ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XV, 3 (1976)

W. JÄNICKE (Merseburg)

EIN NEUER ALGORITHMUS ZUR BESTIMMUNG EINER BASIS VON UNABHÄNGIGEN ELEMENTARKREISEN IN EINEM STARK ZUSAMMENHÄNGENDEN GRAPHEN

1. Einleitung. In der Literatur [2] wird ein Algorithmus zur Bestimmung einer Elementarkreisbasis eines stark zusammenhängenden Graphen G gezeigt. Die rechentechnische Realisierung des für „Hand"-Berechnung gut geeigneten Algorithmus bereitet jedoch einige Schwierigkeiten, so daß es sinnvoll erscheint, neue Verfahren zu entwickeln. Der hier vorgestellte Algorithmus ist leicht auf einer EDVA zu realisieren und benötigt geringe Rechenzeit.

2. Definitionen und Sätze. Wir betrachten gerichtete Graphen $G = (X, U)$ und folgen im wesentlichen der Terminologie in [1]. Dann ist $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ die Menge der Knoten und $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ die Menge der Bögen. Ein Bogen $u_i \in U$ wird charakterisiert durch seinen Anfangsknoten $x_{i_1} \in X$ und seinen Endknoten $x_{i_2} \in X$, $u_i = (x_{i_1}, x_{i_2})$. Gilt $x_{i_1} = x_{i_2}$, so heißt der zugehörige Bogen *Schlinge*, ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachbögen heißt *schlicht*. Eine Folge von Bögen, in der der Endknoten eines Bogens mit dem Anfangsknoten des folgenden zusammenfällt, heißt *Weg*. Fallen Anfangsknoten und Endknoten eines Weges zusammen, so entsteht ein Kreis. Existiert für beliebige Knotenpunkte x_i und x_j eines Graphen G stets ein Weg, der von x_i nach x_j geht, so heißt der Graph *stark zusammenhängend*. Im folgenden werden nur stark zusammenhängende schlichte Graphen G betrachtet.

Eine Folge von Bögen $u_1, u_2, \ldots, u_E$, wo u_i jeweils einen Knoten mit u_{i-1} und u_{i+1} gemeinsam hat (für alle $i = 2, 3, \ldots, E-1$), heißt *Kette*. Haben u_E und u_1 zusätzlich einen Knoten gemeinsam, so spricht man von einem *Zyklus*. Ein Zyklus, in dem kein Knoten zweimal auftritt, heißt *Elementarzyklus*, ein Kreis mit derselben Eigenschaft — *Elementarkreis*. Einen Zyklus kann man durch einen Vektor μ darstellen, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ mit

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn der Bogen } i \text{ nicht im Zyklus vorkommt,} \\ 1, & \text{wenn der Bogen } i \text{ im Zyklus vorkommt und im Sinne des} \\ & \text{Umlaufes gerichtet ist,} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Zyklen $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^k$ heißen *abhängig*, wenn sich Konstanten $r_1, r_2, \ldots, r_k$ (nicht alle 0) finden lassen, so daß

$$r_1\mu^1 + r_2\mu^2 + \ldots + r_k\mu^k = 0$$

gilt, sonst heißen sie *unabhängig.*

Eine *Zyklenbasis* ist eine Menge von unabhängigen Elementarzyklen $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^q$ derart, daß jeder andere Zyklus μ in der Form

$$\mu = r_1\mu^1 + r_2\mu^2 + \ldots + r_q\mu^q$$

geschrieben werden kann.

Ein Teilgraph $B = (X, V)$ von $G = (X, U)$ mit $V \subset U$ heißt *Gerüst*, wenn er genau $n-1$ Bögen und keine Zyklen besitzt. Ein *Büschel* $B = (X, V)$ ist ein Gerüst, in dem ein Knoten $a \in X$ existiert, von dem jeder andere Knoten in B auf einem Weg erreicht werden kann.

