H. STEINHAUS i S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

O PORÓWNYWANIU DWÓCH PROCESÓW PRODUKCYJNYCH I ZASADZIE DUALIZMU

Przykładem ciągłego procesu produkcyjnego jest wstęga jedwabiu sztucznego wytwarzana bezustannie przez automat produkcyjny i biegnąca przed obserwatorem do nawijania lub dalszej obróbki, którą może być np. barwienie materiału. Obserwator ocenia dobroć produktu przez to, że liczy, ile w jednostce czasu, np. w minucie, przesunęło się przed nim defektów; w przykładzie jedwabiu takimi defektami są plamy lub dziury. Znając tę liczbę i prędkość biegu taśmy, szacuje on wadliwość produktu wyrażając ją w liczbie defektów na metr wstęgi.

Jeżeli celem kontroli nie jest obliczanie wadliwości produktu, lecz porównanie wadliwości dwóch procesów produkcyjnych, to trzeba powyższy przykład zastąpić innym, a mianowicie dwiema wstęgami biegnącymi równolegle z jednakową prędkością — jeżeli są nawijane na jeden bęben, to ten warunek jest spełniony; zbędne jest teraz utrzymywanie stałej prędkości.

Porównanie ma na celu stwierdzenie, że wadliwość wstęgi II przekracza a-krotność wadliwości wstęgi I; jak wiadomo, tego rodzaju tezy orzeka się z pewnym „prawdopodobieństwem" na podstawie obserwacji. Obserwacja odbywa się według pewnego planu, który można scharakteryzować liczbą naturalną n — jeżeli ograniczamy się np. do $n = 10$, 15 lub 20, to mamy do wyboru 3 plany. Ustaliwszy n obserwujemy obie taśmy aż do chwili pojawienia się n-tego defektu na taśmie I i konstatujemy liczbę m defektów, które pojawiły się do tej chwili na taśmie II, po czym z odpowiedniego wzoru obliczamy „prawdopodobieństwo" P tezy sformułowanej o kilka wierszy wyżej; wzór podaje P jako funkcję trzech zmiennych a, m i n.

W opisanym wyżej postępowaniu obserwowaliśmy taśmy aż do chwili pojawienia się n-tego defektu na taśmie I. Można by także postąpić nieco inaczej, a mianowicie liczyć wszystkie defekty, pojawiające się zarówno na taśmie I, jak i na taśmie II, a obserwację przerwać w chwili, kiedy pojawi się N-ty defekt (będzie to być może defekt na taśmie I, a być może — na taśmie II) i skonstatować liczbę m defektów, które się pojawiły do tej chwili na taśmie II (na taśmie I będzie wtedy $n = N-m$ defektów). Poniżej rozpatrzymy oba sposoby postępowania.

Warto od razu odpowiedzieć na pytanie, dlaczego nie szacujemy z osobna wadliwości każdego z tych procesów. Otóż mamy tu analogię z zasadą obowiązującą w ogóle w mierzeniu: znacznie łatwiej stwierdzić, ile razy jest jeden przedmiot cięższy od drugiego bez ważenia każdego z osobna, niż ważyć każdy z osobna i porównywać ciężary. W naszych przykładach obserwacja (m, n) już daje odpowiedź, gdy chodzi o stosunek obu wadliwości; gdybyśmy chcieli oszacować najpierw same wadliwości, musielibyśmy mieć jeszcze jeden instrument, mianowicie chronometr, a ponadto znać długość taśmy od początku do końca obserwacji — wyeliminowanie tych dat pozwala na zbudowanie tablicy, w której nie figurują wadliwości, a dokładność rezultatu relatywnego nie zależy wcale od wadliwości absolutnych

§ 1. Rozwiązanie zagadnienia opisanego powyżej opiera się na założeniu, że rozkład defektów wzdłuż taśmy produkcyjnej jest rozkładem Poissona. Należy to rozumieć w ten sposób, że możemy uważać defekt odległy o t od początku taśmy za sygnał, a t za moment czasowy sygnału — przy takiej interpretacji spełnione będą postulaty, które zwykle wypowiada się o procesach Poissona realizujących się jako ciąg punktów-sygnałów na osi czasowej. Są one następujące:

Istnieje oczekiwana (średnia) liczba defektów na jednostkę długości taśmy. Jeżeli nazwiemy ją c, to prawdopodobieństwo $P_k(h)$ napotkania k defektów w którymkolwiek odcinku taśmy $(t, t+h)$ wynosi

$$P_k(h) = e^{-ch}(ch)^k/k! \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

a więc nie zależy od t; ta niezależność nazywa się *jednorodnością procesu*. Postulujemy również niezależność liczb defektów występujących w dwóch dowolnych, byle nie zachodzących na siebie, odcinkach taśmy.

Prócz tych założeń, charakteryzujących rozkład defektów jako poissonowski, zakładamy niezależność wzajemną wszelkich zmiennych losowych (określonych przez liczby i miejsca defektów), z których jedna odnosi się do taśmy I, a druga do taśmy II.

§ 2. Niech μ oznacza liczbę defektów na taśmie II, a ν — liczbę defektów na taśmie I, które zaobserwowaliśmy od początku do końca obserwacji. Nazwijmy c_{I}, c_{II} parametry c (określone w § 1) odnoszące się do taśm I i II. Przy pierwszym sposobie obserwacji mamy obliczyć

$$\mathrm{P}(c_{\mathrm{II}} > ac_{\mathrm{I}} | \mu = m,\ \nu = n), \tag{2}$$

przy drugim sposobie obserwacji —

$$\mathrm{P}(c_{\mathrm{II}} > ac_{\mathrm{I}} | \mu = m,\ \mu+\nu = N), \tag{3}$$

czyli prawdopodobieństwo, że oczekiwana (średnia) liczba defektów procesu II przewyższa a-krotność oczekiwanej (średniej) liczby defektów procesu I, w pierwszym przypadku pod warunkiem, że do chwili pojawienia się na taśmie I n-tego defektu, na taśmie II pojawiło się m defektów, w drugim przypadku pod warunkiem, że na taśmie II pojawiło się m defektów do chwili pojawienia się N-tego defektu na obu taśmach łącznie.

Jak wiadomo, „prawdopodobieństwa" (2) i (3) nie są określone jednoznacznie przez słowa towarzyszące symbolom (2) i (3). We wcześniejszej pracy [5] Steinhaus opisał trudności, które tu występują i starał się wyjaśnić rolę pojęcia wiarogodności, czyli tzw. *fiducial argument*, służącego zwykle do obejścia owych trudności. Idąc w kierunku tych rozważań K. Sarkadi ogłosił w 1953 r. notę *On the rule of dualism concerning the Bayes probability limits of fraction defective* [4]. Tytuł tej noty przypomina wyrazem „dualizm" tytuł pracy Oderfelda [1]. Dla wyjaśnienia, na czym rzecz polega, powiemy teraz, jak wygląda argument fiducjalny i reguła dualizmu dla procesu Poissona.

Obserwujemy jeden proces Poissona na jednostce długości taśmy i konstatujemy k defektów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że parametr c tego procesu jest mniejszy od a? Nie można tego prawdopodobieństwa obliczyć bez znajomości rozkładu *a priori*, to znaczy bez wiedzy poprzedzającej obserwację i określającej dla wszelkich a to prawdopodobieństwo, o które teraz – po obserwacji – pytamy. Argument fiducjalny obchodzi się jednak bez owej wiedzy apriorycznej i podstawia za pierwotną kwestię, inną: pyta mianowicie o to, jakie jest prawdopodobieństwo, że proces o parametrze $c = a$ da na jednostce taśmy więcej niż k defektów. To prawdopodobieństwo, $\mathrm{P}(\varkappa > k|c = a)$ (przez $\varkappa$ oznaczyliśmy tutaj zmienną losową podającą liczbę defektów zaobserwowanych na jednostce długości taśmy), daje się łatwo obliczyć. Argument fiducjalny nazywa je *wiarogodnością* tego, że c jest mniejsze niż a, skoro na jednostce długości taśmy stwierdziliśmy k defektów; oznaczmy tę wiarogodność przez $\mathrm{W}(c < a|\varkappa = k)$. Otrzymujemy więc związek

$$\mathrm{W}(c < a|\varkappa = k) = \mathrm{P}(\varkappa > k|c = a), \tag{4}$$

który jest po prostu definicją wiarogodności.

Można nadać jednak sens pierwotnej kwestii przyjmując jakiś rozkład *a priori*. Można przyjąć tzw. równomierny rozkład *a priori*, to znaczy uznać, że przed obserwacją wszystkie c są jednakowo prawdopodobne: mówiąc ściślej, że prawdopodobieństwo zawierania się parametru c w jakimś przedziale jest proporcjonalne do długości tego przedziału; to sformułowanie też nie jest jeszcze zupełnie poprawne, ale poprawimy je niebawem. Przy takiej hipotezie pierwotna kwestia da się rozstrzygnąć za pomocą wzoru Bayesa na prawdopodobieństwo *a posteriori*, to znaczy uwzględniające zarówno rozkład *a priori*, jak i wyniki obserwacji. To prawdopodobieństwo oznaczymy symbolem

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}(c < a|\varkappa = k); \tag{5}$$

litery H, B przypominają hipotezę o rozkładzie i regułę Bayesa. Sarkadi [4] obliczył (4) i (5) i dowiódł, że

$$\mathrm{W}(c < a|\varkappa = k) = \mathrm{P}_{\mathrm{HB}}(c < a|\varkappa = k). \tag{6}$$

Podamy tu ten nietrudny dowód. Zacznijmy od obliczenia (5). Załóżmy na razie, że c ma *a priori* rozkład jednostajny na odcinku $(0, L)$; gęstość tego rozkładu jest zatem

$$p_L(a) = \begin{cases} 1/L & \text{dla} \quad 0 < a < L, \\ 0 & \text{poza tym}. \end{cases} \tag{7}$$

