

A. HUSKOWSKA (Wrocław)

O DOKŁADNOŚCI NIEKTÓRYCH POMIARÓW PRZYRODNICZYCH

W wielu pracach przyrodnicy podają pomiary tych czy innych wielkości; pomiary te zwykle służą do dalszych opracowań i wniosków. Zrozumiała jest więc tendencja badaczy do jak najdokładniejszego mierzenia. Często jednak materiały eksperymentalne podaje się z fikcyjną dokładnością. Można to zauważyć obserwując częstość występowania cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na ostatnim miejscu znaczącym pomiarów. Jeśli przedział mierzonej wielkości jest duży w porównaniu z przedziałem wynikającym ze zmiany o jednostkę ostatniej cyfry znaczącej, to częstości te powinny być w przybliżeniu równe. Np. cyfra 0 powinna występować równie często, jak cyfra 9. A oto kilka przykładów opracowanych ostatnio przez Grupę Zastosowań Przyrodniczych i Gospodarczych Instytutu Matematycznego PAN, a wziętych z innych pracowni naukowych.

TABLICA 1
Czaszki szczurze

Ostatnia cyfra	Długość podstawy czaszki	Szerokość czaszki	Wysokość potylicy
0	78	76	67
1	5	0	4
2	6	9	7
3	12	12	16
4	10	17	16
5	35	28	39
6	7	20	12
7	11	5	12
8	17	13	7
9	6	7	7
χ_0^2	246,6	225,7	185,9

A. Zoologowie zmierzili 187 czaszek szczurzych z rzekomą dokładnością do 0,1 mm. Zmierzono:

- 1) długość podstawy czaszki (od 23,0 mm do 48,0 mm),
- 2) szerokość czaszki na grzebieniach skroniowych (od 9,6 mm do 16,0 mm),
- 3) wysokość potylicy (od 5,9 mm do 12,5 mm).

Spośród wyników każdego z pomiarów około 19 powinno kończyć się na 0, tyleż na 1, na 2 itd. Okazuje się, że jest zupełnie inaczej. Tablica 1 zawiera ilości cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na ostatnim miejscu tych wyników. Na przykład przy pomiarze długości czaszki 78 wyników pomiaru podano w całkowitych milimetrach (ostatnia cyfra znacząca, tj. pierwsza

cyfra po przecinku była zerem); 5 wyników miało po przecinku cyfrę 1; 6 pomiarów cyfrę 2 itd.

B. Antropologowie zmierzili stopy poborowych z powiatu lubelskiego z rzekomą dokładnością do 1 mm. Zmierzono:

- 1) długość stopy (od 218 mm do 350 mm),
- 2) wysokość kostki (od 50 mm do 90 mm),
- 3) obwód przez palce (od 200 mm do 310 mm),
- 4) obwód przez podbicie (od 200 mm do 300 mm),
- 5) obwód przez piętę i podbicie (od 245 mm do 396 mm).

Zmierzono 361 poborowych, przy tym długość stopy zmierzono tylko u 357.

Tablica 2 zawiera ilości cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 na ostatnim miejscu.

TABLICA 2
Stopy poborowych

Ostatnia cyfra	Długość stopy	Wysokość kostki	Obwód przez palce	Obwód przez podbicie	Obwód przez piętę i podbicie
0	87	51	229	273	277
1	26	35	5	0	2
2	31	35	20	11	16
3	20	44	19	8	10
4	21	42	10	9	4
5	63	30	37	36	25
6	24	39	7	2	12
7	29	32	13	13	7
8	28	30	18	9	7
9	28	23	3	0	1
$\%^2$	119,2	16,4	1169,4	1753,8	1798,9

W obu podanych tablicach — z wyjątkiem kolumny „wysokość kostki” — widzimy rażąco niejednostajność występowania poszczególnych cyfr na ostatnim miejscu znaczącym. Cyfra 0 we wszystkich kolumnach występuje znacznie częściej niż pozostałe. W niektórych kolumnach dostrzegamy także nadmierną częstość występowania cyfry 5.

O czym to świadczy?

