

G. Rossa (Rostock)

DIE ANALYSE VON EMPIRISCH VERTEILTEN ZUFALLSGRÖSSEN AUF DEM ANALOGRECHNER

0. Zusammenfassung. Bei der praktischen Behandlung von Bedienungssystemen mit den Methoden der Bedienungstheorie steht man oft vor folgendem Problem:

Da Bedienungsmodelle stochastische Modelle sind, müssen also von einigen Zufallsgrößen (z.B. Zwischenankunfts- und Abfertigungszeit) die theoretischen Verteilungsfunktionen bestimmt werden. Gerade an dieser Aufgabe scheitern aber die Lösungen sehr vieler praktischer Probleme, da diese Zufallsgrößen oft nicht den von den Modellen vorausgesetzten einfachen theoretischen Verteilungen (Exponential- bzw. Poisson-Verteilung) gehorchen.

Auf der anderen Seite gibt es analytische Modelle, die anpassungsfähigere Verteilungen (Erlang-Verteilung) voraussetzen. Hier besteht nun wieder das praktische Problem darin, die entsprechend größere Anzahl von Parametern zu schätzen. Im folgenden wird eine Methode aufgezeigt, wie zu einer beliebigen empirisch vorliegenden Verteilungsfunktion mit Hilfe des Analogrechners die entsprechende Erlang-Verteilung ermittelt wird.

1. Erlang-Verteilung. Selten gehorchen in der Praxis zeitabhängige Zufallsgrößen der reinen Exponential-Verteilung, deren Dichtemaximum bei $t = 0$ liegt. Empirische Verteilungen haben ihr Dichtemaximum in der Regel bei $t > 0$. Die Exponentialverteilung ist die einzige „gedächtnislose“ Verteilung. Um diese Eigenschaft auch für andere Verteilungen zu erhalten, benutzt man folgenden Kunstgriff. Der vorliegende Zeitablauf (z.B. Abfertigungszeit) wird aus einer bestimmten Anzahl k exponentieller Phasen zusammengesetzt. Diese Verteilung wurde von Erlang eingeführt. Wenn jede Phase die gleiche Servicerate $\tilde{\mu}$ hat, ergibt sich folgende Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{\tilde{\mu}^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\tilde{\mu}t}, \quad \text{mit } \tilde{\mu} = k\mu,$$



wobei k die Zahl der Phasen und μ die Servicerate des gesamten Abfertigungsprozesses sind.

Außerdem gilt für den Mittelwert der Verteilung $\bar{x} = 1/\mu$ und für die Standardabweichung $s = 1/\mu\sqrt{k}$.

Diese Verteilung läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß für jede Phase eine unterschiedliche Servicerate μ_i angenommen wird. Für $k = 2$ lautet die Dichtefunktion dann

$$f(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})$$

mit der resultierenden Servicerate

$$\mu = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

bzw. für den allgemeinen Fall $k = n$

$$f(t) = \left(\prod_{\nu=1}^n \mu_\nu \right) \sum_{\nu=1}^n \frac{e^{-\mu_\nu t}}{\prod_{i=1, i \neq \nu}^n (\mu_1 - \mu_\nu)},$$

$$\mu = \frac{\prod_{\nu=1}^n \mu_\nu}{\sum_{\nu=1}^n \prod_{i>1, i \neq \nu}^n \mu_i}.$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen Erlang-Verteilung ist es in weitem Rahmen möglich, eine empirische Verteilung theoretisch zu beschreiben. Die dabei auftretende Schwierigkeit des Schätzens der einzelnen μ_i wird mit dem im folgenden beschriebenen Verfahren überwunden.

2. Darstellung der Erlang-Verteilung durch eine Differentialgleichung.

Für diese Darstellung muß die Dichtefunktion der Erlang-Verteilung in eine Differentialgleichung überführt werden. Hierfür hat sich die Terminologie der Regelungstechnik als sehr brauchbar erwiesen. Es muß ein solches Übertragungsglied konstruiert werden, daß bei einer definierten Eingangserregung die Antwort des Übertragungsgliedes gerade den gesuchten Zeitverlauf der Dichtefunktion darstellt.