Z założenia jest

$$\mathrm{P}(\varkappa = k|c = a) = e^{-a}\frac{a^k}{k!}. \tag{8}$$

a podstawie reguły Bayesa mamy

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}^{(L)}(c < a|\varkappa = k) = \frac{\int\limits_0^a p_L(a)\mathrm{P}(\varkappa = k|c = a)\,da}{\int\limits_0^L p_L(a)\mathrm{P}(\varkappa = k|c = a)\,da} = \frac{\int\limits_0^a \frac{1}{L}e^{-a}\frac{a}{k!}\,da}{\int\limits_0^L \frac{1}{L}e^{-a}\frac{a^k}{k!}\,da}.$$

Ponieważ jak łatwo sprawdzić

$$\int\limits_a^b \frac{a^k}{k!}e^{-a}da = e^{-a}\left(1 + a + \ldots + \frac{a^k}{k!}\right) - e^{-b}\left(1 + b + \ldots + \frac{b^k}{k!}\right),$$

otrzymujemy z powyższego

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}^{(L)}(c < a|\varkappa = k) = \frac{1 - e^{-a}(1 + a + \ldots + a^k/k!)}{1 - e^{-L}(1 + L + \ldots + L^k/k!)}.$$

Teraz, przyjmując z definicji,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}(c < a|\varkappa = k) = \lim_{L\to\infty}\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}^{(L)}(c < a|\varkappa = k),$$

co jest zapowiedzianym sprecyzowaniem założenia o jednostajnym apriorycznym rozkładzie c, otrzymujemy

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}(c < a|\varkappa = k) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \ldots + \frac{a^k}{k!}\right). \tag{9}$$

Z (4) i (8) zaś otrzymujemy bezpośrednio

$$W(c < a|\varkappa = k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} e^{-a}\frac{a^i}{i!} = 1-e^{-a}\left(1+a+\ldots+\frac{a^k}{k!}\right);$$

ta równość wraz z (9) daje nam (6).

§ 3. Wróćmy teraz do naszego zadania porównania dwóch procesów, postawionego na wstępie. Zanim przystąpimy do nadawania sensu symbolom (2) i (3) pokażemy, że w przypadku porównywania dwóch procesów zadanie sprowadza się do rozpatrywania pewnych schematów urnowych. Do tego musimy najpierw potraktować obie taśmy jako jedną, na której w kolejności losowej pojawiają się defekty I i II (można założyć, że nigdy dwa defekty nie wystąpią na podwójnej taśmie jednocześnie). W każdej chwili możemy zapytać, czy najbliższy defekt będzie I czy II. Otóż prawdopodobieństwa odpowiednie p, q spełniają warunek $p:q = c_{\mathrm{I}}:c_{\mathrm{II}}$. Rzeczywiście, w każdym punkcie t taśmy prawdopodobieństwo, że w odcinku $\langle t, t+dt)$ pojawi się jeden defekt I, a żaden defekt II, jest

$$e^{-c_{\mathrm{I}}dt}c_{\mathrm{I}}dt\,e^{-c_{\mathrm{II}}dt} = c_{\mathrm{I}}dt,$$

a prawdopodobieństwo, że w tymże odcinku pojawi się 1 defekt II, a żaden I, jest $c_{\mathrm{II}}dt$. Stosunek tych prawdopodobieństw jest $c_{\mathrm{I}}:c_{\mathrm{II}}$. Ponieważ infinitezymalny odcinek dt jest dowolny, więc mamy $p:q = c_{\mathrm{I}}:c_{\mathrm{II}}$, jak zapowiedziano.

Jeżeli $c_{\mathrm{II}} = ac_{\mathrm{I}}$, to $p:q = 1/a$, a więc

$$p = 1/(1+a), \qquad q = a/(1+a); \tag{10}$$

można również napisać

$$p = c_{\mathrm{I}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}), \qquad q = c_{\mathrm{II}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}). \tag{11}$$

Z tego wynika, że gdy porównujemy dwa procesy Poissona przez zapisywanie kolejne defektów I i defektów II, możemy o procesach Poissona zapomnieć zupełnie. Nazwijmy defekty I kulami białymi (B), a defekty II kulami czarnymi (C). Wypisane przed chwilą wzory uczą, że w każdej chwili prawdopodobieństwo, iż najbliższa kula będzie B, jest p, a że będzie C, jest q. Wobec tego zagadnienie porównawcze sprowadziliśmy do zagadnień dotyczących wnioskowania o składzie $p:q$ urny zawierającej kule B i C z rezultatów ciągnień, przy czym prawdopodobieństwa p, q są stałe tak jak gdyby kule wyciągnięte wrzucano z powrotem. Od zagadnienia traktowanego zwykle w statystycznej kontroli jakości produktu alternatywnego obecne różni się tylko tym, że nas interesuje teraz stosunek p/q, czyli stosunek r ilości C do ilości B w urnie — zwykle nazywamy B dobrymi, a C złymi sztukami i interesujemy się frakcją q złych sztuk. Związek $r = q/(1-q)$ pozwala jednak natychmiast przejść od q do r.

§ 4. Przystąpimy teraz do rozwiązywania zadania postawionego na wstępie. Zajmiemy się najpierw pierwszym sposobem obserwacji. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo wyrażone symbolem (2). Wyjaśniliśmy już, że symbol ten jest nieokreślony. Możemy próbować nadać mu znaczenie wiarogodności lub też znaczenie, które wyraża się przez dopisanie wskaźnika HB. Poprzestańmy na razie na obliczeniu

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c_{\mathrm{II}} > a c_{\mathrm{I}} | \mu = m, \nu = n). \tag{12}$$

Tutaj cyfra 1 ma nam przypominać hipotezę o rozkładzie *a priori* stosunku $c = c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$, przy której wyrażenie to obliczymy.

Zauważmy, że nierówność w (12) da się napisać jako $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a$ i że stosunek $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ nie zależy od długości taśmy. Wobec tego wartość tego wyrażenia nie zależy od jednostki długości taśmy. Możemy wobec tego obrać tę jednostkę tak, żeby było $c_{\mathrm{I}} = 1$. Wtedy wyrażenie (12) przyjmie postać

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c_{\mathrm{II}} > a | \mu = m, \nu = n), \tag{13}$$

a zadanie obliczenia wartości wyrażenia ogólnego (12) sprowadzi się do obliczenia prawdopodobieństwa, że c_{II} przewyższa a, jeżeli w chwili pojawienia się n-tego defektu na taśmie I — która ma średnio jeden defekt na jednostkę długości taśmy — doliczyliśmy się m defektów na taśmie II. Wartość wyrażenia (13) obliczymy przy założeniu jednostajnego rozkładu c_{II} na całej półprostej dodatniej. W dalszym ciągu dowodu dla graficznej prostoty będziemy pisali systematycznie c zamiast c_{II}.

Założmy najpierw, że c ma *a priori* rozkład jednostajny na odcinku $(0, L)$, a więc określmy gęstość $p_L(a)$ tego rozkładu przez

$$p_L(a) = \begin{cases} 1/L & \text{dla} \quad 0 < a < L, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Znajdziemy teraz warunkowy rozkład prawdopodobieństwa liczby μ defektów II, które pojawiły się na taśmie II do chwili pojawienia się n-tego defektu I na taśmie I, pod warunkiem, że $c = a$. Otóż, jak to wynika z rozważań § 3, prawdopodobieństwo, że wówczas będzie $\mu = m$, oznaczmy je przez $\mathrm{P}(\mu = m | c = a, \nu = n)$, będzie równe prawdopodobieństwu, że w $n+m$ ciągnieniach z urny, zawierającej frakcję $p = 1/(1+a)$ kul białych i frakcję $q = a/(1+a)$ kul czarnych, wyciągniemy m kul czarnych i n kul białych i przy tym ostatnia wyciągnięta kula będzie biała. Otóż prawdopodobieństwo wyciągnięcia w $n+m-1$ ciągnieniach m kul czarnych jest równe

$$\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{a}{1+a}\right)^m\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1},$$

a prawdopodobieństwo, że następna, $(n+m)$-ta, wyciągnięta kula będzie biała, wynosi $1/(1+a)$; szukane prawdopodobieństwo jest iloczynem tych dwu, a więc

$$(14)\qquad \mathrm{P}(\mu = m|c = a,\, \nu = n) = \binom{n+m-1}{m}\left(\frac{a}{1+a}\right)^m\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n}.$$

Wzór ten w szczególnym przypadku $a = 1$ znalazł inną drogą, przy użyciu funkcji charakterystycznych, A. Romejko w swojej pracy magisterskiej [3], drukowanej w niniejszym tomie (str. 217-228) Zastosowań Matematyki.