Gdyby pomiary były robione rzeczywiście z taką dokładnością, na jaką wskazuje ilość zapisywanych cyfr, wówczas końcowe cyfry występowałyby z jednakową mniej więcej częstością. To znaczy, tyle samo w przybliżeniu byłoby czaszek o długości zakończonej na 0, co na 1, 2, itd.

Zaobserwowanej niejednorodności nie można w żaden sposób wytłumaczyć wahaniem przypadkowym. Prawdopodobieństwo tego, że przy-

padkiem otrzyma się taką wielką niejednorodność, oblicza się za pomocą kryterium χ^2 . W ostatnim wierszu każdej tablicy podano wielkości χ_0^2 obliczone przy porównaniu każdej kolumny tablicy z kolumną teoretyczną, w której w każdym wierszu jest ta sama liczba; dla tablicy 1 jest to liczba 18,7, dla tablicy 2 zaś 36,1. Wartość χ_0^2 obliczona dla ilości różnych cyfr na ostatnim miejscu wyników pomiaru długości podstawy czaszki szczura wynosi 246,6, co jest wartością bardzo dużą. Prawdopodobieństwo przypadkowego zajścia takiego zdarzenia jest więc znikomo małe, praktycznie równe zeru, gdyż według tablicy rozkładu χ^2 dla 9 stopni swobody $P(\chi^2 > 27,9) = 0,001$. W pozostałych kolumnach tablic 1 i 2 (oprócz kolumny drugiej w tablicy 2, tj. wysokości kostki) otrzymujemy wielkości χ_0^2 mniejsze lub większe niż w omawianym przykładzie, zawsze jednak prawdopodobieństwo przypadkowego uzyskania takich wartości jest znikomo małe. Takich wielkich różnic nie można kłaść na karb przypadku. Dowodzą one, że we wszystkich pomiarach w tablicach 1 i 2 (oprócz wysokości kostki w stopach poborowych) ostatnią cyfrę zapisywano błędnie. Nadmiar cyfr 0 i 5 i niedobór cyfr sąsiednich świadczy o tendencji (być może podświadomej) do zaokrąglania wyników. Nie możemy nawet z pomiarów czaszek szczurzych, zanotowanych z rzekomą dokładnością do 0,1 mm, uzyskać dokładności 0,2 mm, gdyż zaokrąglanie ostatniej cyfry (na przykład do parzystej) nie wiele poprawi. Nawet zaokrąglenie do 0,5 mm da zbyt dużo pomiarów zakończonych na 0 w porównaniu z pomiarami zakończonymi na 5. W tym więc przypadku ostatnia cyfra jest zupełnie bezwartościowa i wykorzystując materiał musimy ją odrzucić.

C. Nieco lepiej przedstawia się sprawa w dużym materiale (ponad 600) czaszek ludzkich, wziętym z pracy F. Wokroja [2]. Można się było spodziewać, że dla tego materiału rozkład ostatnich cyfr będzie w przybliżeniu jednostajny, gdyż czaszka ludzka jest przedmiotem dużym, sztywnym, a przyrządy pomiarowe używane przez antropologów pozwalają mierzyć z dokładnością do 1 mm.

Tablica 3 zawiera wyniki pomiaru dla wybranych cech:

- 1) wysokość czaszki $b-ab$ (od 117 mm do 151 mm),
- 2) długość czaszki $g-op$ (od 246 mm do 313 mm).

TABLICA 3
Czaszki ludzkie

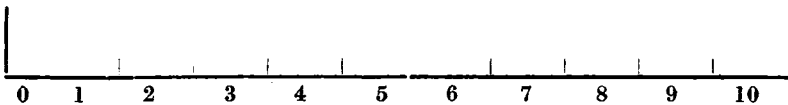
Ostatnia cyfra	Wysokość czaszki ($b-ab$)	Długość czaszki ($g-op$)
0	72	82
1	50	66
2	77	71
3	56	59
4	62	49
5	63	86
6	53	69
7	63	67
8	47	79
9	56	30
razem pomiarów: 599		658
χ_0^2	13,4	37,9

Rozpatrzmy pierwszą kolumnę tablicy 3.