Wir benutzen folgende Sätze aus [1]:

Satz 1. *Sei G ein stark zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Bögen, dann ist die Dimension der Zyklenbasis $q = m - n + 1$.*

Satz 2. *G besitzt eine Basis $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ von q unabhängigen Elementarkreisen.*

Satz 3. *Es seien G ein zusammenhängender Graph und H ein Gerüst von G, ferner sei i ein Bogen von G, der nicht in H vorkommt. Wird i zu H hinzugefügt, so entsteht genau ein Zyklus μ^i und die verschiedenen auf diese Weise erzeugbaren Zyklen sind unabhängig und bilden eine Zyklenbasis von G.*

Unser Ziel ist es nun, eine Basis von unabhängigen Kreisen zu ermitteln.

3. Algorithmus. Wir ermitteln eine Elementarkreisbasis mit folgendem Algorithmus:

1. Bestimme einen Teilgraph $B = (X, V)$ mit der Eigenschaft: B ist ein Büschel. Setze $G_0 = B$, $V_0 = V$, $i = 1$.

2. Suche einen Bogen $u_i \in U - V_{i-1}$ $(G_i = (X, V_i))$, durch den ein Kreis $\hat{\mu}_i$ geht, dessen Bögen alle (bis auf u_i) in V_{i-1} enthalten sind. Der so gefundene Kreis ist Basiskreis. Setze $V_i = V_{i-1} + u_i$ und $i = i + 1$.

3. Führe 2 fort, bis kein $u_i \in U - V_{i-1}$ mehr existiert.

Beweis des Algorithmus.

(i) In G existiert ein Büschel: Wählt man einen beliebigen Knoten a aus, so existieren, nach Definition des stark zusammenhängenden Graphen, Wege zu jedem anderen Knoten in $X - a$.

(ii) Der Algorithmus liefert $m-n+1$ Elementarkreise: Wir betrachten $i = 1$. Es existiert mindestens ein Bogen $u_1 \in U - V_0$, dessen Endknoten a ist, andernfalls wäre G im Widerspruch zur Voraussetzung nicht stark zusammenhängend. Zum Startknoten von u_1 führt sicher ein Weg $W_1 \in V$, andernfalls wäre B kein Büschel. $\hat{\mu}_1 = W_1 + u_1$ ist also ein Elementarkreis. Er entstand durch Adjunktion genau eines Bogens zu B.

Sei G_q der Graph, der nach q Schritten entstanden ist. Er besteht aus $n-1+q$ Bögen. Wir betrachten den $(q+1)$-ten Schritt. Sei $u_{q+1} \in U - V_q$ beliebig. Dann existiert ein Kreis durch u_{q+1}, denn G ist stark zusammenhängend. Sind alle Bögen dieses Kreises (bis auf u_{q+1}) in V_q enthalten, so haben wir einen neuen Basiskreis gefunden. Existiert solch ein Kreis nicht, betrachten wir den Knoten a^1, von dem je ein Weg $W_1 \in B$ nach x_{q+1_1} und $W_2 \in B$ nach x_{q+1_2} führt, $u_{q+1} = (x_{q+1_1}, x_{q+1_2})$. Von x_{q+1_2} existiert sicher ein Weg W_3 nach a. Mindestens einer dieser Bögen ist nicht in V_q enthalten (sonst wäre ein Basiskreis gefunden); dieser Bogen wird als neuer Bogen u_{q+1} gewählt. Führt man diese Betrachtung fort, gilt nach endlich vielen Schritten s: $a^s = a$ oder (und) der Weg von x_{q+1_2} nach a^s besteht aus genau einem Bogen, der nicht im V_q enthalten ist. Dieser Bogen und der Weg im Büschel zwischen seinem End- und Anfangsknoten bilden den neuen Elementarkreis $\hat{\mu}_{q+1}$.

Läßt sich kein Bogen $u_{q+1} \in U - V_q$ finden, so gilt $G = G_q$, also auch $U = V_q$ mit $|V_q| = m$. Aus $m = n-1+q$ folgt $q = m-n+1$, d.h., nach $m-n+1$ Schritten wird das Verfahren abgebrochen und wir haben $m-n+1$ Elementarkreise gefunden.

(iii) Die Elementarkreise $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_q$ sind linear unabhängig.