Używając reguły Bayesa możemy teraz obliczyć prawdopodobieństwo *a posteriori*, $\mathrm{P}^{(L)}_{\mathrm{HB}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n)$, tego, że c przewyższy a, gdy do chwili pojawienia się n-tego defektu I zaobserwowano m defektów II. Mamy mianowicie

$$\mathrm{P}^{(L)}_{\mathrm{HB}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n) = \frac{\int_a^L p_L(\alpha)\mathrm{P}(\mu = m|c = \alpha,\, \nu = n)d\alpha}{\int_0^L p_L(\alpha)\mathrm{P}(\mu = m|c = \alpha,\, \nu = n)d\alpha} =$$

$$= \frac{\int_a^L \frac{1}{L}\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha}{\int_0^L \frac{1}{L}\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha} = \frac{\int_a^L \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha}{\int_0^L \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha}.$$

Przyjmując z definicji

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n) = \lim_{L\to\infty}\mathrm{P}^{(L)}_{\mathrm{HB}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n)$$

(co precyzuje założenie o jednostajnym rozkładzie c na prostej), otrzymujemy z powyżej wypisanego wzoru

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n) = \frac{\int_a^\infty \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha}{\int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^m\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n}d\alpha},$$

Zauważmy, że uczynione przejście graniczne z L dopuszczalne jest jedynie wtedy, gdy $n \geqslant 2$. Inaczej występujące tu całki niewłaściwe są rozbieżne i przy $L \to \infty$ dostajemy jako granicę 1 przy wszelkich a. Gdy teraz zastosujemy do prawej strony ostatniego wzoru równość

$$(15)\qquad \int_a^b \binom{n+m-1}{m}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{m+n} a^m\,da = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-2}{k}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k - \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-2}{k}\left(\frac{1}{1+b}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{1+b}\right)^k\right\},$$

którą się otrzymuje za pomocą całkowania przez części, i weźmiemy pod uwagę to, że wartość (13) jest równa wartości (12) po skasowaniu ograniczenia $c_{\mathrm{I}} = 1$, otrzymujemy w końcu wzór

$$(16)\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c_{\mathrm{II}} > ac_{\mathrm{I}}|\mu = m,\, \nu = n) = \frac{1}{(1+a)^{n-1}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k-2}{k}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k.$$

W konkretnym przypadku użycie wzoru (16) do obliczania prawdopodobieństwa prowadziłoby do żmudnych rachunków. Można je jednak sprowadzić do korzystania z niekompletnej funkcji beta, która jest stablicowana (zobacz [2]). Jeżeli mianowicie we wzorze poprzedzającym (15) podstawimy $\beta = a/(1+a)$, otrzymamy wyrażenie

$$(16')\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c > a|\mu = m,\, \nu = n) = \frac{\int_{a/(1+a)}^{1} \beta^m(1-\beta)^{n-2}d\beta}{\int_0^1 \beta^m(1-\beta)^{n-2}d\beta} = \frac{1}{B(m+1,\, n-1)}\int_{a/(1+a)}^{1}\beta^m(1-\beta)^{n-2}d\beta.$$

Jeżeli teraz za Pearsonem przyjmiemy oznaczenie

$$I_x(a, b) = \frac{\int_0^x \beta^{a-1}(1-\beta)^{b-1}d\beta}{\int_0^1 \beta^{a-1}(1-\beta)^{b-1}d\beta} = \frac{1}{B(a,\, b)}\int_0^x \beta^{a-1}(1-\beta)^{b-1}d\beta,$$

będziemy mogli napisać

(16″) $$P_{HB1}(c_{II} > ac_I|\mu = m, \nu = n) = 1 - I_{a/(1+a)}(m+1, n-1),$$

co sprowadza obliczanie prawdopodobieństw (16) do korzystania z tablic Pearsona [2] niekompletnej funkcji beta.

W praktyce statystycznej kontroli jakości przyjął się powszechnie argument fiducjalny, tak że wzór (16), jako oparty na hipotezie równomiernego rozkładu *a priori* — i to, co gorsza, na nieograniczonej osi c — mógłby trafić na sprzeciwy. Te zastrzeżenia znikłyby, gdyby w problemacie porównywania dwu procesów udało się udowodnić ów dualizm, który dla jednego procesu stwierdził Sarkadi, a który w naszej pisowni ma postać (6). Posługując się czysto graficzną analogią możemy ten dezyderat napisać jako

(17) $$W(c_{II} > ac_I|\mu = m, \nu = n) = P_{HB1}(c_{II} > ac_I|\mu = m, \nu = n).$$

Ale (6) ma określony sens dlatego, że lewa strona (6) została zdefiniowana przez (4). Należy zatem określić znaczenie symbolu figurującego po lewej stronie (17). Określimy go przez relację

(18) $$W(c_{II} > ac_I|\mu = m, \nu = n) = P(\mu \leqslant m|c_{II} = ac_I, \nu = n-1).$$

Prawa strona tego wzoru oznacza prawdopodobieństwo tego, że do chwili pojawienia się na taśmie I $(n-1)$-szego defektu, na taśmie II pojawi się co najwyżej m defektów, pod warunkiem, że parametr taśmy II jest równy a-krotności parametru taśmy I.

W oparciu o (14) — w którym oczywiście równość $c = a$ można, znosząc ograniczenie $c_I = 1$, czytać jako $c_{II} = ac_I$ — otrzymujemy

$$P(\mu \leqslant m|c_{II} = ac_I, \nu = n-1) = \frac{1}{(1+a)^{n-1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-2}{k} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k.$$

Wzór ten wraz z (16) dowodzi równości (17). Wobec tego bez skrupułów możemy się posługiwać wzorem (16). Definicja (18) ma charakter fiducjalny i naśladuje przyjęty przez zwolenników wiarogodności sposób odwracania nierówności.

§ 5. Już w § 3 zwróciliśmy uwagę, że porównywanie dwóch procesów Poissona sprowadza się do badania składu urny, w której stosunek $p:q$ kul białych do kul czarnych jest równy $c_I:c_{II}$. Dlatego udowodnione w § 4 wzory (16) i (17) dotyczą w równej mierze badania wadliwości partii. Trzeba tylko położyć $w = q = c_{II}/(c_I+c_{II})$ oraz $c_{II}:c_I = q:p = w/(1-w)$ i traktować defekty pojawiające się na taśmie I jako sztuki dobre, a defekty pojawiające się na taśmie II jako sztuki złe. Otrzymamy w ten sposób twierdzenie dotyczące zwykłej alternatywy, które brzmi:

Jeżeli badamy partię ustaliwszy z góry liczbę sztuk dobrych (n) i przerywamy badanie, gdy pojawi się n-ta sztuka dobra, to prawa strona wzoru (16) da nam prawdopodobieństwo HB, że stosunek $w/(1-w)$, gdzie w oznacza wadliwość partii, przekracza α. To zaś jest równoważne z tym, że $w > \beta$, gdzie $\beta = \alpha/(1+\alpha)$. Możemy zatem zamiast (16) napisać

$$(19) \qquad P(w > \beta | \mu = m, \nu = n) = (1-\beta)^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-2}{k} \beta^k.$$

Można ten rezultat rozumieć dwojako albo fiducjalnie, albo po bayesowsku. Żeby go rozumieć fiducjalnie, trzeba go zinterpretować według (18), a więc rozumieć P jako prawdopodobieństwo pojawienia się co najwyżej m sztuk złych przy badaniu partii o wadliwości β aż do chwili pojawienia się $(n-1)$-szej sztuki dobrej (jest to sposób sekwencyjny!). Chcąc go rozumieć po bayesowsku, musimy założyć, że stosunek $r = w/(1-w)$ ma *a priori* jednostajny rozkład na półprostej dodatniej, przy czym ścisły sens tej jednostajności polega na znalezieniu granicy przy $L \to \infty$ prawdopodobieństw HB obliczonych przy założeniu, że r ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, L)$. Gdy zaś r ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, L)$, to w ma rozkład prawdopodobieństwa o dystrybuancie

$$(20) \qquad P_L(w < \beta) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \beta < 0, \\ \dfrac{1}{L} \cdot \dfrac{\beta}{1-\beta} & \text{dla} \quad 0 < \beta < L/(1+L), \\ 1 & \text{dla} \quad L/(1+L) < \beta. \end{cases}$$

Widać stąd, że przy $L \to \infty$ rozkłady te są zbieżne do rozkładu, w którym $w = 1$ z prawdopodobieństwem 1 — a więc założeniu jednostajnego rozkładu r na półprostej dodatniej nie odpowiada żaden właściwy rozkład prawdopodobieństwa wadliwości w.

Opisaliśmy powyżej sposób badania wadliwości partii polegający na pobieraniu elementów do próbki aż do wylosowania n-tej sztuki dobrej. Można by także rozpatrzeć analogiczny sposób, w którym pobierałoby się elementy do próbki aż do wylosowania n-tej sztuki złej. Wówczas we wzorze (19) rolę wadliwości w grałaby frakcja $p = 1-w$ sztuk dobrych, ν oznaczałoby liczbę sztuk złych, a μ — liczbę sztuk dobrych, które wylosowano przy losowaniu kolejnych sztuk, kontynuowanym aż do wylosowania n-tej sztuki złej. Traktując wzór (19) fiducjalnie przy tej interpretacji należałoby go odczytać jako prawdopodobieństwo pojawienia się co najwyżej m sztuk dobrych przy badaniu partii o wadliwości $1-\beta$, gdy losowanie sztuk do próbki kontynuuje się aż do chwili wylosowania $(n-1)$-szej sztuki złej. Chcąc go rozumieć po bayesowsku trzeba by założyć, że stosunek p/q frakcji sztuk dobrych do frakcji sztuk złych ma *a priori* rozkład jednostajny na półprostej dodatniej, przy czym ścisły sens tej jednostajności byłby taki jak i przedtem, tzn. odpowiednie przejście do granicy przy operowaniu rozkładami jednostajnymi na odcinkach skończonych. Za pomocą wzoru analogicznego do (20) można by się przekonać, że i w tym przypadku jednostajnemu apriorycznemu rozkładowi prawdopodobieństwa stosunku p/q na półprostej nie odpowiada żaden właściwy rozkład prawdopodobieństwa dla p, z tym, że granicą apriorycznych rozkładów p przy $L \to \infty$ byłby rozkład, w którym $p = 1$ z prawdopodobieństwem 1.

§ 6. Omówione w poprzednim paragrafie zadanie szacowania wadliwości partii towaru sztukowego moglibyśmy też potraktować w sposób niesekwencyjny, klasyczny, ustalając z góry liczność próbki. Dla tego zadania regułę dualizmu odkrył w 1951 roku J. Oderfeld i opisał w pracy [1] wynikające z niej podobieństwo przepisów statystycznej kontroli jakości opartych na regule i hipotezie Bayesa i przepisów opartych na argumencie fiducjalnym. Nazwijmy wiarogodnością tego, że wadliwość w przekracza β, gdy w próbce składającej się z N sztuk pojawiło się m sztuk złych, prawdopodobieństwo tego, że w próbce, liczącej $N+1$ sztuk, wylosowanej z partii o wadliwości β pojawi się co najwyżej m sztuk złych; za pomocą wzoru, w którym μ oznacza liczbę sztuk złych, a ν — liczbę sztuk dobrych, jakie pojawią się od początku do końca badania, napiszemy to tak:

$$(21)\qquad \mathrm{W}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = N+1).$$

J. Oderfeld znalazł, że

$$(22)\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N+1}{k} \beta^k (1-\beta)^{N-k+1},$$

a to przy definicji (21) daje równość

$$(23)\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = \mathrm{W}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N).$$

Cyfra 2 przypomina nam tutaj hipotezę o jednostajnym rozkładzie *a priori* wadliwości w w odcinku $(0, 1)$, przy której J. Oderfeld ustalił regułę dualności.

