

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

*TABELA WAG LINIOWEGO ESTYMATORA  
ODCHYLENIA ŚREDNIEGO W POPULACJI NORMALNEJ*

W pracy [1] zdefiniowano i podano sposób konstrukcji liniowego estymatora  $L_n$  odchylenia średniego  $\sigma$  w populacji normalnej z próbki o liczności  $n$  oraz zbudowano wskazanym sposobem  $L_5$  i zbadano jego własności.

Obecnie — wobec zainteresowania praktyków — wyznaczono wagi i zbadano własności  $L_n$  dla  $n = 3, 4, \dots, 10$ . Jednocześnie do definicji  $L_n$  wprowadzono drobną zmianę, a mianowicie

$$L_n = \sum_{i=2}^n w_i Z_i,$$

przy czym, jak poprzednio,

$X_k$  — niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie normalnym,

$$Y_k = \left| X_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right|, \quad k = 1, \dots, n,$$

$Z_k$  —  $k$ -ta statystyka pozycyjna w próbce  $(Y_1, \dots, Y_n)$ ,

$w_i$  — wagi estymatora — liczby rzeczywiste i stałe.

Zmiana definicji polega więc na przyjęciu  $w_1 = 0$ . Taka zmiana była konieczna przy konstrukcji  $L_3$ , dla  $n = 3$  zachodzi bowiem związek

$$Z_3 = Z_1 + Z_2,$$

a więc w wyrażeniu  $w_1 Z_1 + w_2 Z_2 + w_3 Z_3$  jedna z wag jest kombinacją liniową pozostałych.

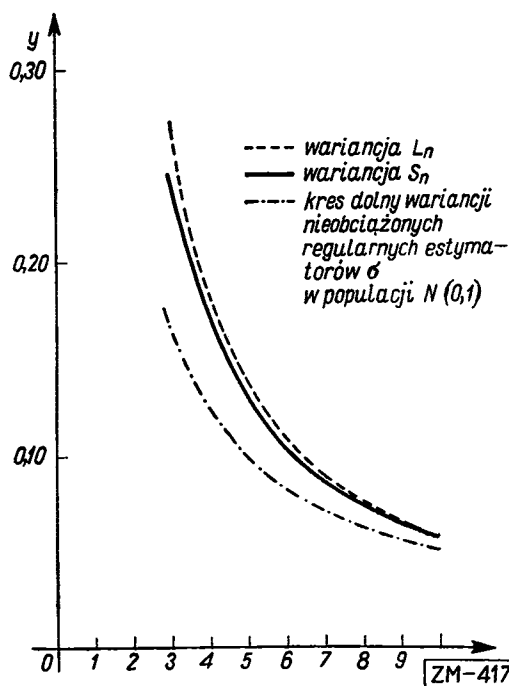
Dla  $n > 3$  zmiana definicji nie była konieczna, ale wprowadzono ją dla jednolitości definicji i zmniejszenia ilości obliczeń przy stosowaniu  $L_n$ , jak i ze względu na to, że dla małych  $n$  istnieje w przybliżeniu zależność liniowa między  $Z_1, \dots, Z_n$ . I tak np. dla  $n = 5$  w znacznej większości próbek zachodzi związek  $Z_2 + Z_5 = Z_1 + Z_3 + Z_4$ . Zachowano symbol  $L_n$  do oznaczania nowego estymatora.

Metoda wyznaczania wag i badania rozkładów  $L_n$  nie uległa żadnej istotnej zmianie w stosunku do opisanej w [1], jedynie rząd układu równań, którego rozwiązaniem są wagi, zmniejszył się o jeden.

Natomiast technikę pracy na maszynie cyfrowej (tym razem na maszynie ZAM-2) znacznie ulepszono: posłużono się nowym dokładnie sprawdzonym przez kilka testów generatorem liczb losowych o rozkładzie normalnym, a ilość badanych próbek w stosowanej metodzie Monte-Carlo zwiększono do 1000. Mimo to rozkłady empiryczne  $L_n$  w tabelce 4 nie są jeszcze „gładkie”. Podano je jednak w formie surowej, aby umożliwić konstruowanie testów przy weryfikacji hipotez o  $\sigma$ . W pierwszej kolumnie tabelki 4 zawarte są zakresy wartości liniowego estymatora odchylenia średniego w populacji normalnej  $N(0, 1)$ . Ogólnie, w przypadku populacji normalnej  $N(m, \sigma)$ , należy te wartości pomnożyć przez  $\sigma$ , gdyż  $L_n$  jest estymatorem jednorodnym

$$(1) \quad L(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) = cL(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tabela 1 zawiera wagi  $L_n$ , tabela 2 — empiryczne wartości średnie zmiennych losowych  $Z_1, \dots, Z_n$  z populacji  $N(0, 1)$ . Można z nich od-



Rys. 1. Wariancje trzech estymatorów odchylenia średniego w populacji normalnej z próbki o liczebności  $n$

czytać między innymi ciekawy fakt, że dla  $n = 3$  za estymator  $\sigma$  może służyć po prostu  $Z_3$ , gdyż  $E(Z_3) \approx 1$ , a wariancja  $Z_3$  jest niewiele większa