Das Verhalten dieses Übertragungsgliedes wird allgemein durch die Differentialgleichung

$$(1) \quad a_0 \frac{d^k y}{dt^k} + a_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + a_k y = b_0 \frac{d^l x}{dt^l} + \dots + b_l x$$

beschrieben, wobei $x(t)$ der Zeitverlauf der Eingangserregung und $y(t)$ der Zeitverlauf der Antwort des Übertragungsgliedes ist. Durch Einführen des Differentialoperators $p = d/dt$ geht Gleichung (1) über in

$$a_0 p^k y + a_1 p^{k-1} y + \dots + a_k y = b_0 p^l x + \dots + b_l x.$$

Daraus läßt sich die sogenannte Übertragungsfunktion $W(p) = y/x$ bilden:

$$W(p) = \frac{b_0 p^l + b_1 p^{l-1} + \dots + b_l}{a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k} = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Für verschwindende Anfangsbedingungen der Gleichung (1) ist die Übertragungsfunktion gleich der Laplacetransformation der Übertragungsfunktion $W(p) \Rightarrow W(s)$. Es läßt sich also der Differentialoperator p durch die Variable des Bildbereiches s ersetzen,

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)};$$

$Q(s)$ ist die charakteristische Gleichung des Systems. Ihre Partialbruchzerlegung führt zu

$$W(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_k}{s-s_k}$$

mit

$$K_i = \left[\frac{P(s)}{Q'(s)} \right]_{s=s_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Nun ist die Rücktransformierte von $1/(s-s_1) = e^{s_1 t}$. Also die Rücktransformierte der Übertragungsfunktion

$$W(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_k e^{s_k t}.$$

Augenfällig ist hier die Ähnlichkeit mit der Dichtefunktion der allgemeinen Erlang-Verteilung, die ja eine Faltung von k Exponentialverteilungen ist:

$$f(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t} * \mu_2 e^{-\mu_2 t} * \dots * \mu_k e^{-\mu_k t}.$$

Man erhält also hierfür eine Differentialgleichung, wenn man den oben aufgeführten Weg rückwärts geht.

Dies sei am Beispiel der Faltung zweier Exponentialverteilungen demonstriert:

$$f(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t} * \mu_2 e^{-\mu_2 t},$$

$$(2) \quad L[f(t)] = \mu_1 \frac{1}{s + \mu_1} \cdot \mu_2 \frac{1}{s + \mu_2} = \mu_1 \mu_2 \frac{1}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}.$$

Die Rücktransformierte ergibt die bekannte Dichtefunktion

$$f(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}).$$

Wenn aber Gleichung (2) ausmultipliziert wird, folgt

$$L[f(t)] = \frac{\mu_1 \mu_2}{s^2 + (\mu_1 + \mu_2)s + \mu_1 \mu_2}.$$

Dieser Ausdruck wird dann gleich $W(s)$ gesetzt und s durch den Differentialoperator ersetzt:

$$W(p) = \frac{\mu_1 \mu_2}{p^2 + (\mu_1 + \mu_2)p + \mu_1 \mu_2} = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$(3) \quad \mu_1 \mu_2 x = y'' + (\mu_1 + \mu_2)y' + \mu_1 \mu_2 y$$

oder

$$ax = y'' + py' + ay.$$

Analog ergibt sich die Differentialgleichung für die allgemeine Erlang-Verteilung 3. Ordnung

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 x = y''' + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)y'' + (\mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3)y' + \mu_1 \mu_2 \mu_3 y$$

oder

$$(4) \quad ax = y''' + by'' + cy' + ay.$$

Den Übergang zur speziellen Erlang-Verteilung erhält man sofort durch

$$\mu_i = \mu k \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Es ist also dann bei

$$k = 2, \quad a = (\mu k)^2, \quad b = 2\mu k,$$

und bei

$$k = 3, \quad a = (\mu k)^3, \quad b = 3\mu k, \quad c = 3(\mu k)^2.$$

Für die Programmierung der Differentialgleichung (3) bzw. (4) auf dem Analogrechner ist zu beachten, daß alle Anfangsbedingungen Null sind.