I tu można obliczanie prawdopodobieństw (22) sprowadzić do korzystania z tablic niekompletnej funkcji beta. Mianowicie przez różniczkowanie prawej strony (22) względem β znajdujemy, że gdy wadliwość ma *a priori* rozkład jednostajny w odcinku $(0,1)$, a w próbce N-elementowej pojawiło się m sztuk złych, wówczas aposterioryczny rozkład prawdopodobieństwa wadliwości w jest rozkładem beta o gęstości

$$(23') \quad p_{\mathrm{HB2}}(\beta|\mu = m, \nu = N-m) = \frac{1}{B(m+1, N-m+1)}\beta^m(1-\beta)^{N-m}.$$

Korzystając z tego możemy zamiast wzoru (22) napisać

$$(24) \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = 1-I_\beta(m+1, N-m+1).$$

Zastosujmy to co napisane do porównywania dwóch procesów produkcyjnych drugim sposobem, to znaczy tak, że kontynuuje się obserwację taśm tak długo, aż suma defektów I i defektów II osiągnie liczbę n, czyli, mówiąc krócej, aż pojawi się n-ty defekt (będzie to być może na taśmie I, być może na taśmie II). Gdy teraz, w myśl § 3, zastąpimy we wzorach (21), (22), (23) i (24) w przez $c_{\mathrm{II}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}})$, β przez $\alpha/(1+\alpha)$, i co za tym idzie, nierówność $w > \beta$ przez $c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}$, μ i ν potraktujemy zaś ponownie jako liczby defektów, które pojawiły się odpowiednio na taśmie I i II od początku do końca obserwacji, otrzymamy wzory odnoszące się do porównywania dwóch procesów produkcyjnych. I tak definicja wiarogodności tego, że c_{II} przekracza α-krotność c_{I}, gdy obserwując obie taśmy aż do pojawienia się n-tego defektu zaobserwowaliśmy m defektów II (na taśmie II), przyjmie postać

$$(25) \quad \mathrm{W}(c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}|\mu = m, \mu+\nu = N) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}} = \alpha c_{\mathrm{I}}, \mu+\nu = N+1).$$

Tutaj prawa strona oznacza prawdopodobieństwo, że zaobserwujemy co najwyżej m defektów II obserwując taśmy aż do pojawienia się $(n+1)$-szego defektu, jeśli parametr c_{II} taśmy II jest równy α-krotności parametru c_{I} taśmy I.

Z wzoru (22) otrzymamy na prawdopodobieństwo HB tego, że c_{II} przekracza α-krotność c_{I}, gdy do chwili pojawienia się n-tego defektu zaobserwowaliśmy m defektów II, wzór

$$(26) \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}|\mu = m, \mu+\nu = n) = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+1}{k}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^k\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{n-k+1}.$$

Wreszcie transkrypcja wzoru (23) da nam obowiązującą w naszym przypadku regułę dualizmu:

$$(27) \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}|\mu = m, \mu+\nu = n) = \mathrm{W}(c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}|\mu = m, \mu+\nu = n),$$

a wobec wzoru (24) możemy prawdopodobieństwo (26) wyrazić za pomocą niekompletnej funkcji beta jak następuje:

$$(28) \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(c_{\mathrm{II}} > \alpha c_{\mathrm{I}}|\mu = m, \mu+\nu = N) = 1-I_{\alpha/(1+\alpha)}(m+1, N-m+1).$$

Zauważmy, że w dualizmie Oderfelda zakłada się jednostajny aprioryczny rozkład prawdopodobieństwa dla wadliwości w, dany wzorem

$$\mathrm{P}(w < \beta) = \beta \quad \text{dla} \quad 0 < \beta < 1.$$

Tak też należy rozumieć wzór (22). To nadaje odpowiedni sens wzorowi (26). Mianowicie należy go rozumieć w ten sposób, że *a priori* stosunek $c_{\mathrm{II}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}})$ ma rozkład jednostajny w odcinku $(0, 1)$, lub też, wyrażając to samo w innych słowach, że *a priori* stosunek $c = c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ ma rozkład prawdopodobieństwa dany wzorem

$$\mathrm{P}(c < a) = a/(1+a) \quad \text{dla} \quad 0 < a < \infty. \tag{29}$$

Ten rozkład prawdopodobieństwa stosunku c jest jednocześnie rozkładem prawdopodobieństwa jego odwrotności $1/c$, tj. stosunku $c_{\mathrm{I}}/c_{\mathrm{II}}$. Ta własność omawianego rozkładu odzwierciedla symetrię względem w i $1-w$ założenia o jednostajnym rozkładzie w w odcinku $(0, 1)$.

§ 7. Do tej pory omówiliśmy dwie reguły dualności. Pierwsza z nich odpowiada postępowaniu sekwencyjnemu. Ustanowiliśmy ją przy hipotezie, że *a priori* stosunek $w/(1-w)$ ma jednostajny rozkład na prostej. W tej regule i bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori*, i wiarogodność określone były dla postępowania sekwencyjnego, w którym losuje się kolejno sztuki do próbki tak długo, aż pojawi się n-ta sztuka dobra. Można ją nazwać *regułą sekwencyjno-sekwencyjną*. Do tej reguły doszliśmy w ten sposób, że prawdopodobieństwo *a posteriori* tego, że stosunek $c = c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ przekracza a, wyraziliśmy wzorem (16) opierając się na równości (15). Ale moglibyśmy też postąpić inaczej, a mianowicie za punkt wyjściowy wziąć wzór (16') i rozwinąć występujące tam całki opierając się na równości

$$\int_a^b \binom{n}{m} w^m (1-w)^{n-m} dw = \tag{30}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{m} \binom{n+1}{k} a^k (1-a)^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{m} \binom{n+1}{m} b^k (1-b)^{n-k+1}\right],$$

którą otrzymuje się za pomocą całkowania przez części. To dałoby nam zamiast wzoru (19) wzór

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(w > \beta \mid \mu = m, \nu = n) = \frac{1}{B(m+1, n-1)} \int_\beta^1 \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta = \tag{31}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+m-1}{k} \beta^k (1-\beta)^{n+m-1-k}.$$

Tutaj prawą stronę można odczytać jako prawdopodobieństwo, że w $(n+m-1)$-elementowej próbce wylosowanej z partii o wadliwości β, pojawi się co najwyżej m sztuk złych, co napiszemy tak:

$$(32)\qquad P_{HB1}(w > \beta | \mu = m, \nu = n) = P(\mu \leqslant m | w = \beta, \mu+\nu = n+m-1).$$

Wzór ten daje nam nową, sekwencyjno-klasyczną regułę dualności, oczywiście dla hipotezy o jednostajnym rozkładzie *a priori* na prostej stosunku $w/(1-w)$. W regule tej bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori* określone jest dla postępowania sekwencyjnego, a wiarogodność (tj. prawa strona (32)) jest określona dla klasycznego pobierania próbki o ustalonej z góry liczności.

Uzyskaliśmy te dwie reguły dualności wyrażając na dwa sposoby prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa o rozkładzie beta przekroczy zadaną liczbę. Było to możliwe dlatego, że obliczony po bayesowsku aposterioryczny rozkład wadliwości okazał się rozkładem beta. Okazuje się, że przy założeniu *a priori* jednostajnego rozkładu na prostej dla stosunku $w/(1-w)$ rozkład wadliwości *a posteriori* pod warunkiem, że przy sekwencyjnym badaniu partii do chwili pojawienia się n-tej sztuki dobrej pojawiło się m sztuk złych, jest taki sam, jak pod warunkiem, że w próbce liczącej $N = m+n$ elementów pojawiło się m sztuk złych. Możemy to napisać tak:

$$(33)\qquad P_{HB1}(w > \beta | \mu = m, \nu = n) = P_{HB1}(w > \beta | \mu = m, \mu+\nu = m+n).$$

Dla dowodu wystarczy obliczyć prawą stronę. Załóżmy więc na razie, że wadliwość w ma *a priori* rozkład (20) przy skończonym L, a więc rozkład o gęstości prawdopodobieństwa

$$p_L(\beta) = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{(1-\beta)^2} \quad \text{dla} \quad 0 < \beta < \frac{L}{1+L}.$$

Rozkład prawdopodobieństwa liczby μ sztuk wadliwych w próbce $(m+n)$-elementowej wylosowanej z partii o wadliwości $w = \beta$ dany jest wzorem

$$P(\mu = m | w = \beta, \mu+\nu = m+n) = \binom{m+n}{m}\beta^m(1-\beta)^n.$$

Wobec tego na podstawie wzoru Bayesa mamy

$$P_{HB}^{(L)}(w > \beta | \mu = m, \mu+\nu = m+n) =$$

$$= \frac{\int_{\beta}^{L/(1+L)} p_L(\beta) P(\mu = m | w = \beta, \mu+\nu = m+n)\,d\beta}{\int_0^{L/(1+L)} p_L(\beta) P(\mu = m | w = \beta, \mu+\nu = m+n)\,d\beta} = \frac{\int_{\beta}^{L/(1+L)} \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta}{\int_0^{L/(1+L)} \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta}.$$

Stąd przez przejście graniczne z $L \to \infty$ (które jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy $n \geqslant 2$) otrzymujemy

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(w > \beta | \mu = m, \mu + \nu = m+n) =$$

$$= \frac{\int\limits_{\beta}^{1} \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta}{\int\limits_{0}^{1} \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta} = \frac{1}{B(m+1, n-1)} \int\limits_{\beta}^{1} \beta^m (1-\beta)^{n-2} d\beta,$$

a to wobec (31) daje nam (33).