Durch Adjunktion von q Bögen zu einem Büschel erhält man q linear unabhängige Elementarzyklen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$. Aus der Konstruktionsvorschrift für die Elementarkreise $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_q$ folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= k_1^1 \mu_1, \\ \hat{\mu}_2 &= k_1^2 \mu_1 + k_2^2 \mu_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{\mu}_q &= k_1^q \mu_1 + \ldots + k_q^q \mu_q. \end{aligned}$$

Dabei sind die $k_i^i \neq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, q$.

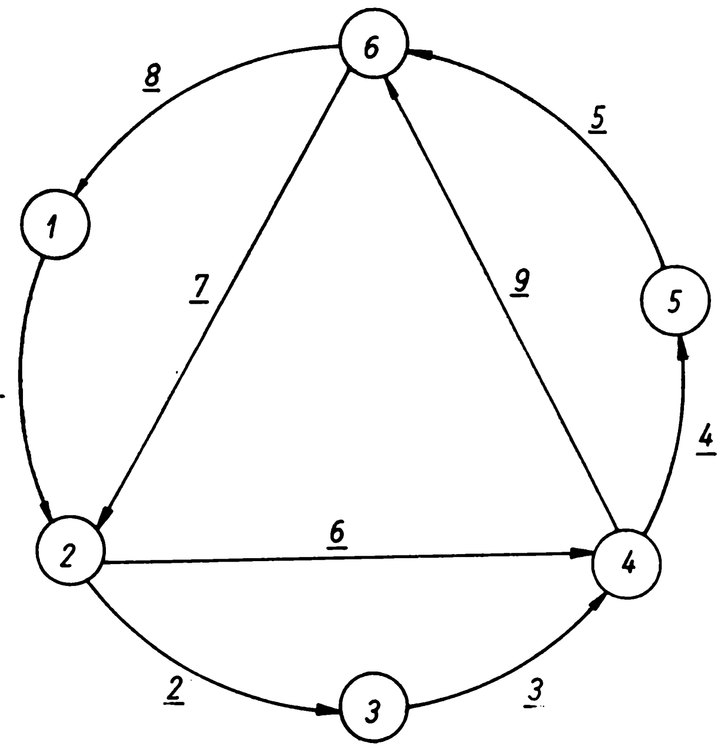
Faßt man die $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_q$ als Spalten einer Matrix $\hat{M}$ auf, die $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ als Spalten einer Matrix M und setzt

$$K = \begin{pmatrix} k_1^1 & k_1^2 & k_1^3 & \ldots & k_1^q \\ 0 & k_2^2 & k_2^3 & \ldots & k_2^q \\ 0 & 0 & k_3^3 & \ldots & k_3^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & k_q^q \end{pmatrix},$$

so gilt $\hat{M} = MK$.

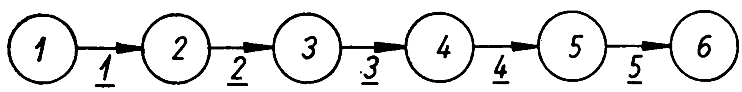
Da M und K beide den Rang q haben, muß also auch $\hat{M}$ den Rang q besitzen, also sind $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_q$ linear unabhängig.

