

J. LITWINISZYN (Kraków)

## O PRZEMIESZCZENIACH OŚRODKÓW SYPKICH

§ 1. Mechanika ośrodków sypkich posługuje się na ogół modelem ośrodka ciągłego. Aby ułożyć równanie ruchu takiego ośrodka, musimy rodzaj ośrodka wyspecyfikować. Specyfikacja taka polega na hipotetycznym ustaleniu związków między składowymi tensora naprężeń, tensora odkształceń ośrodka i pochodnymi tych tensorów względem czasu. Związki takie nazywamy *reologicznymi równaniami stanu*. W zagadnieniach mechaniki ośrodków sypkich trudność występuje przede wszystkim przy ustalaniu takich równań.

Za ośrodek sypki możemy uważać masę piasku złożoną z ogromnej ilości pojedynczych ziarn, gruzowisko skalne, masy usypisk, jak również np. zbiór potrzaskanych bloków skalnych zalegających nad podziemnym obszarem górniczo wyeksploatowanym.

Fakt, że ośrodek sypki składa się z bardzo dużej ilości ziarn, a ich ruch jest wynikiem bardzo wielu przypadkowych i niezależnych czynników, których wpływ — każdego z osobna — na zjawisko ruchu trudno określić, nasuwa myśl, żeby potraktować ruch ośrodka sypkiego jako zjawisko losowe. Przyjmujemy zatem, że przemieszczenie każdego ziarna ośrodka sypkiego jest wynikiem dużej ilości niezależnych czynników, z których każdy wywiera nieznaczący wpływ na przebieg ruchu. Przemieszczenia ziarna pod wpływem każdego z czynników są zmiennymi losowymi  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ; całkowite przemieszczenie jest równe  $S = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Metody probabilistyczne pozwalają po przyjęciu pewnych założeń określić przybliżone prawo rozkładu wielkości  $S$ . Prawo to można wyprowadzić z centralnego twierdzenia granicznego (zob. [1]). Według tego twierdzenia, jeśli zmienne losowe  $\xi_i$  są niezależne, liczba ich jest dostatecznie duża, a wielkość każdej z nich dostatecznie mała w porównaniu z ich sumą, to prawo rozkładu sumy różni się dowolnie mało od normalnego rozkładu Gaussa.

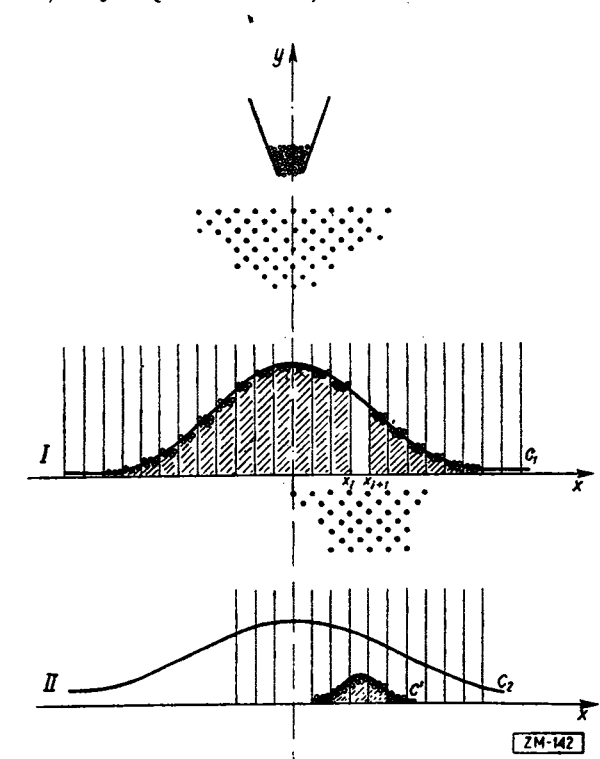
Przykładem zjawiska losowego, w którym z dużym przybliżeniem spełniają się warunki centralnego twierdzenia granicznego, jest ruch ciężkiej kulki po tzw. *desce Galtona*. Kulka taka staczając się po pochyłej

desce trafia na tkwiące w niej gwoździe i w ten sposób doznaje wielu nieznaczących impulsów w lewo lub w prawo. Ostateczne położenie kulki określone jest przez prawo rozkładu normalnego. Jeżeli zsypujemy, jak to przedstawiono na rysunku 1, większą ilość kulek, to rozkład ich końcowego położenia jest normalny. Przedstawia go krzywa  $c_1$ , symetryczna względem osi  $y$ , określona równaniem

$$(1.1) \quad y_1 = e^{-x^2/4a} / 2\sqrt{\pi a},$$

gdzie  $2a$  oznacza wariancję.