Z wzoru (33), wobec (19) i (32), otrzymujemy nowe dwie reguły dualizmu: klasyczno-sekwencyjną

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(w > \beta | \mu = m, \mu + \nu = m+n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | w = \beta, \nu = n-1) \tag{34}$$

i klasyczno-klasyczną

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(w > \beta | \mu = m, \mu + \nu = N = m+n) = \tag{35}$$

$$= \mathrm{P}(\mu \leqslant m | w = \beta, \mu + \nu = n+m-1),$$

które oczywiście odnoszą się do hipotezy o jednostajnym rozkładzie *a priori* na prostej stosunku $w/(1-w)$.

Zajmiemy się teraz regułami dualności odpowiadającymi hipotezie o jednostajnym rozkładzie wadliwości w odcinku $(0, 1)$. Reguła Oderfelda (23) jest klasyczno-klasyczna. Łatwo z niej uzyskać regułę klasyczno-sekwencyjną. Wystarczy w tym celu prawdopodobieństwo (24) wyrazić w oparciu o równość (15). Wychodząc z wzoru (24), za pomocą podstawienia $\beta = a/(1+a)$, i równości (15) otrzymujemy co następuje:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w > \beta | \mu = m, \mu + \nu = N) = 1 - I_\beta(m+1, N-m+1) = \tag{36}$$

$$= \frac{1}{B(m+1, N-m+1)} \int\limits_{\beta}^{1} \beta^m (1-\beta)^{N-m} d\beta =$$

$$= \frac{1}{B(m+1, N-m+1)} \int\limits_{\beta/(1-\beta)}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^m \left(\frac{1}{1+a}\right)^{N-m+2} da =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{N-m+k}{k} \beta^k (1-\beta)^{N-m+1} = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | w = \beta, \nu = N-m+1).$$

Równość ta daje nam klasyczno-sekwencyjną regułę dualności dla hipotezy jednostajnego rozkładu wadliwości. Powiada ona, że bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori* tego, że wadliwość w przekracza β, jeśli w próbce N-elementowej okazało się m sztuk wadliwych, jest równe prawdopodobieństwu tego, że przy losowaniu kolejnych sztuk z partii o wadliwości β aż do wylosowania $(N-m+1)$-szej sztuki dobrej pojawi się w próbce co najwyżej m sztuk złych.

Podobnie jak przy hipotezie o jednostajnym rozkładzie na prostej stosunku $w/(1-w)$ przy hipotezie o jednostajnym rozkładzie *a priori* wadliwości w w odcinku $(0,1)$ wadliwość w ma taki sam rozkład prawdopodobieństwa *a posteriori*, pod warunkiem, że przy sekwencyjnym badaniu partii aż do pojawienia się n-tej sztuki dobrej pojawiło się m sztuk złych, jak pod warunkiem, że w klasycznej próbce składającej się z $N = m+n$ sztuk pojawiło się m sztuk złych. Możemy to napisać tak:

$$(37)\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w>\beta|\mu=m,\nu=n)=\mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w>\beta|\mu=m,\mu+\nu=m+n).$$

Dla dowodu obliczymy lewą stronę (37). Na podstawie założenia wadliwość w ma *a priori* rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$p(\beta)=1 \quad \text{dla} \quad 0<\beta<1.$$

Musimy znać jeszcze warunkowy rozkład prawdopodobieństwa liczby sztuk wadliwych, które pojawią się przy kolejnym losowaniu sztuk z partii o wadliwości $w=\beta$ do chwili pojawienia się n-tej sztuki dobrej. Ale właśnie ten rozkład dany jest przez wzór (14), z tym tylko, że trzeba za α podstawić $\beta/(1-\beta)$, co daje $\beta=\alpha/(1+\alpha)$. A więc

$$\mathrm{P}(\mu=m|w=\beta,\nu=n)=\binom{n+m-1}{m}\beta^m(1-\beta)^n.$$

Teraz według reguły Bayesa

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w>\beta|\mu=m,\nu=n)=\frac{\int_\beta^1 p(\beta)\mathrm{P}(\mu=m|w=\beta,\nu=n)\,d\beta}{\int_0^1 p(\beta)\mathrm{P}(\mu=m|w=\beta,\nu=n)\,d\beta}=$$

$$=\frac{\int_\beta^1 \beta^m(1-\beta)^n d\beta}{\int_0^1 \beta^m(1-\beta)^n d\beta}=\frac{1}{B(m+1,n+1)}\int_\beta^1 \beta^m(1-\beta)^n d\beta=$$

$$=1-I_\beta(m+1,n+1),$$

a to wobec (24) daje (37).

Z wzorów (21), (23) i (37) otrzymujemy teraz sekwencyjno-klasyczną regułę dualizmu

$$(38)\qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(w>\beta|\mu=m,\nu=n)=\mathrm{P}(\mu\leqslant m|w=\beta,\mu+\nu=m+n+1).$$

Pozwala ona zastępować bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori* tego, że wadliwość przekracza β, gdy przy sekwencyjnym badaniu partii aż do pojawienia się n-tej sztuki dobrej pojawiło się m sztuk złych, przez prawdopodobieństwo, że $(n+m+1)$-elementowa próba wylosowana z partii o wadliwości β będzie zawierała co najwyżej m sztuk złych.

Wzory (36) i (37) dają nam ostatnią, sekwencyjno-sekwencyjną regułę dualizmu

$$\mathrm{P_{HB2}}(w > \beta|\mu = m,\, \nu = n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta,\, \nu = n+1). \tag{39}$$

We wzorze tym prawa strona jest prawdopodobieństwem tego, że losując kolejno sztuki z partii o wadliwości β aż do wylosowania $(n+1)$-szej sztuki dobrej, wylosujemy co najwyżej m sztuk złych.

Mamy więc również cztery reguły dualności odpowiadające hipotezie o jednostajnym rozkładzie wadliwości *a priori*.

Jak widzieliśmy, dla dwu omówionych hipotez co do rozkładu *a priori* udało się ustalić reguły dualności. Przy pierwszej z nich trzeba było przedstawiać bayesowskie prawdopodobieństwa *a posteriori*, gdy próbka liczyła N sztuk, przez prawdopodobieństwo warunkowe odnoszące się do próbki złożonej z $N-1$ sztuk. Przy drugiej hipotezie trzeba było w analogicznej sytuacji rozważać prawdopodobieństwo warunkowe odnoszące się do próbki złożonej z $N+1$ elementów. Zazwyczaj jednak definiuje się wiarogodność za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego odnoszącego się do próbki o tej samej liczności. Na przykład w przypadku pobierania próbek o stałej liczności, wiarogodnością tego, że wadliwość w przekracza β, gdy w próbce o liczności N pojawiło się m sztuk złych, nazywa się prawdopodobieństwo, że w próbce o tej samej liczności N pobranej z partii o wadliwości β pojawi się co najwyżej m sztuk złych. Za pomocą wzoru możemy tę definicję wiarogodności napisać tak:

$$\mathrm{W}(w > \beta|\mu = m,\, \mu+\nu = N) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta,\, \mu+\nu = N). \tag{40}$$

Nasuwa się pytanie, przy jakiej hipotezie co do rozkładu *a priori* otrzymamy po prawej stronie tej równości bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori* zdarzenia $w > \beta$. Okazuje się, że nie ma takiego rozkładu wadliwości w zwykłym sensie. Można jednak udowodnić odpowiednią regułę dualności, jeśli przyjąć hipotezę, że *a priori* logarytm odwrotności $1-w$ ma jednostajny rozkład na prostej. Przy tej hipotezie możemy mianowicie udowodnić, że bayesowskie prawdopodobieństwo *a posteriori* nierówności $w > \beta$, gdy w próbce liczącej N elementów pojawiło się m sztuk wadliwych, jest równe prawej stronie wzoru (40). Możemy to napisać za pomocą wzoru

$$\mathrm{P_{HB3}}(w > \beta|\mu = m,\, \mu+\nu = N) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta,\, \mu+\nu = N), \tag{41}$$

w którym cyfra 3 ma nam przypominać hipotezę o rozkładzie *a priori*. Jest to klasyczno-klasyczna reguła dualności odpowiadająca hipotezie 3 co do rozkładu *a priori*.

Już Oderfeld [1] i Steinhaus [5] zwracali uwagę, że operowanie w statystycznej kontroli jakości wiarogodnością w miejsce reguły i hipotezy Bayesa nie jest uwolnieniem się od arbitralnych hipotez, ale tylko ich zamaskowaniem. Wynik tu przedstawiony demaskuje tę hipotezę. Jak widać, jest ona z praktycznego punktu widzenia bardzo trudna do przyjęcia. Hipoteza Bayesa o jednostajnym apriorycznym rozkładzie wadliwości w odcinku $(0,1)$ jest przy niej zupełnie niewinna.