TABELKA 2

Empiryczne wartości średnie zmiennych losowych  $Z_i$ 

$i \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,27	0,25	0,19	0,17	0,14	0,13	0,12	0,11
2	0,74	0,48	0,42	0,35	0,30	0,27	0,25	0,22
3	1,01	0,88	0,63	0,56	0,47	0,42	0,38	0,34
4		1,20	0,99	0,76	0,66	0,57	0,51	0,46
5			1,37	1,08	0,87	0,76	0,65	0,60
6				1,49	1,16	0,96	0,83	0,74
7					1,57	1,24	1,04	0,91
8						1,65	1,31	1,10
9							1,71	1,36
10								1,78

TABELKA 3

Średnie i wariancje empiryczne  $L_n$  oraz wariancje teoretyczne  $S_n$ 

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
średnia empiryczna $L_n$	1,023	1,003	1,016	1,008	0,993	0,998	1,002	1,003
wariancja empiryczna $L_n$	0,272	0,183	0,139	0,110	0,090	0,079	0,067	0,057
wariancja teoretyczna $S_n$	0,242	0,178	0,132	0,105	0,087	0,074	0,064	0,057

TABELKA 4

Rozkłady empiryczne  $L_n$  (w tysięcznych)

przedział wartości dla $L_n$	$n$							
	3	4	5	6	7	8	9	10
< 0,05	4	0	0	0	0	0	0	0
0,05 - 0,10	4	1	0	0	0	0	0	0
0,10 - 0,15	7	5	1	2	0	0	0	0
0,15 - 0,20	12	6	0	0	0	0	0	0
0,20 - 0,25	15	6	2	0	0	1	0	0

Tabela 4, cd.

przedział wartości dla $L_n$	$n$							
	3	4	5	6	7	8	9	10
0,25-0,30	21	11	2	5	3	2	1	0
0,30-0,35	23	17	17	4	7	3	2	1
0,35-0,40	23	12	18	7	9	6	4	2
0,40-0,45	27	28	15	13	7	9	4	5
0,45-0,50	34	27	23	20	12	14	7	5
0,50-0,55	30	35	30	26	20	17	13	12
0,55-0,60	31	33	31	32	29	22	16	16
0,60-0,65	32	39	39	38	38	34	33	21
0,65-0,70	42	43	45	32	40	34	39	33
0,70-0,75	26	51	30	62	41	62	33	51
0,75-0,80	29	42	45	41	56	51	61	50
0,80-0,85	42	40	55	56	60	56	78	65
0,85-0,90	47	49	52	54	71	53	80	79
0,90-0,95	38	40	44	63	59	68	77	87
0,95-1,00	33	39	61	53	64	76	64	89
1,00-1,05	41	46	53	55	82	79	70	85
1,05-1,10	32	45	36	57	61	54	84	79
1,10-1,15	35	42	39	51	51	77	60	79
1,15-1,20	28	39	54	48	61	56	60	49
1,20-1,25	26	31	47	42	46	47	52	42
1,25-1,30	36	21	32	45	33	36	35	41
1,30-1,35	31	36	39	42	36	37	34	26
1,35-1,40	21	28	29	32	26	21	22	26
1,40-1,45	26	33	31	28	20	21	19	18
1,45-1,50	23	27	23	19	13	20	13	9
1,50-1,55	19	16	31	17	12	17	16	13
1,55-1,60	16	24	19	14	13	7	8	5
1,60-1,65	18	17	10	10	9	6	4	6
1,65-1,70	16	8	7	6	6	5	5	2
1,70-1,75	14	10	10	9	3	2	1	2
1,75-1,80	16	14	4	4	3	5	3	0
1,80-1,85	13	9	6	3	2	1	0	1
1,85-1,90	8	3	1	3	2	0	2	1
1,90-1,95	7	5	8	1	3	0	0	0
1,95-2,00	6	3	3	3	2	1	0	0
> 2,00	48	19	8	3	0	0	0	0

**Praca cytowana**

[1] J. Oderfeld i E. Pleszczyńska, *Liniowy estymator odchylenia średniego w populacji normalnej*, Zastosow. Mat. 6 (1962), str. 111-117.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca wpłynęła 26. 7. 1962*

---

Е. ПЛЕЩИНЬСКА (Варшава)

**ТАБЛИЦА ВЕСОВ ЛИНЕЙНОГО ЭСТИМАТОРА СРЕДНЕГО ОТКЛОНЕНИЯ  
В НОРМАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ**

**РЕЗЮМЕ**

Разработано веса и исследовано свойства линейного эстиматора среднего отклонения нормальной совокупности, определенного в [1], для численности выборки  $n = 3, 4, \dots, 10$ .

---

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

**TABLE OF WEIGHTS OF A LINEAR ESTIMATOR OF MEAN DEVIATION  
IN A NORMAL POPULATION**

**SUMMARY**

The author has worked out the weights and investigated the properties of a linear estimator, defined in [1], of mean deviation in a normal population for a sample of size  $n = 3, 4, \dots, 10$ .

---