4. Beispiel. Sei G

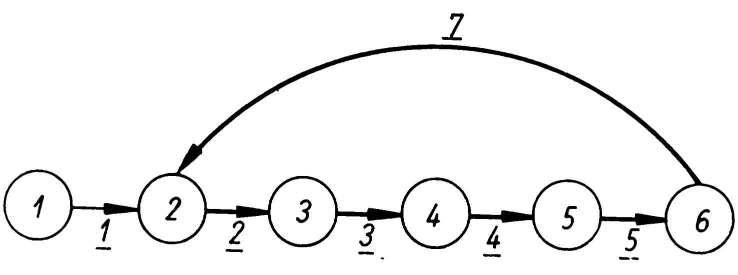


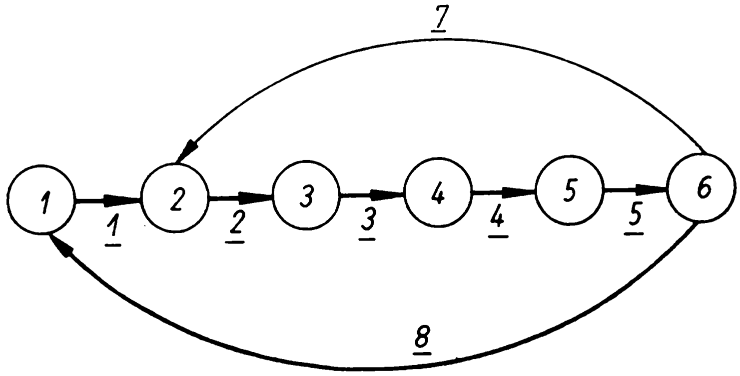
Der Graph besteht aus 9 Bögen und 6 Knoten, also ist $q = m - n + 1 = 4$.

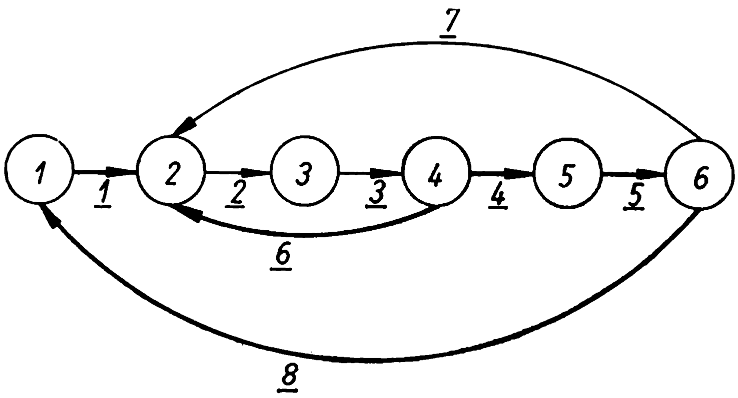
Ein Büschel wäre z.B.

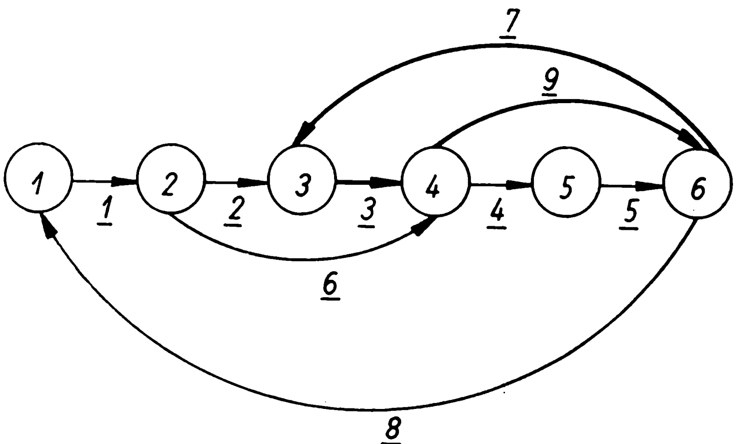


Fügt man Bogen 6 zu B, erhält man keinen Basiskreis; fügt man Bogen 7 zu B, ist der erste Basiskreis $(\underline{7}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5})$ gefunden. Die weiteren Basiskreise sind dann z.B. $(\underline{8}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5})$, $(\underline{6}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{8}, \underline{1})$ und $(\underline{7}, \underline{3}, \underline{9})$.









5. Rechentechnische Realisierung. Für die rechentechnische Realisierung des Algorithmus speichern wir alle Bögen des Graphen G, indem wir in einem Vektor X alle Anfangsknoten und in einem Vektor Y alle Endknoten notieren.

Als nächstes bestimmen wir ein Büschel B des Graphen (Abb. 1). Dieser Algorithmus ordnet die Bögen von B in den ersten $n-1$ Elementen von X und Y an. Dann wird der eigentliche Algorithmus (Abb. 2) angewandt.