Außerdem ist noch die Eingangserregung $x(t)$ zu bestimmen.

Wird für $x(t)$ die Sprungfunktion $u(t)$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0, \end{cases}$$

genommen, so bildet das Übertragungsglied die Verteilungsfunktion nach.

Die Laplace-Transformierte der Sprungfunktion ist

$$u(t) = X(s) = \frac{1}{s}.$$

Also ist die Laplace-Transformierte der Sprungantwort

$$Y(s) = W(s)X(s) = W(s)/s = H(s),$$

was einer Integration der Übertragungsfunktion entspricht. Wird für $x(t)$ dagegen der Dirac'sche Einheitsimpuls $\delta(t)$ genommen, so ergibt sich als Impulsantwort des Übertragungsgliedes die Dichtefunktion.

Der Dirac-Impuls hat die Höhe 1 und die Breite $t = 1$, also die Fläche 1. Seine Laplace-Transformierte ist $u(t) = X(s) = 1$, also ist $Y(s) = W(s) = I(s)$.

Es ist folgende Analogie zu beachten:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t),$$

$$I(s) = sH(s),$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t),$$

wobei $f(t)$ die Dichtefunktion und $F(t)$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße sind. Der Dirac-Impuls ergibt sich aus einer Differentiation der Sprungfunktion. Ebenso bildet die differenzierte Sprungantwort die Impulsantwort. Andererseits folgt aus der differenzierten Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße ihre Dichtefunktion. Diese Analogie zeigt den engen Zusammenhang dieser beiden an sich grundverschiedenen Gebiete.

3. Programmierung der Differentialgleichungen auf dem Analogrechner.

Die Programmierung der entsprechenden Differentialgleichungen auf dem Analogrechner setzt sich aus drei Teilaufgaben zusammen:

1. Programmierung der Differentialgleichung selbst,
2. Programmierung der Sprungfunktion bzw. des Dirac-Impulses,
3. Programmierung der Zeitachse.

Zu 1. Zur Lösung einer linearen Differentialgleichung k -ten Grades mit konstanten Koeffizienten ist eine k -malige Integration nötig, d.h. es werden k als Integrator geschaltete Rechenverstärker benötigt. Die Differentialgleichung wird dann nach der höchsten Ableitung aufgelöst:

$$k = 2: \quad y'' = -by' + a(x - y),$$

$$k = 3: \quad y''' = -ay'' - by' + c(x - y).$$

Dann werden entsprechend dem von Lord Kelvin eingeführten Rückkopplungsprinzip die rechten Seiten auf dem Analogrechner programmiert.