Załóżmy teraz, że usypany zbiór kulek ograniczony osią  $x$  i krzywą  $c_1$  (rys. 1) rozsypuje się po desce Galtona w ten sposób, że każdy zbiór kulek ograniczony osią  $x$ , krzywą  $c_1$  i prostymi  $x=x_i$ ,  $x=x_{i+1}$  rozsypuje się z osobna. W zjawisku tym zachodzą z dużym przybliżeniem warunki centralnego twierdzenia granicznego, tak że rozkład rozsyanego podzbioru kulek na poziomie  $II$  jest znowu normalny (krzywa  $c'$ ), przy czym w ogólności wariancja krzywej  $c'$  może być różna od wariancji krzywej  $c_1$ . Wybierzmy wielkość  $a$  spełniającą nierówność  $x_i < a < x_{i+1}$ . Rzędna punktu  $x=a$  krzywej  $c_1$  wynosi według równania (1.1)



Rys. 1

$$y_1 = e^{-a^2/4a} / 2\sqrt{\pi a}.$$

Liczba kulek na poziomie  $I$  (rys. 1) zawarta w przedziale  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  jest w przybliżeniu równa  $e^{-a^2/4a}(x_{i+1}-x_i)/2\sqrt{\pi a}$ . Kulki te przesypują się po desce Galtona z poziomu  $I$  na poziom  $II$  według prawa normalnego  $e^{-(x-a)^2/4\sigma} / 2\sqrt{\pi\sigma}$ , gdzie  $2\sigma$  oznacza wariancję na ogół różną od  $2a$ . Kulki więc będą na poziomie  $II$  ograniczone krzywą  $c'$  o równaniu

$$\bar{y}(x) = \exp\left(-\left(\frac{a^2}{4a} + \frac{(x-a)^2}{4\sigma}\right)\right) \frac{x_{i+1}-x_i}{4\pi\sqrt{a\sigma}}.$$

Przesypanie wszystkich kulek z poziomu *I* na poziom *II* utworzy krzywą  $c_2$  określoną równaniem

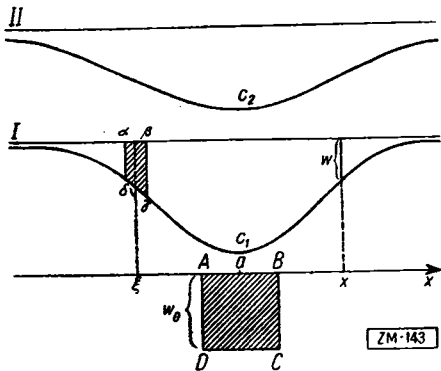
$$y_2(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\alpha\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a^2}{4\alpha} + \frac{(x-a)^2}{4\sigma}\right)\right) da,$$

z którego po scałkowaniu otrzymujemy

$$y_2(x) = e^{-x^2/4(\alpha+\sigma)} / 2\sqrt{\pi(\alpha+\sigma)}.$$

Jak więc widać z ostatniego równania, nowy rozkład kulek jest znów normalny i symetryczny względem osi  $y$ , a wariancja jego jest równa  $2(\alpha+\sigma)^1$ .

Wyobraźmy sobie teraz poziomą, nieskończenie rozległą warstwę piasku złożoną z oddzielnych ziarn. Na rysunku 2 przedstawiono przekrój takiej warstwy płaszczyzną. Poniżej tej warstwy znajduje się pusty obszar  $ABCD$  w kształcie równoległościanu nieskończenie długiego o krawędziach prostopadłych do płaszczyzny rysunku. Niech teraz obszar ten wypełni piasek zsypany się z góry. Ziarna piasku leżące pierwotnie na poziomej linii  $I$  znajdą się wówczas na krzywej  $c_1$ . Obniżenie  $w$  linii  $I$  w punkcie o współrzędnych  $x$  przyjmiemy, podobnie jak w modelu deski



Rys. 2

Galtona, jako sumę dostatecznie wielu wzajemnie niezależnych zmiennych losowych, spełniających założenia centralnego twierdzenia granicznego. Wtedy  $w$  ma rozkład normalny. Każda „elementarna” dziura  $\alpha\beta\gamma\delta$  (rys. 2), powstała na skutek obniżenia się poziomu  $I$  do położenia krzywej  $c_1$ , wywołuje znów obniżenie ziarn nad tą krzywą. Dodając wpływy wszystkich takich elementarnych dziur wzdłuż krzywej  $c_1$ , otrzymujemy, podobnie jak w przykładzie deski Galtona, krzywą  $c_2$ , która powstała

z obniżenia się poziomu  $II$ . Krzywa  $c_2$  jest znów określona prawem rozkładu normalnego.