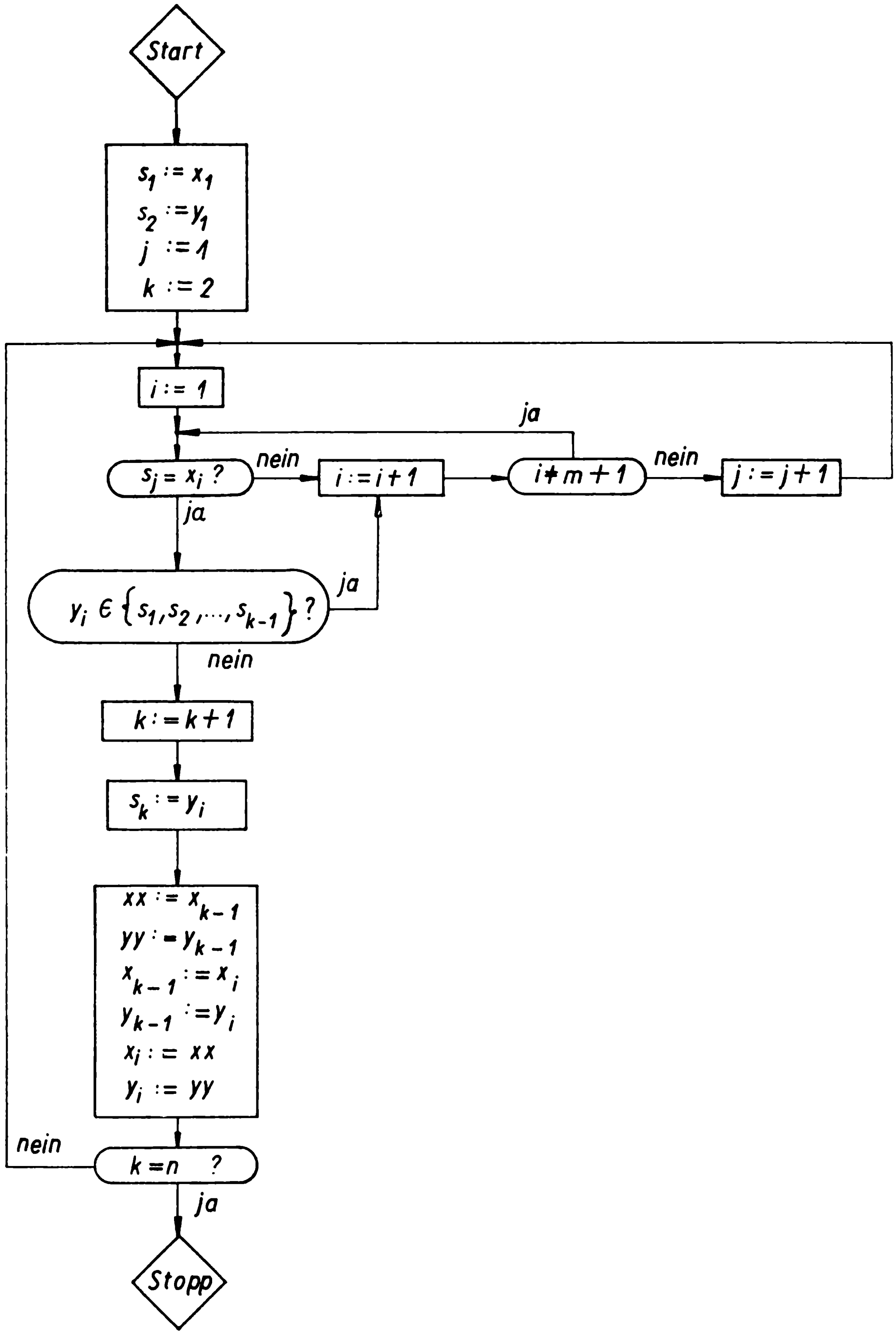

Start
$s_1 := x_1$
$s_2 := y_1$
$j := 1$
$k := 2$
$i := 1$
ja
$s_j = x_i$?
nein
$i := i + 1$
$i \neq m + 1$
nein
$j := j + 1$
ja
$y_i \in \{s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}\}$?
ja
nein
$k := k + 1$
$s_k := y_i$
$xx := x_{k-1}$
$yy := y_{k-1}$
$x_{k-1} := x_i$
$y_{k-1} := y_i$
$x_i := xx$
$y_i := yy$
nein
$k = n$?
ja
Stopp

