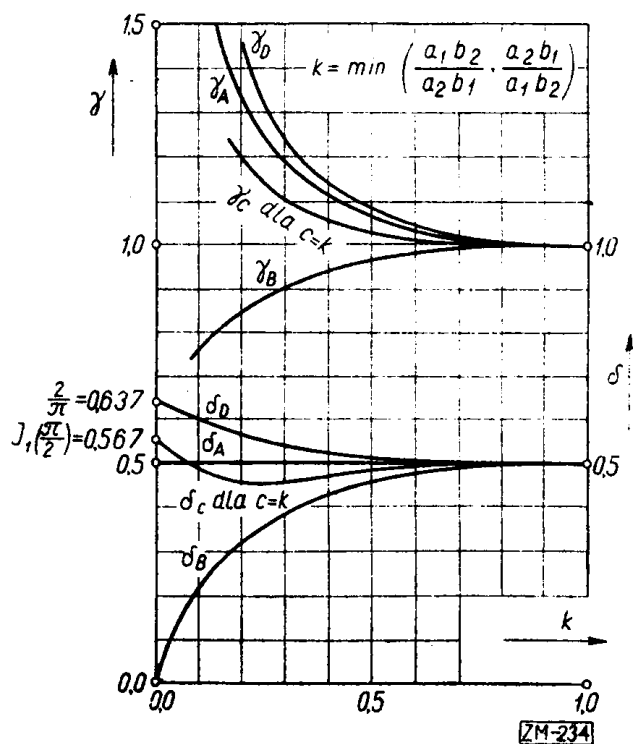
$$(37) \quad \delta_C = \frac{2}{\pi(1+k)} \int_0^{\pi/2} (k \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta) da;$$

$$(38) \quad \delta_D = \frac{2}{\pi} E(k') \frac{1}{1+k}.$$

Objętość eliptycznego stożka ściętego, czyli kubła o podstawach podobnych, wynika z wzoru (34) przy odpowiednim współczynniku  $\delta$  (35)-(38) i  $k = 1$ :

$$(39) \quad V = \frac{1}{3}\pi h [a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2].$$

Wartości współczynników  $\gamma$  i  $\delta$  dla brył  $A, B, C$  i  $D$  porównano ze sobą na załączonych wykresach (rys. 2 — symbol  $J_1$  na rysunku oznacza funkcję Bessla pierwszego rzędu).



Rys. 2

Szeroko spopularyzowany wzór dla bryły  $A$  ((34) i (35)) można potraktować jako przybliżony wzór na objętość kubła. Gdy mimośrodowo



elips niewiele się od siebie różnią ( $k > \frac{1}{2}$ ), błąd popełniony jest niewielki ( $\Delta < 3\%$ ). Jednakże, gdy elipsy daleko będą odbiegać od podobieństwa, przybliżenie okazać się może niedopuszczalne. W granicznym przypadku ( $k = 0$ ) błąd dochodzi do wielkości

$$\Delta = \frac{V_D - V_A}{V_D} = \frac{a_1 b_2 (2/\pi - \frac{1}{2})}{(2/\pi) a_1 b_1 + a_2 b_2} = 0,215 / \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \right) = 21,5\%.$$

Gdy mimośrodę podstaw znacznie się od siebie różnią, należy stosować wzory (34)-(38). Wartości współczynnika (38), z nieco większą dokładnością niż to można odczytać z rysunku 2, podaje tablica 1.

TABLICA 1

Wartości współczynnika  $\delta_D = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E(k')}{1+k}$ ,  $k = \min\left(\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}, \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}\right)$

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,6366	6315	6254	6202	6153	6093	6047	6001	5959	5919
0,1	0,5880	5844	5809	5774	5741	5711	5684	5652	5624	5599
0,2	0,5574	5549	5526	5502	4580	5459	5440	5421	5402	5375
0,3	0,5369	5362	5337	5322	5307	5294	5280	5267	5254	5243
0,4	0,5232	5221	5211	5201	5191	5182	5173	5164	5156	5148
0,5	0,5140	5133	5126	5119	5112	5106	5100	5094	5089	5084
0,6	0,5079	5074	5069	5065	5061	5057	5053	5049	5046	5042
0,7	0,5039	5036	5033	5030	5028	5025	5023	5021	5019	5017
0,8	0,5015	5014	5012	5011	5010	5008	5007	5006	5005	5004
0,9	0,5003	5003	5002	5002	5001	5001	5000	5000	5000	5000
1,0	0,5000									