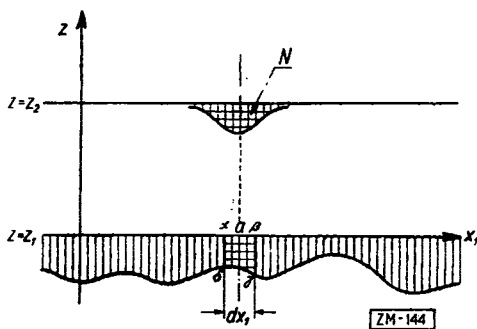
§ 2. Zwróćmy znów uwagę na wypełniony piaskiem obszar, w którym na pewnym poziomie część piasku usunięto. Rozważania przeprowadzamy względem kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, z$  o osi  $z$  skierowanej

<sup>1)</sup> Nie trudno wyobrazić sobie uogólnioną deskę Galtona, na której warunek symetrii nie byłby zachowany. W tym celu należałoby np. gwoździe na desce rozmieścić w ten sposób, żeby utworzyły one pewną „anizotropię”.

pionowo do góry. Z warstwy piasku wycinamy pewien obszar płaszczyzną pionową  $xz$  i płaszczyzną do niej równoległą, znajdującą się od niej w jednostkowej odległości. Ponieważ zjawisko uważamy za płaskie, rozważania ograniczamy tylko do tego obszaru.

Wybermy na wysokości  $z=z_1$  warstwę (zakreskowana) o na ogół zmiennej, w zależności od  $x$ , wysokości  $w(\kappa(z_1), x_1)$  (rys. 3).

Wybranie z tej warstwy objętości  $\alpha\beta\gamma\delta$  (na rysunku podwójnie zakreskowana) o współrzędnej  $x_1=a$  i szerokości  $dx_1$  wywoła na poziomie  $z=z_2$  obsunięcie się warstwy, tak że pierwotnie pozioma linia na wysokości  $z=z_2$  utworzy nieckę  $N$ . Kształt tej niecki jest zależny od prawa, według którego objętość  $\alpha\beta\gamma\delta$  rozdzieli się wzdłuż prostej  $z_2=\text{const}$ . Prawo to jest określone przez nieznaną i poszukiwaną frakcję rozkładu



Rys. 3

$$(2.1) \quad \varphi = \varphi(\kappa(z_1), a; \kappa(z_2), x),$$

gdzie  $\kappa = \kappa(z)$  oznacza pewną daną, dostatecznie regularną funkcję. Funkcja ta charakteryzuje fizyczne własności rozważanego ośrodka zmienne w zależności od  $z$ .

Wielkość wybranej objętości  $\alpha\beta\gamma\delta$  wynosi  $w(\kappa(z_1), x_1) dx_1$ , współrzędne głębokości profilu niecki  $N$  na poziomie  $z=z_2$  wynoszą więc

$$w(\kappa(z_1), x_1) \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_2), x_2).$$

Przyjmując zasadę superpozycji otrzymujemy współrzędne głębokości profilu niecki na poziomie  $z=z_2$ , wywołanej wybraniem całej warstwy o wysokości  $w(\kappa(z_1), x_1)$  na poziomie  $z=z_1$ , w postaci

$$(2.2) \quad w(\kappa(z_2), x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\kappa(z_1), x_1) \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_2), x_2) dx_1.$$

Zakładając, że w całym rozważanym obszarze ośrodka obowiązuje prawo rozkładu z równania (2.1), otrzymujemy w sposób analogiczny do poprzedniego współrzędne głębokości niecki na poziomie  $z=z_2$ , wywołanej wybraniem warstwy o wysokości  $w(\kappa(z_2), x_2)$  na poziomie  $z=z_2$ , w postaci

$$(2.3) \quad w(\kappa(z_3), x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\kappa(z_2), x_2) \varphi(\kappa(z_2), x_2; \kappa(z_3), x_3) dx_2.$$