Częstości ostatnich cyfr nie są tu idealnie zgodne, jednak ich odstępstwa od jednostajności można wytłumaczyć wahaniem przypadkowym. Wartość χ^2_0 obliczona dla pierwszej kolumny równa się 13,4, a prawdopodobieństwo dla 9 stopni swobody przypadkowego przekroczenia tej wielkości jest 0,10.

Z tego wynika, że pomiary w kolumnie pierwszej tablicy 3 nie są obciążone takim dużym błędem, jak pomiary w tablicach 1 i 2. Jednak już druga kolumna tablicy 3 wykazuje większe i statystycznie istotne różnice. Mimo pozornie jednakowych warunków pomiaru obu cech antropologicznych, ujętych w tablicy 3, pomiary drugiej z nich wykazują podobne tendencje, jak poprzednio dyskutowane pomiary z tablic 1 i 2. Nawet więc przy dobrych warunkach pomiarów trudno się ustrzec od pewnych tendencji zniekształcających materiały pomiarowe. Można stąd wyciągnąć następujące wnioski:

1. Głównym źródłem omawianych tu błędów jest, jak się wydaje, zaokrąglanie wyników pomiarów „na oko” wtedy, gdy wielkość mierzona pada między dwie sąsiednie kreski podziałki i musimy cechę którejś z nich przyjąć za wynik pomiaru. Decyzję tę ułatwia proponowana przez H. Steinhausa [1] specjalna podziałka, w której cechuje się nie kreski, ale przedziały między kreskami:



Przy takiej podziałce unikamy zastanawiania się w przypadku, gdy mierzony przedmiot ma na przykład około 3,5 mm, czy to już jest 4 mm, czy jeszcze 3 mm, gdyż widzimy wyraźnie, czy koniec przedmiotu pada przed kreską odgraniczającą przedział 3 od 4, czy za nią.

2. Przed rozpoczęciem pomiarów należy ustalić, jaką dokładność pomiaru pozwalają osiągnąć warunki techniczne.

Np. przy pomiarach stóp poborowych tylko wysokość kostki mierzona była precyzyjnym przyrządem pomiarowym, pozwalającym dokładnie ustawić nogę i odczytać wynik z dokładnością 1 mm. Natomiast inne pomiary wykonane taśmą nie mogły mieć dokładności 1 mm, tym bardziej, że stopa jest przecież odkształcalna.

3. Można również przed rozpoczęciem dużej ilości pomiarów (np. wielu setek) zrobić serię kontrolną dla kilkudziesięciu pomiarów i sprawdzić jednostajność występowania cyfr na ostatnim miejscu.

Prace cytowane

[1] J. Łukasiewicz i H. Steinhaus, *O mierzeniu przez kalibrowanie*, Zastosowania Matematyki 2 (1955), str. 225-231.

[2] F. Wokroj, *Wczesnośredniowieczne czaszki polskie z Ostrowa Lednickiego*, Materiały i Prace Antropologiczne 1 (1953), str. 60-134.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 19. 4. 1955 r.

A. ХУСКОВСКАЯ (Вроцлав)

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЬСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Опытный материал естествоиспытательских измерений часто подается с фиктивной точностью. Источником погрешностей является обычно пренебрежение технического анализа достигнутой точности и округливание на-глаз результатов измерений.

В некоторых случаях такие погрешности можно обнаружить, анализируя частоту последней значущей цифры. В статье проанализировано таким образом несколько подлинных серий измерений и доказано, что их точность фиктивна.

A. HUSKOWSKA (Wrocław)

ON THE ACCURACY OF SOME NATURAL SCIENCE MEASUREMENTS

SUMMARY

The experimental results of certain natural science measurements are often given with fictitious accuracy. The source of error lies in the neglect of technical analysis of the attainable accuracy and in rounding off the results of measurements at sight.

In a large number of cases it is possible to detect such errors by analysing the frequency of appearance of the last significant digit. The author analyses several authentic measurement series and proves that their accuracy is fictitious.