Uwagi powyższe odnoszą się też do wzoru na odległość środka ciężkości kuba eliptycznego od jego dolnej podstawy. Wzór taki — analogicznie do wzorów (29) i (34) — można napisać w formie

$$(40) \quad z_0 = \frac{a_1 b_1 + 2\gamma \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1} + 3a_2 b_2}{a_1 b_1 + \gamma \sqrt{a_1 b_2 a_2 b_1} + a_2 b_2} \cdot \frac{h}{4}$$

lub w równoważnej postaci

$$(41) \quad z_0 = \frac{a_1 b_1 + 2\delta(a_1 b_2 + a_2 b_1) + 3a_2 b_2}{a_1 b_1 + \delta(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2} \cdot \frac{h}{4}$$

Współczynniki  $\gamma$  wyrażają się wzorami (30)-(33), a  $\delta$  wzorami (35)-(38).

#### Prace cytowane

[1] L. Ballenstedt, *Wzory i tablice do obliczeń statycznych w budownictwie*, Zeszyt 1, Poznań 1951.

[2] S. P. Finikow, *Geometria różniczkowa*, Warszawa 1956.

[3] Hütte, *Des Ingenieurs Taschenbuch*, Band I., 27. Aufl., Berlin 1942; *Manuel de l'ingénieur*, vol. I, Paris-Liège 1947.

[4] *Stahl im Hochbau. Taschenbuch für Entwurf, Berechnung und Ausführung von Stahlbauten*, Düsseldorf, 10. Aufl. 1938; 11. Aufl. 1949; 12. Aufl. 1953.

[5] R. Wendehorst, *Bautechnische Zahlentafeln*, 5. Aufl, Leipzig-Berlin 1941.

*Praca wpłynęła 17. 3. 1956*

И. МУРЖЕВСКИЙ (Краков)

### ОБ ОБЪЕМЕ И ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВЕДРА

#### РЕЗЮМЕ

*Ведром* называется тело, основания которого являются эллипсами, а вертикальные сечения проходящие через соответствующие оси эллипсов являются равносторонними трапециями (рис. 1). Однако это определение не характеризует тела полностью. В работе описаны четыре разных тела, которые удовлетворяют этому определению (они обозначены через  $A, B, C, D$ ); из них автор предлагает называть ведром тело  $D$  с развёртывающейся боковой поверхностью. Неточности в формулах для объёма и положения центра тяжести ведра, встречающиеся в публикациях, вызваны в общем неопределённостью самой формы ведра. Можно также встретить совсем неверные формулы [4] наверно вследствие ошибки.

На основании теоремы Гаусса из дифференциальной геометрии (1) выведено уравнение боковой поверхности ведра (21). Потом вычислены при помощи эллиптических интегралов формулы для объёма ведра (27) и расстояния центра тяжести от основания (28). Формулы для случая ведра с развёртывающейся боковой поверхности сравнены с формулами для трёх остальных из перечисленных тел. Объём всех четырёх тел можно записать одной формулой (29), или эквивалентной формулой (34). В этих формулах от рода тела зависят только коэффициенты  $\gamma$  и  $\delta$ . Значения этих коэффициентов сравнены на графике (рис. 2). Ошибка при применении неточных формул для объёма ведра может превзойти 20%.

J. MURZEWSKI (Kraków)

### ON THE VOLUME AND CENTROID OF THE ELLIPTICAL BUCKET

#### SUMMARY

The *bucket* is a term given to a solid whose bases are arbitrary ellipses and whose vertical sections passing through the corresponding axes of the ellipses are symmetrical trapezoids (fig. 1). This definition, however, is not sufficient. The author distinguishes and describes four different solids answering to the above definition (denoted by the symbols  $A, B, C$  and  $D$ ) and suggests that only one of the four, namely the solid  $D$  with a developable lateral surface, be termed a bucket. Inaccuracies in the formulas of the volume and the position of the centre of gravity of the bucket, occurring in publications, are mostly due to incomplete descriptions of the

shape of the bucket. Other completely false formulas also occur [4], being probably due to error.

On the grounds of Gauss' theorem in differential geometry (1) the author introduces the equations of the lateral surface of the bucket (21). Then, using elliptic integrals, he formulates the formulas of the volume of the bucket (27) and the distance of the centre of gravity from the base (28). The formulas concerning the bucket with a developable lateral surface are compared with the corresponding formulas for the remaining three solids mentioned at the beginning of the paper. The volume of each of the four solids in question can be expressed by a general symbolic formula (29) or by an equivalent one (34). In these formulas only the coefficient  $\gamma$ , or  $\delta$ , is dependent on the type of the solid. The magnitudes of these coefficients are compared on a graph (fig. 2). If the exact formula of the volume of the bucket is not applied, the error committed may exceed 20%.

---