Podstawiając wartość  $w(\kappa(z_2), x_2)$  z równania (2.2) do równania (2.3) otrzymujemy

$$(2.4) \quad w(\kappa(z_3), x_3) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(\kappa(z_1), x_1) \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_2), x_2) dx_1 \right\} \varphi(\kappa(z_2), x_2; \kappa(z_3), x_3) dx_2$$

lub, zmieniając kolejność całkowania,

$$(2.5) \quad w(\kappa(z_3), x_3) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} w(\kappa(z_1), x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_2), x_2) \varphi(\kappa(z_2), x_2; \kappa(z_3), x_3) dx_2 \right\} dx_1.$$

Z drugiej strony, współrzędne głębokości niecki na poziomie  $z=z_3$ , wywołanej wybiciem warstwy o wysokości  $w(\kappa(z_1), x_1)$  na poziomie  $z=z_1$ , otrzymujemy z równania

$$(2.6) \quad w(\kappa(z_3), x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\kappa(z_1), x_1) \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_3), x_3) dx_2.$$

Z równań (2.5) i (2.6) wynika

$$\varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_3), x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\kappa(z_1), x_1; \kappa(z_2), x_2) \varphi(\kappa(z_2), x_2; \kappa(z_3), x_3) dx_2.$$

Związek ten, spełniony przez funkcję rozkładu  $\varphi$ , ma postać równania Smoluchowskiego [9], uzyskanego w jego badaniach nad zjawiskiem dyfuzji.

Wprowadzając funkcję rozkładu

$$(2.7) \quad F(\kappa, x; \kappa', \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\kappa, x; \kappa', y) dy$$

i zakładając, że dla każdego dodatniego  $\delta$

$$(2.8) \quad \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\kappa} \int_{|y-x|>\delta} d_y F(\kappa - \Delta\kappa, x; \kappa, y) = 0$$

oraz że istnieją granice

$$(2.9) \quad \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\kappa} \int_{|y-x|<\delta} (y-x)^2 d_y F(\kappa - \Delta\kappa, x; \kappa, y) = 2a(\kappa, x),$$

$$(2.10) \quad \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\kappa} \int_{|y-x|<\delta} (y-x) d_y F(\kappa - \Delta\kappa, x; \kappa, y) = b(\kappa, x),$$

udawadnia się (zob. [2]), że funkcja  $\varphi$  spełnia równanie różniczkowe

$$(2.11) \quad \frac{\partial \varphi(\kappa, x; \tau, \xi)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} (b(\tau, \xi) \varphi(\kappa, x; \tau, \xi)) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (a(\tau, \xi) \varphi(\kappa, x; \tau, \xi)).$$

Jest to równanie Smoluchowskiego-Einsteina-Kolmogorowa, określające przebieg procesów stochastycznych. Przebieg procesu zależy od doboru współczynników funkcyjnych  $a$  i  $b$ . Założenia o tych współczynnikach mają charakter hipotezy roboczej, której słuszność może być potwierdzona obserwacją.

Przyjmujemy, że funkcja rozkładu  $\varphi$  ma własność

$$(2.12) \quad \varphi(\kappa, x; \kappa', y) = \varphi(\kappa, y; \kappa', x).$$

Stąd, zgodnie z równaniami (2.7) i (2.10),

$$(2.13) \quad b(\kappa, x) \equiv 0.$$

Dodatkowo zakładamy

$$(2.14) \quad -a(\tau, \xi) = A = \text{const.}$$

Z równań (2.2), (2.11), uwzględniając (2.13) i (2.14)<sup>2)</sup>, otrzymujemy

$$(2.15) \quad \frac{\partial w(\kappa, x)}{\partial \kappa} = A \frac{\partial^2 w(\kappa, x)}{\partial x^2}.$$

Podstawiając

$$(2.16) \quad \zeta(z) = A\kappa(z)$$

i oznaczając

$$(2.16) \quad w(\zeta/A, x) = \bar{w}(\zeta, x)$$

otrzymujemy z równania (2.15)