Dla dowodu (41) załóżmy najpierw, że $\log[1/(1-w)]$ ma *a priori* jednostajny rozkład na odcinku $(0,K)$, a więc że

$$\mathrm{P}\left(\log\frac{1}{1-w}<a\right)=\frac{a}{K} \quad \text{dla} \quad 0<a<K. \tag{42}$$

Jest to równoważne z tym, że *a priori* wadliwość w ma rozkład

$$\mathrm{P}_K(w<\beta)=\frac{1}{K}\log\frac{1}{1-\beta} \quad \text{dla} \quad 0<\beta<1-e^{-K},$$

którego gęstość wyraża się wzorem

$$p_K(\beta)=\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta} \quad \text{dla} \quad 0<\beta<1-e^{-K}.$$

Teraz na podstawie reguły Bayesa

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}^{(K)}(w>\beta|\mu=m,\mu+\nu=N)=$$

$$=\frac{\int_{\beta}^{1-e^{-K}} p_K(\beta)\mathrm{P}(\mu=m|w=\beta,\mu+\nu=N)d\beta}{\int_{0}^{1-e^{-K}} p_K(\beta)\mathrm{P}(\mu=m|w=\beta,\mu+\nu=N)d\beta}=$$

$$=\frac{\int_{\beta}^{1-e^{-K}}\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta}\binom{N}{m}\beta^m(1-\beta)^{N-m}d\beta}{\int_{0}^{1-e^{-K}}\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{1-\beta}\binom{N}{m}\beta^m(1-\beta)^{N-m}d\beta}=\frac{\int_{\beta}^{1-e^{-K}}\beta^m(1-\beta)^{N-m-1}d\beta}{\int_{0}^{1-e^{-K}}\beta^m(1-\beta)^{N-m-1}d\beta}.$$

Przez przejście graniczne (które jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy $n=N-m\geqslant 1$) otrzymujemy stąd

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(w>\beta|\mu=m,\mu+\nu=N)=\lim_{K\to\infty}\mathrm{P}_{\mathrm{HB}}^{(K)}(w>\beta|\mu=m,\mu+\nu=N)= \tag{43}$$

$$=\frac{1}{B(m+1,N-m)}\int_{\beta}^{1}\beta^m(1-\beta)^{N-m-1}d\beta.$$

Stosując teraz do prawej strony równość (30) otrzymujemy po odpowiednich uproszczeniach

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = \sum_{k=0}^{m} \binom{N}{k} \beta^k (1-\beta)^{N-k} =$$

$$= \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = N),$$

a więc (41).

Zauważmy, że rezultat rachunku byłby taki sam, gdybyśmy go przeprowadzili dla postępowania sekwencyjnego. Możemy więc napisać także sekwencyjno-klasyczną regułę dualności

$$(44) \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(w > \beta|\mu = m, \nu = n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n).$$

Gdy to już mamy, otrzymujemy znaną już drogą dwie dalsze reguły dualności: klasyczno-sekwencyjną

$$(45) \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = N) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \nu = N-m)$$

oraz sekwencyjno-sekwencyjną

$$(46) \qquad \mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(w > \beta|\mu = m, \nu = n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \nu = n).$$

W paragrafie tym mówiliśmy o regułach dualności w języku badania wadliwości partii. Wszystkie te reguły tłumaczą się bezpośrednio na język porównywania dwóch procesów produkcyjnych w myśl § 3. Dodajmy tutaj tylko, że hipoteza o jednostajnym rozkładzie na prostej logarytmu odwrotności $1-w$ tłumaczy się tu na hipotezę o jednostajnym rozkładzie na prostej logarytmu $1+c$, gdzie c jest stosunkiem $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$.

Omówiliśmy reguły dualności dla trzech hipotez o rozkładzie *a priori*, tj. dla hipotezy o jednostajnym rozkładzie na prostej stosunku $w/(1-w)$, dla hipotezy o jednostajnym rozkładzie wadliwości w w odcinku $(0, 1)$ i dla hipotezy o jednostajnym rozkładzie na prostej logarytmu odwrotności $1-w$. Można sformułować i udowodnić reguły dualności także dla innych rozkładów *a priori*. W szczególności, jak to zauważył K. Sarkadi [4], można to zrobić przy założeniu, że wadliwość w ma *a priori* rozkład beta z całkowitymi parametrami. Tutaj nie będziemy się tą sprawą zajmowali.

A oto dla przykładu niektóre wartości odczytane z tablic [2] na mocy wzorów (16′), (19), (24) i (28). Trzecią cyfrę znaczącą wyznaczono przez interpolację liniową. Tablice 1 i 2 obliczono przy hipotezie jednostajnego rozkładu *a priori* stosunku $c = w/(1-w)$ na prostej, tablice 3 i 4 — przy hipotezie, że *a priori* wadliwość w (stosunek $c/(1+c)$) ma rozkład jednostajny w odcinku $(0, 1)$.

TABLICA 1

Wartości β takie, że jeżeli w próbce pojawiło się m sztuk złych i n dobrych, to wadliwość w przekracza β z prawdopodobieństwem P

n	m	P		
		0,95	0,50	0,05
5	0	0,013	0,159	0,527
5	3	0,225	0,500	0,775
5	5	0,345	0,607	0,831
5	7	0,436	0,676	0,871

TABLICA 2

Wartości a takie, że gdy pojawiło się n defektów I i m defektów II, to stosunek c przekracza a z prawdopodobieństwem P

n	m	P		
		0,95	0,50	0,05
5	0	0,013	0,189	1,11
5	3	0,290	1,00	3,44
5	5	0,520	1,54	4,92
5	7	0,775	2,09	6,75

Porównując odpowiadające sobie wartości z tablic 1 i 3 oraz z tablic 2 i 4 możemy zobaczyć, w jakim stopniu hipotezy co do rozkładu *a priori* wpływają na przesunięcie rozkładu. Widzimy mianowicie, że wartości odpowiadające hipotezie, że *a priori* stosunek $w/(1-w)$ ma jednostajny

TABLICA 3

Wartości β takie, że jeżeli w próbce pojawiło się m sztuk złych i n dobrych, to wadliwość w przekracza β z prawdopodobieństwem P

n	m	P		
		0,95	0,50	0,05
5	0	0,009	0,109	0,393
5	3	0,169	0,393	0,655
5	5	0,271	0,500	0,729
5	7	0,355	0,575	0,776

TABLICA 4

Wartości a takie, że gdy pojawiło się n defektów I i m defektów II, to stosunek c przekracza a z prawdopodobieństwem P

n	m	P		
		0,95	0,50	0,05
5	0	0,009	0,122	0,647
5	3	0,204	0,647	1,90
5	5	0,372	1,00	2,59
5	7	0,550	1,35	3,46

rozkład na prostej są stale większe od odpowiednich wartości obliczonych przy hipotezie, że *a priori* w ma rozkład jednostajny w odcinku $(0,1)$.

§ 8. Wzór (31) mówi nam, że jeśli stosunek $w/(1-w)$ ma *a priori* jednostajny rozkład na prostej, to wadliwość w ma *a posteriori* rozkład beta ze wskazanymi tam parametrami, pod warunkiem, że przy losowaniu kolejnych sztuk do próbki do chwili pojawienia się n-tej sztuki dobrej pojawiło się m sztuk złych. Wiemy też, że przy zachowaniu liczb m i n rozkład ten pozostanie niezmieniony, gdy postępowanie sekwencyjne zastąpimy przez klasyczne pobieranie próbki o ustalonej liczności $N = m+n$. Z wzoru tego znajdujemy, że wtedy oczekiwana (średnia) wadliwość wynosi

$$(m+1)/(m+n) = (m+1)/N \tag{47}$$

(gdzie N oznacza liczność próbki). Wyrażenie (47) jest estymatorem wadliwości, jaki otrzymujemy przy hipotezie jednostajnego *a priori* rozkładu stosunku $w/(1-w)$ na prostej. Jak wiemy z wzoru (20), hipoteza ta uprzywilejowuje wadliwości bliskie 1. Tu widzimy jeszcze raz to samo. Jak wiadomo, nieobciążonym estymatorem wadliwości w jest stosunek m/N ilości sztuk złych do liczności próbki. Widzimy więc, że estymator wadliwości odpowiadający jednostajnemu rozkładowi *a priori* stosunku $w/(1-w)$ na prostej daje zawsze wartości większe od nieobciążonego estymatora m/N, a więc jak gdyby poprawia próbkę przez powiększenie wadliwości.

Podobny efekt występuje również dla estymatora wadliwości, jaki otrzymujemy przy hipotezie, że *a priori* $\log[1/(1-w)]$ ma jednostajny rozkład na prostej. Z wzoru (43) odczytujemy mianowicie, że przy tej hipotezie co do rozkładu wadliwości *a priori* wadliwość ma *a posteriori* rozkład beta z parametrami $(m+1, N-m)$, gdy w czasie badania pojawiło się m sztuk złych i $n = N-m$ sztuk dobrych. Wartość oczekiwana obliczona z tego rozkładu jest równa

$$(m+1)/(N+1) = (m+1)/(m+n+1). \tag{48}$$

Wyrażenie (48) jest estymatorem wadliwości odpowiadającym omawianemu rozkładowi *a priori*. Estymator (48) daje wartości mniejsze od estymatora (47).

Podamy teraz estymator wadliwości, jaki otrzymujemy przy hipotezie, że *a priori* wadliwość ma rozkład jednostajny w odcinku $(0, 1)$. Dotyczy on zarówno badania klasycznego, jak i sekwencyjnego. Z wzoru (23′) odczytujemy, że *a posteriori* wadliwość ma wówczas rozkład beta z parametrami $(m+1, N-m+1)$, gdy pojawiło się w czasie badania m sztuk złych i $n = N-m$ sztuk dobrych. Wartość oczekiwana tego rozkładu *a posteriori* wynosi wobec tego

$$(m+1)/(N+2) = (m+1)/(m+n+2). \tag{49}$$

Wyrażenie (49) jest szukanym estymatorem, który jest znany dla badania klasycznego. Ten estymator zachowuje się w stosunku do estymatora nieobciążonego inaczej niż dwa poprzednie. Daje on mianowicie wartości większe od estymatora nieobciążonego, gdy stosunek liczby sztuk wadliwych do liczności próbki jest mniejszy od $\frac{1}{2}$, a mniejsze, gdy ten stosunek jest większy od $\frac{1}{2}$, a więc jak gdyby przesuwa wynik próby w kierunku $\frac{1}{2}$. Tak oto odbijają się na estymatorach hipotezy o rozkładzie *a priori*.