Abb. 1

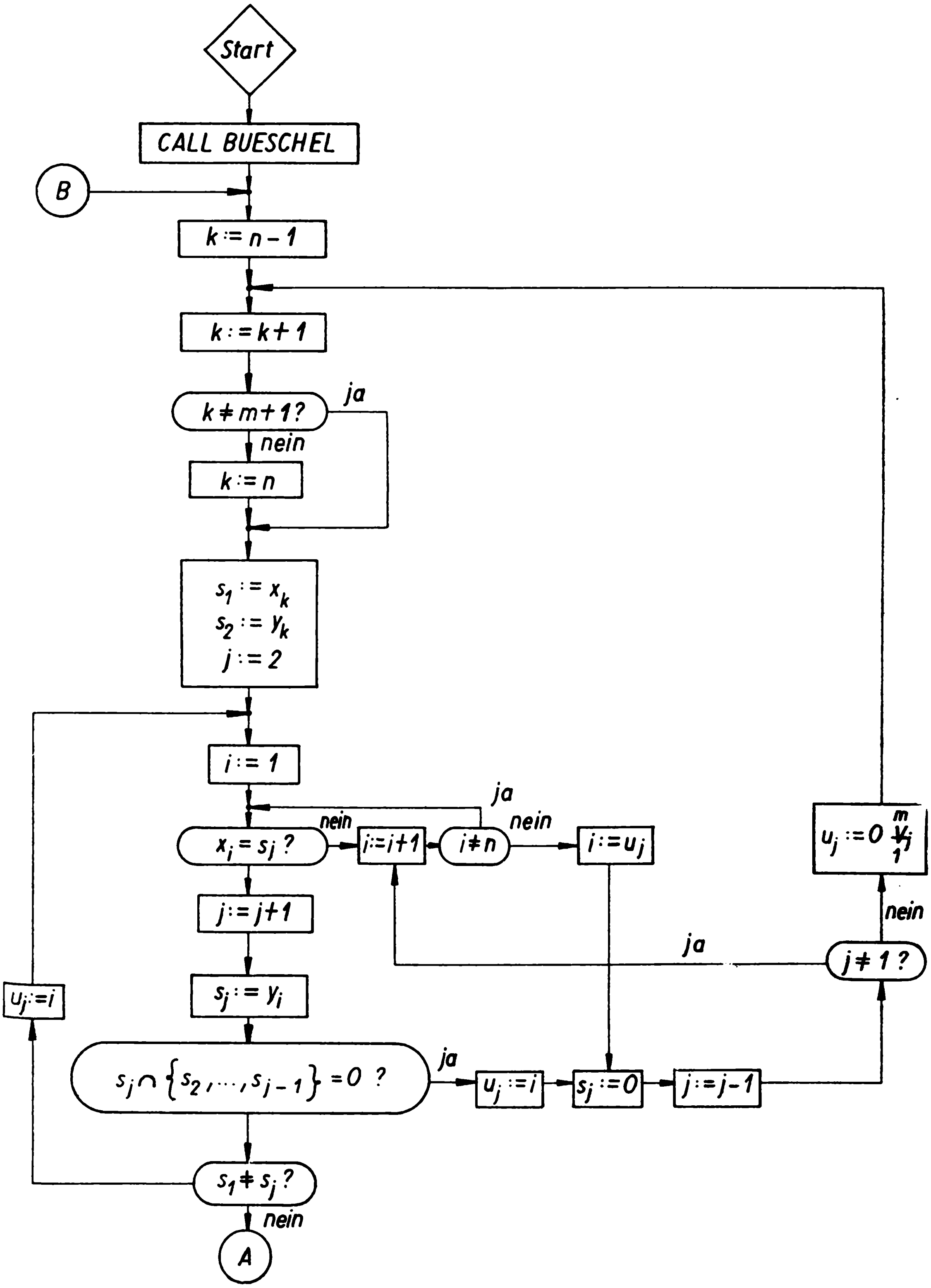

Start
CALL BUESCHEL
B
$k := n-1$
$k := k+1$
$k \neq m+1?$
ja
nein
$k := n$
$s_1 := x_k$
$s_2 := y_k$
$j := 2$
$i := 1$
ja
nein
nein
$x_i = s_j$?
$i := i+1$
$i \neq n$
$i := u_j$
$u_j := 0 \ \forall_1^m j$
nein
ja
$j \neq 1$?
$j := j+1$
$u_j := i$
$s_j := y_i$
$s_j \cap \{s_2, \ldots, s_{j-1}\} = 0$?
ja
$u_j := i$
$s_j := 0$
$j := j-1$
$s_1 \neq s_j$?
nein
A

Abb. 2

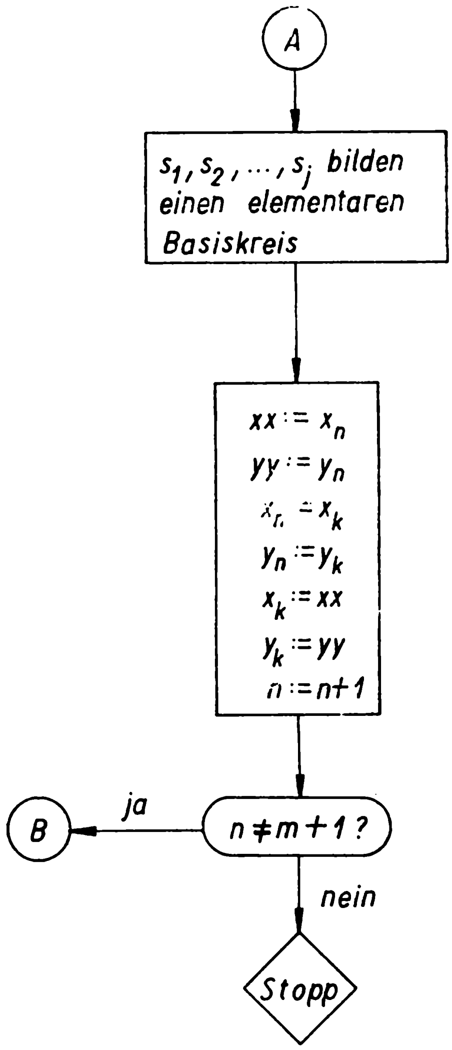


Abb. 2

Der Algorithmus wurde in FORTRAN programmiert und umfaßt 82 FORTRAN-Befehle. Er wurde auf einer EDVA CDC 3300 an einer Reihe von Beispielen getestet und liefert korrekte Ergebnisse. In Tabelle 1 sind die Rechenzeiten für einige Beispiele enthalten.

TABELLE 1. Rechenzeiten

Beispiel	Zahl der Knoten	Zahl der Bögen	Zeit in Sekunden
1	10	20	3,334
2	20	40	7,305
3	20	80	7,215
4	30	100	13,739
5	40	80	9,364
6	50	100	19,295

Literaturverzeichnis

[1] G. Berge und A. Ghoulia-Houri, *Programme, Spiele, Transportnetze*, Leipzig 1969.
[2] K. Hässig, *Die Bestimmung einer fundamentalen Basis von Schleifen in stark zusammenhängenden Graphen*, Zeitschr. Operat. Res. 18 (1974), S. 51-58.

Eingegangen am 25. 10. 1974

W. JÄNICKE (Merseburg)

NOWY ALGORYTM WYZNACZANIA BAZY CYKLI W MOCNO SPÓJNYM GRAFIE

STRESZCZENIE

Opisuje się algorytm wyznaczania bazy cykli w mocno spójnym grafie. Algorytm polega na stopniowym dodawaniu łuków do tworzonego lasu. Praca zawiera dowód poprawności algorytmu oraz przykłady numeryczne.