$$(2.17) \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}.$$

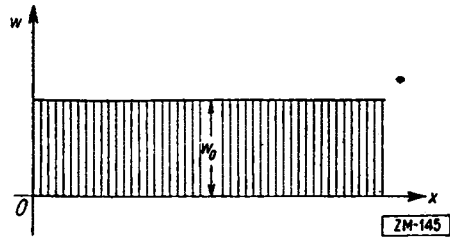
Niech na głębokości  $z = z_1$ , odpowiadającej według równania (2.16) wielkości  $\zeta_1 = A\kappa(z_1)$ , będą dane dla  $-\infty < x < \infty$  współrzędne głębokości niecki osiadania  $\bar{w} = \bar{w}(\zeta_1, x)$ . Współrzędne głębokości niecki osiadania dla dowolnego  $x$  i  $\zeta \geq \zeta_1$ , spełniające równania (2.17) oraz warunek początkowy  $\bar{w} = \bar{w}(\zeta_1, x)$ , są określone przez równanie (zob. [4], str.113-146)

$$(2.18) \quad \bar{w}(\zeta, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\zeta - \zeta_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}(\zeta_1, s) \exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4(\zeta - \zeta_1)}\right) ds.$$

<sup>2)</sup> Na ten sposób przejścia od równania (2.11) do równania (2.15), określającego wysokość niecki osiadania, zwrócił mi uwagę A. Rybarski.

§ 3. Uzyskane rozwiązanie (2.18) było podstawą do weryfikacji założeń przyjętej hipotezy roboczej o współczynnikach równania (2.11)<sup>3)</sup>.

Rozwiązanie (2.18) skonfrontowano z pomiarami w rzeczywistości. Były to pomiary geodezyjne przemieszczeń pionowych  $\bar{w}$  powierzchni znajdującej się nad obszarem podziemnym górniczo wyeksploatowanym. Podziemne roboty górnicze wywołują przemieszczenie skał znajdujących się nad tymi robotami. Przemieszczenia te objawiają się na powierzchni ziemi jako tzw. *niecka osiadania*.



Rys. 4

Dane przemieszczenia odnoszą się do terenów, dla których można było z dużym przybliżeniem przyjąć warunki zagadnienia płaskiego: pokład o stałej grubości, zalegający poziomo, wyeksploatowany na długości  $0 \leq x < \infty$ . Na prawo od 0 zalega

przestrzeń wybrana, obniżenie nad tą przestrzenią jest stałe i wynosi  $w_0$  (rys. 4).

Odpowiada to następującym warunkom początkowym w równaniu (2.17):

$$(3.1) \quad \bar{w}(0, x) = \Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \bar{w}_0 = \text{const} & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (2.17) przy podanych warunkach początkowych (3.1) ma postać

$$(3.2) \quad \omega(\zeta, x) = \frac{\bar{w}_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x\zeta^{-1/2}}^{\infty} e^{-s^2} ds.$$

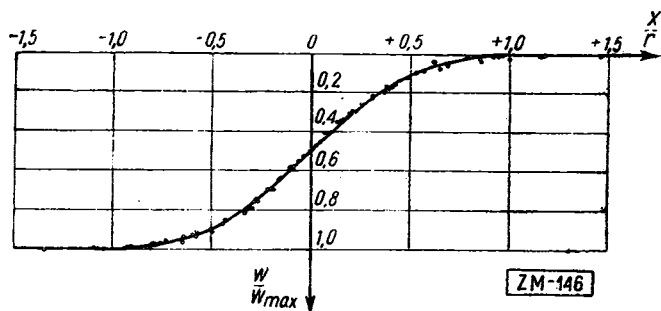
Uzyskany wynik (3.2) porównano z pomiarami niecek osiadania w warunkach odpowiadających warunkom początkowym (3.1) na wykresie bezwymiarowym (rys. 5), gdzie  $r$  zależy od odciętej pewnego charakterystycznego punktu profilu niecki [3]. Kółka zamieszczone na wykresie odpowiadają danym wziętym z pomiarów niecek osiadania na różnych kopalniach.

Uzyskane równanie (2.17), zweryfikowane dla pewnych warunków początkowych za pomocą pomiarów niecek osiadania, jest podstawą do rozwiązania wielu problemów ważnych praktycznie.

Za pomocą tego równania określa się kształt niecki osiadania [5]. Przy zastosowaniu specjalnych warunków brzegowych rozwiązano prob-

<sup>3)</sup> Rozwiązanie (2.18) ma identyczną postać z rozwiązaniem, które uzyskano również na innej drodze (zob. [5]).

lemat przemieszczeń ośrodka sypkiego w przypadku, gdy w ośrodku tym są umieszczone nieruchome sztywne ścianki zaporowe [8]. Rozwiązano problemat przemieszczeń pionowych, gdy wybierana warstwa nie zalega poziomo, lecz z upadem [7]. Równanie to pozwala również określić prze-



Rys. 5

mieszczenia pionowe wtedy, gdy przemieszczenia wywołane eksploatacją na większej głębokości mogą wywoływać w warstwach wyższych dodatkowe przemieszczenia, wywołane np. wypełnieniem się pustek istniejących w tych warstwach [8].