Wyrażenia (47), (48) i (49) można też traktować jako estymatory stosunku $c_{II}/(c_I+c_{II})$ parametru taśmy II do sumy parametrów taśmy I i taśmy II. Należy wtedy traktować m jako liczbę defektów, jakie się pojawiły na taśmie II, a n — jako liczbę defektów, jakie się pojawiły na taśmie I od początku do końca badania. Wyrażenie (47) jest estymatorem odpowiadającym założeniu jednostajnego rozkładu *a priori* na prostej stosunku $c = c_{II}/c_I$, wyrażenie (48) jest estymatorem, który się otrzymuje, gdy *a priori* $\log(1+c)$ ma jednostajny rozkład na prostej, a wyrażenie (49) jest estymatorem, który odpowiada założeniu, że stosunek c ma *a priori* rozkład (29).

Zajmijmy się teraz estymowaniem stosunku $c = c_{II}/c_I$ parametrów dwóch procesów Poissona. Zauważmy, że wzory (16) i (26) wyrażają nie co innego, jak rozkład *a posteriori* tego stosunku. Pierwszy z nich odnosi się do hipotezy o jednostajnym rozkładzie *a priori* stosunku c na całej prostej, drugi — do hipotezy, że stosunek c ma *a priori* rozkład (29). Przy trzeciej hipotezie co do rozkładu *a priori*, a mianowicie przy hipotezie, że $\log(1+c)$ ma *a priori* jednostajny rozkład na prostej, możemy korzystając ze związku $c = w/(1-w)$ wyznaczyć aposterioryczny rozkład c z wzoru (43). Obliczając z tych rozkładów wartości oczekiwane znajdziemy interesujące nas estymatory stosunku c.

Przez różniczkowanie wzoru (16) lub też przez podstawienie $\beta = \alpha/(1+\alpha)$ we wzorze (16') (podyktowane związkiem $c = w/(1-w)$), znajdujemy, że przy pierwszej hipotezie co do rozkładu *a priori* stosunek c ma *a posteriori* rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$(50)\qquad \frac{1}{B(m+1, n-1)}\cdot\frac{\alpha^m}{(1+\alpha)^{m+n}}.$$

Podobnie, przez różniczkowanie prawej strony wzoru (26) lub też przez takie jak wyżej podstawienie w przedstawieniu całkowym tego prawdopodobieństwa zgodnym z wzorem (28), otrzymujemy, że przy drugiej hipotezie co do rozkładu *a priori* stosunek c ma *a posteriori* rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$(51)\qquad \frac{1}{B(m+1, n+1)}\cdot\frac{\alpha^m}{(1+\alpha)^{m+n+2}}.$$

Wreszcie przy trzeciej hipotezie co do rozkładu c *a priori* przez to samo co wyżej podstawienie znajdujemy, że wówczas stosunek c ma *a posteriori* rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$(52)\qquad \frac{1}{B(m+1, n)}\cdot\frac{\alpha^m}{(1+\alpha)^{m+n+1}}.$$

Korzystając teraz z przedstawienia funkcji beta w postaci

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$$

(które otrzymuje się z przedstawienia

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

przez podstawienie $x = y/(1+y)$) możemy teraz łatwo znaleźć te aposterioryczne wartości oczekiwane, będące szukanymi estymatorami stosunku c.

I tak z wzoru (50) znajdujemy, że jeśli *a priori* stosunek c ma jednostajny rozkład na prostej, to aposterioryczna wartość oczekiwana stosunku c istnieje wtedy, gdy $n \geqslant 3$, i wynosi

$$\frac{m+1}{n-2} = \int_0^\infty \frac{1}{B(m+1, n-1)} \cdot \frac{a^{m+1}}{(1+a)^{m+n}} da; \tag{53}$$

z wzoru (51) znajdujemy, że jeśli stosunek c ma *a priori* rozkład (29), to aposterioryczna wartość oczekiwana stosunku c istnieje, pod warunkiem, że $n \geqslant 1$, i wynosi

$$\frac{m+1}{n} = \int_0^\infty \frac{1}{B(m+1, n+1)} \cdot \frac{a^{m+1}}{(1+a)^{m+n+2}} da; \tag{54}$$

wreszcie z wzoru (52) znajdujemy, że jeśli $\log(1+c)$ ma *a priori* jednostajny rozkład na prostej, to aposterioryczna wartość oczekiwana stosunku c istnieje, pod warunkiem, że $n \geqslant 2$, i wynosi

$$\frac{m+1}{n-1} = \int_0^\infty \frac{1}{B(m+1, n)} \cdot \frac{a^{m+1}}{(1+a)^{m+n+1}} da. \tag{55}$$

Widzimy więc, że we wszystkich przypadkach estymator ma w liczniku powiększoną o 1 liczbę defektów zauważonych na taśmie II. Natomiast w mianowniku występuje liczba defektów, jakie się pojawiły w czasie badania na taśmie I, pomniejszona o 0, 1 lub 2, w zależności od tego, jaki jest *a priori* rozkład stosunku c.

Wyrażenia (53), (54) i (55) można też uważać za estymatory stosunku $w/(1-w)$ frakcji sztuk wadliwych do frakcji sztuk dobrych w partii. Przez m należy wówczas rozumieć liczbę sztuk złych, a przez n liczbę sztuk dobrych, jakie się pojawiły w próbce od początku do końca badania. Pierwsze z nich odpowiada hipotezie, że *a priori* stosunek $w/(1-w)$ ma jednostajny rozkład na prostej, drugie — hipotezie, że *a priori* wadliwość w ma jednostajny rozkład w odcinku $(0, 1)$, trzecie — hipotezie, że *a priori* $\log[1/(1-w)]$ ma jednostajny rozkład na prostej.

Prace cytowane

[1] J. Oderfeld, *On the dual aspect of sampling plans*, Colloquium Mathematicum 2(1951), str. 89-97.

[2] K. Pearson, *Tables of the incomplete beta-function*, II wydanie, Cambridge 1948.

[3] A. Romejko, *Porównywanie dwóch partii towaru*, Zastosowania Matematyki 3(1957), str. 217-228.

[4] K. Sarkadi, *A selejtarány Bayes-féle valószinüségi határaira vonatkozó dualitási elvröl (On the rule of dualism concerning the Bayes' probability limits of the fraction defective)*, Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei II, Budapest 1953, str. 275-285.

[5] H. Steinhaus, *Quality control by sampling (A plea for Bayes' rule)*, Colloquium Mathematicum 2(1951), str. 98-108.

[6] — *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki 1(1953), str. 4-25.

[7] — *Prawdopodobieństwo, wiarogodność, możliwość*, Zastosowania Matematyki 1(1954), str. 149-171.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 25. VI. 1956

Г. ШТАЙНХАУЗ и С. ЗУБЖИЦКИЙ (Вроцлав)

О СРАВНИВАНИИ ДВУХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ И ПРИНЦИПЕ ДУАЛИЗМА

РЕЗЮМЕ

Исходной точкой статьи является задача сравнивания дефектности двух непрерывных производственных процессов. Примером непрерывного производственного процесса может служить лента искусственного шёлка выделываемая автоматом. Чтобы получить пример сравнивания двух производственных процессов следует вообразить себе две ленты продвигающиеся друг возле друга с одинаковыми скоростями. Следует проверить, что дефектность ленты II превышает альфакратность дефектности ленты I, если во время наблюдений этих параллельно продвигающихся лент замечено m дефектов на ленте II и n дефектов на ленте I. В рассматриваемом примере дефектами являются пятна или дыры. Предполагается, что места дефектов на каждой из лент создают однородный процесс Пуассона соответственно с параметрами c_{I} и c_{II}, и что то, что происходит на одной ленте, стохастически не зависит от того, что происходит на второй ленте. Под дефектностью ленты понимается значение параметра процесса Пуассона изображающего распределение дефектов на ленте.

Рассмотрены два способы исследования: один, состоящий в наблюдении лент до момента, когда общее число дефектов двух лент достигнет заданного числа N (тогда $m+n=N$), называемый в статье *классическим*, и второй, состоящий в наблюдении лент до момента, когда на ленте I появится n-ый дефект (n заданное число), называемый *секвенционным*.

Для каждого из этих способов исследования найдено апостериорную вероятность, что с начала до конца исследования появилось m дефектов на ленте II и n дефектов на ленте I, при следующих гипотезах о распределении априори отношения $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$:

1. Отношение $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ имеет априори равномерное распределение на прямой;
2. Отношение $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ имеет априори распределение с функцией распределения

$$\mathrm{P}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} < a) = a/(1+a) \qquad \text{при} \qquad 0 < a < \infty;$$

3. $\log(1+c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}})$ имеет априори равномерное распределение на прямой.

Эту вероятность апостериори в случае классического исследования обозначено через

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n),$$

в случае же секвенционного исследования через

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \nu = n).$$

Буквы H, B должны напоминать, что дело имеется с вероятностью апостериори, вычисленной при некоторой гипотезе о распределении априори, при помощи формулы Бэйеса, а $j = 1, 2, 3$ должно указывать гипотезу о априорном распределении. Пусть наконец

$$\mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu+\nu = m+n)$$

обозначает вероятность, что при классическом исследовании, продолжающимся до момента, когда общее число дефектов на обеих лентах достигает числа $m+n$ появлятся не больше чем m дефектов на ленте II, если параметр c_{II} ленты II равен альфакратности параметра c_{I} ленты I, и пусть

$$\mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \nu = n)$$

обозначает вероятность, что при секвенционном исследовании, продолжающимся до момента появления n-го дефекта на ленте I, на ленте II появится не больше m дефектов, если параметр c_{II} ленты II равен альфакратности параметра c_{I} ленты I.

Апостериорная вероятность при предположении, что некоторый параметр имеет априори равномерное распределение на прямой, понимается здесь как предел, при $L \to \infty$, вероятностей апостериори, вычисленных при предположении, что этот параметр имеет априори равномерное распределение на интервале $(0, L)$.

Доказано следующие, классически-классические формулы дуализма:

(1) $$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}1}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu+\nu = m+n-1) \quad (n \geqslant 2),$$

(2) $$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}2}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu+\nu = m+n+1) \quad (n \geqslant 0),$$

(3) $$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}3}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu+\nu = m+n) \quad (n \geqslant 1).$$

Зависимости

$$(4)\quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \nu = n) \qquad (j = 1, 2, 3),$$

$$(5)\quad \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \nu = n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu+\nu = m+n)$$

дают возможность каждую из формул дуализма (1), (2) и (3) пополнить тремя аналогичными: классически-секвенционной, секвенционно-классической и секвенционно-секвенционной.