## Prace cytowane

- [1] W. Gliwienko, *Rachunek prawdopodobieństwa*, Warszawa 1953.
- [2] W. Feller, *Zur Theorie des stochastischen Prozesse*, Math. Annalen 113 (1936), str. 113-160.
- [3] S. Knothe, *Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania*, Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa 1 (1953), str. 22-38.
- [4] M. Krzyżański, *Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu*, cz. II, Kraków 1952.
- [5] J. Litwiniszyn, *Równania różniczkowe przemieszczeń górotworu*, Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa 1 (1953), str. 9-21.
- [6] — *Przemieszczenie górotworu w świetle teorii prawdopodobieństwa*, Archiwum Górnicztwa i Hutnictwa 2 (1954), str. 447-463.
- [7] — *Niektóre zagadnienia mechaniki górotworu w świetle równania procesów stochastycznych*, Archiwum Mechaniki Stosowanej 2.7 (1955), str. 173-197.
- [8] J. Litwiniszyn, J. Mączyński, A. Smolarski, *Zjawisko reaktywizacji górotworu*, (nieopublikowane)
- [9] M. Smoluchowski, *Über Brownsche Molekularbewegung*, Annalen der Physik 48 (1915), str. 1103-1112.

Praca wpłynęła dnia 15. 5. 1954 r.



И. ЛИТВИНИШИН (Краков)

*О ПЕРЕМЕЩЕНИИ СЫПУЧИХ СРЕД*

## РЕЗЮМЕ

Проблемы механики сыпучих сред рассматриваются, главным образом, при помощи методов механики сред непрерывных. Возникающие при этом затруднения состоят в определении соответствующего уравнения состояния сыпучих сред.

Тот факт, что сыпучую среду можно рассматривать как совокупность большого числа зёрен, и обстоятельство, что перемещение их является результатом очень большого числа случайных, взаимно независимых факторов, перечисление которых и определение влияния каждого из них на перемещения среды невозможно, подсказывает целесообразность рассматривания перемещения сыпучей среды как стохастического процесса. В качестве схемы этого перемещения принято перемещение большого числа шариков на доске Гальтона.

Исходя из этой схемы, выведено интегральное уравнение функции, при помощи которой определяются компоненты вертикальных перемещений сыпучей среды, причиной которых является выемка в этой среде некоторой области, выполняемой затем осыпающимся песком, залегающим над этой областью.

Полученное нелинейное интегральное уравнение имеет вид уравнения для стохастических процессов. Решение уравнения Смолюховского-Эйнштейна-Колмогорова, удовлетворяющее этому уравнению, определяется компонентами перемещений сыпучей среды. Полученные из этого уравнения результаты хорошо соответствуют геодезическим измерениям перемещений сыпучих сред, вызванных горными работами. Исходя из приведенного гипотеза, можно решить некоторые граничные вопросы, имеющие практическую ценность.

J. LITWINISZYN (Kraków)

*ON DISLOCATIONS OF GRANULAR MEDIA*

## SUMMARY

The problems of the mechanics of granular media are usually treated by methods of the mechanics of continuous media. The difficulty of such treatment lies in establishing a suitable equation of state for granular media.

A granular medium can be regarded as a set of a very large number of grains and their dislocation is the result of a very large number of accidental, mutually independent factors, whose enumeration, as well as the evaluation of the effect of each upon the phenomenon of movement, is impossible; this suggests the suitability of considering the phenomenon of dislocation of a granular medium as a random process. The phenomenon of shifting of a large number of balls on Galton's board is taken as a pattern of that process.

On the basis of this pattern the author deduces an integral equation of the function by means of which we define the components of vertical dislocations of a granular medium caused by emptying in it a certain area, which is then filled by the sand massed up above that area.

The non-linear integral equation obtained has the form of the equation governing stochastic processes. The solution of the Smoluchowski-Einstein-Kolmogorov equation satisfying this equation is defined by the dislocation components of a granular medium. The conclusions drawn from this equation agree well with the results of geodesic measurements of dislocations of granular media due to underground mining excavations. On the basis of the hypothesis proposed we can solve certain boundary problems of practical importance.