Особого внимания заслуживает формула (3), которая разоблачает гипотезу о распределении априори, упрятанную в как будто бы не имеющим связи с произвольными гипотезами понятии достоверности, которое определяется обыкновенно как правая сторона (3).

Можно доказать, что для каждого t (причём t обозначает общую длину просмотренных частей лент) вероятность, что ближайший замеченный дефэкт будет дефектом на ленте I, равна $p = c_{\mathrm{I}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}})$, вероятность же, что ближайший замеченный дефект будет дефектом на ленте II, равна $q = c_{\mathrm{II}}/(c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}})$. Это сводит задачу сравнивания двух процессов Пуассона к исследованию состава урны содержащей фракцию p белых шаров и фракцию $q = 1-p$ черных шаров, или, что то де, к рассматриванию дефектности партии. В последним случае роль дефектности играет фракция черных шаров, $w = q$, а $p = 1-w$ является фракцией хороших штук. Соотношение

$$w = (c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}})/(1+c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}),$$

с которого следует, что неравности $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a$ и $w > \beta$, причём $\beta = a/(1+a)$ равносильные, даёт возможность перевести все теоремы, высказанные о отношении $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$, на теоремы о дефектности w.

Итак, m обозначает теперь число плохих штук, n — число хороших штук, которые появились в выборке от начала до конца исследования. Классическое исследование понимается как выборку с заданной численностью, секвенционное исследование — как выборку до момента, когда n-ая штука окажется хорошая, причём n заданное число.

Гипотеза о распределении априори отношения $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ переводится на следующие гипотезы о распределении априори дефектности w:

1'. Отношение $w/(1-w)$ имеет априори равномерное распределение на прямой;

2'. Дефектность w имеет априори равномерное распределение в интервале $(0, 1)$;

3'. $\log[1/(1-w)]$ имеет априори равномерное распределение на прямой.

Получаются следующие, классически-классические, формулы дуализма:

$$(1')\quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}1'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n-1) \qquad (n \geqslant 2);$$

$$(2')\quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}2'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n+1) \qquad (n \geqslant 0);$$

$$(3')\quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}3'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n) \qquad (n \geqslant 1).$$

Формулы (2') нашёл Одерфельд [1]. Остальные формулы – новые.
Соотношения

$$(4') \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(w > \beta|\mu = m, \nu = n) \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$(5') \quad \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m|w = \beta, \nu = n)$$

разрешают с каждой из формул (1), (2) и (3) получить следующие три: классически-секвенционную, секвенционно-классическую и секвенционно-секвенционную

H. STEINHAUS and S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

ON COMPARING TWO PRODUCTION PROCESSES AND ON THE PRINCIPLE OF DUALISM

SUMMARY

The starting point of the work is the problem of comparing the per cent defective of two continuous production processes. An example of a continuous production process is provided by a ribbon of artificial silk produced continuously by an automaton. In order to obtain an example of comparing two production processes let us imagine two ribbons running beside each other. with the same velocity. We aim at ascertaining that the defectiveness of ribbon II exceeds the alfa-plicity of the per cent defective of ribbon I if, in the course of observing these two ribbons running parallel, m defects on ribbon II and n defects on ribbon I are noted. In our example stains or holes constitute defects. It is assumed that the places of defects on each of the ribbons form a homogeneous Poisson process with the parameters c_{I} and c_{II} respectively and that what happens on one ribbon is stochastically independent of what happens on the other ribbon. By the per cent defective of the ribbon we understand the value of the parameter of the Poisson process describing the distribution of defects on the ribbon.

Two methods of investigation are considered. One of them, termed *classical*, consists in observing the ribbons up to the moment when the joint number of defects on the two ribbons equals a certain number N, fixed beforehand (then $m+n = N$). The other method, termed *sequential*, consists in observing the ribbons up to the moment when the n-th defect appears on ribbon I, n being fixed beforehand. For each of these methods the authors have found the *a posteriori* probability of $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a$, on condition that from the beginning to the end of the investigation m defects have appeared on ribbon II and n defects have appeared on ribbon I, under the following assumptions concerning the *a priori* distribution of the ratio $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$:

1. The ratio $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ has *a priori* a uniform distribution on the straight line.
2. The ratio $c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}}$ has *a priori* a distribution with the distribution function

$$\mathrm{P}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} < a) = a/(1+a) \quad \text{for} \quad 0 < a < \infty.$$

3. $\log(1+c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}})$ has *a priori* a uniform distribution on the straight line.

Denote this probability *a posteriori* in the case of classical investigation by

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \mu+\nu = m+n),$$

and in the case of sequential investigation by

$$\mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a|\mu = m, \nu = n),$$

the letters H, B are to remind us that we deal with the probability *a posteriori* calculated under a certain hypothesis concerning the *a priori* distribution with the aid of the Bayes rule, and $j = 1, 2, 3$ is to indicate the hypothesis concerning the *a priori* distribution. Finally let us denote by

$$\mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu + \nu = m + n)$$

the probability that, in the classical investigation conducted up to the moment when the joint number of defects on the two ribbons is equal to $m+n$, at most m defects will appear on ribbon II, and by

$$\mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \nu = n)$$

the probability that, in the sequential investigation conducted up to the moment of the appearance of the n-th defect on ribbon I, at most m defects will appear on ribbon II if the parameter c_{II} of ribbon II is equal to an alfa-plicity of the parameter c_{I} of ribbon I. The *a posteriori* probability under the assumption that a certain parameter has *a priori* a uniform distribution on the straight line is understood as a limit, with $L \to \infty$, of the *a posteriori* probabilities calculated under the assumption that the parameter in question has *a priori* a uniform distribution on the segment $(0, L)$.

The following classical-classical duality rules are proved:

$$\text{(1)} \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB1}}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a | \mu = m, \mu + \nu = m + n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu + \nu = m + n - 1) \quad (n \geqslant 2),$$

$$\text{(2)} \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB2}}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a | \mu = m, \mu + \nu = m + n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu + \nu = m + n + 1) \quad (n \geqslant 0),$$

$$\text{(3)} \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB3}}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a | \mu = m, \mu + \nu = m + n) = \\ = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu + \nu = m + n) \quad (n \geqslant 1).$$

The relations

$$\text{(4)} \quad \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a | \mu = m, \mu + \nu = m + n) = \\ = \mathrm{P}_{\mathrm{HB}j}(c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} > a | \mu = m, \nu = n) \quad (j = 1, 2, 3)$$

and

$$\text{(5)} \quad \mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \nu = n) = \mathrm{P}(\mu \leqslant m | c_{\mathrm{II}}/c_{\mathrm{I}} = a, \mu + \nu = m + n)$$

make it possible to supplement each of the duality rules (1), (2) and (3) with three analogous ones, a classical-sequential one, a sequential-classical one and a sequential-sequential one.

Rule (3) is particularly remarkable, since it reveals the hypothesis of the *a priori* distribution which is concealed in the notion of fiducial probability (usually defined as the right side of (3)), which apparently is free from arbitrary hypotheses.

It can be shown that for every t (where t denotes the common length of the observed segments of the ribbons) the probability that the first defect to be noticed will be a defect on ribbon I is equal to $p = c_{\mathrm{I}}/(c_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}})$, and the probability that the first defect to be noticed will be a defect on ribbon II is equal to $q = c_{\mathrm{II}}/(c_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}})$. This reduces the problem of comparing two Poisson process to the investigation of the contents of a urn containing fraction p of white balls and fraction q $q = 1 - p$ of black balls, or in other words to the investigation of the per cent defective of the lot. In the latter case the rôle of per cent defective is played by the fraction of black balls, $w = q$, and $p = 1-w$ is the fraction of good pieces in the lot. The relation

$$w = (c_{II}/c_I)/(1+c_{II}/c_I),$$

which implies that the inequalities $c_{II}/c_I > a$ and $w > \beta$ where $\beta = a/(1+a)$, are equivalent, makes it possible to translate all the theorems that we have stated on the relation c_{II}/c_I into theorems on the per cent defective w.

And thus m will now denote the number of defective pieces and n the number of good pieces which have appeared in the sample from the beginning to the end of the investigation. Classical investigation will be understood as taking a sample whose size has been fixed beforehand, sequential investigation — as picking pieces for the sample until the n-th good piece appears, n being fixed beforehand. The hypotheses concerning the *a priori* distribution of the ratio c_{II}/c_I will be translated into the following hypotheses concerning the *a priori* distribution of the per cent defective w:

1. The relation $w/(1-w)$ has *a priori* a uniform distribution on the straight line.
2. Defectiveness w has *a priori* a uniform distribution on the segment $(0, L)$.
3. $\log[1/(1-w)]$ has *a priori* a uniform distribution on the straight line.

We obtain the following classical-classical duality rules:

$$(1') \quad P_{HB1'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = P(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n-1) \quad (n \geqslant 2),$$

$$(2') \quad P_{HB2'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = P(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n+1) \quad (n \geqslant 0),$$

$$(3') \quad P_{HB3'}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = P(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n) \quad (n \geqslant 1).$$

Rule (2′) has been found by J. Oderfeld [1]. The remaining ones are new.

The relations

$$(4') \quad P_{HBj}(w > \beta|\mu = m, \mu+\nu = m+n) = \\ = P_{HB_j}(w > \beta|\mu = m, \nu = n) \quad (j = 1, 2, 3)$$

and

$$(5') \quad P(\mu \leqslant m|w = \beta, \mu+\nu = m+n) = P(\mu \leqslant m|w = \beta, \nu = n)$$

make it possible to obtain from each of the rules (1′), (2′), (3′) three more rules: a classical-sequential one, a sequential-classical one and a sequential-sequential one.