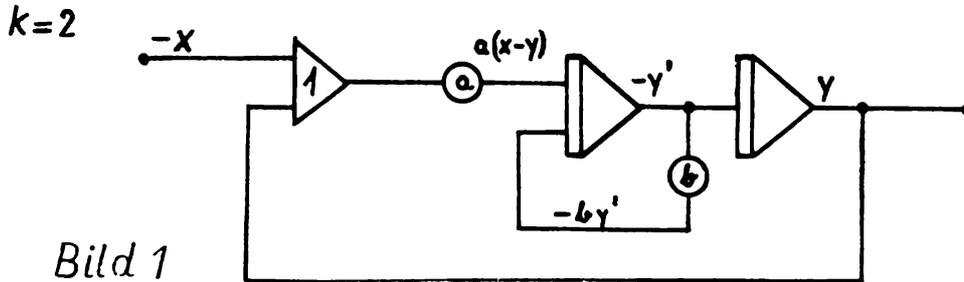


Bild 1

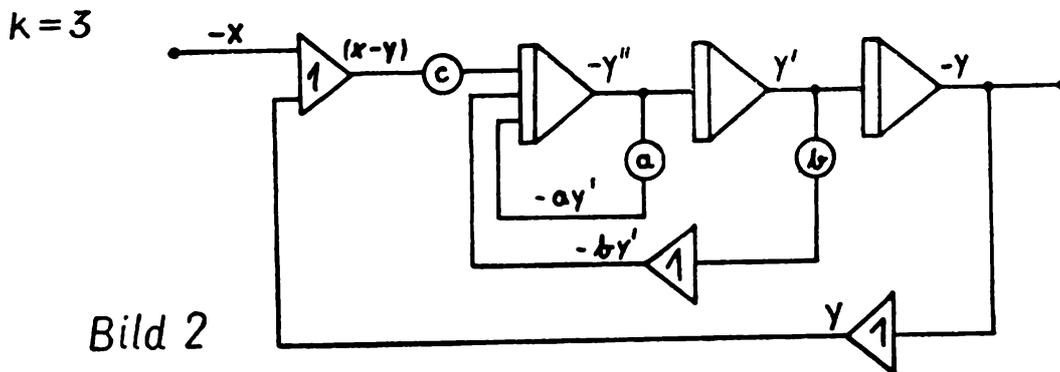
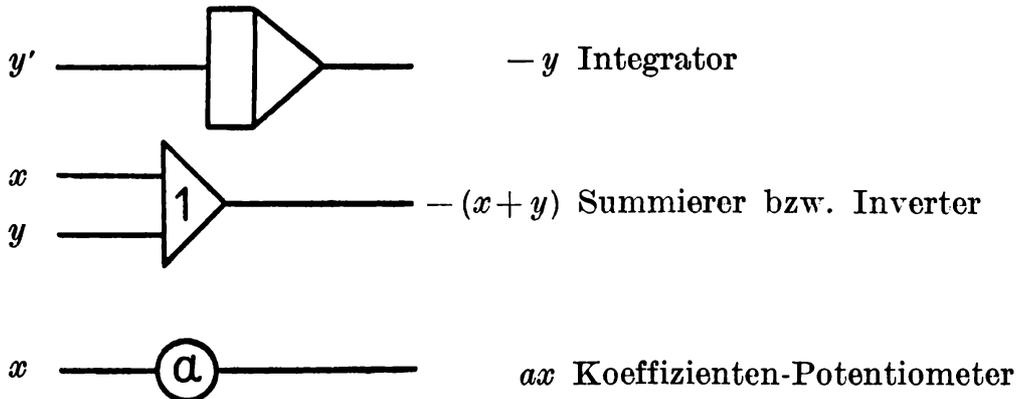


Bild 2

Dabei bedeuten die Symbole



Zu 2. Die Sprungfunktion läßt sich sehr einfach realisieren, indem zu Beginn der Rechnung eine bestimmte Spannung, die den Wert 1 erhält, auf den entsprechenden Eingang gelegt wird.

Der Dirac-Impuls wird mit Hilfe eines Komparators, das logische Element des Analogrechners, aufgebaut. Im Komparator werden 2 Spannungen verglichen und bei Gleichheit der beiden Spannungswerte schaltet ein Relais um. Dessen Kontakte können mit beliebigen Spannungen

belegt werden. Die Zeit wird durch eine linear ansteigende Spannung dargestellt. Sie ist die eine Vergleichsspannung. Die andere wird über ein Potentiometer fest auf den Wert ε eingestellt. Das Relais liegt zu Beginn der Rechnung auf der Spannung 1 (siehe Sprungfunktion). Wenn nun die Zeitspannung gleich ε ist, schaltet das Relais auf Masse. Damit ist ein Rechteckimpuls der Höhe 1 und der Breite ε gebildet. Da nun der Dirac-Impuls den Flächeninhalt 1 hat, muß ε auch gleich 1 gesetzt werden. Dies ist bedeutsam, da damit gleichzeitig der Wert für die Zeiteinheit $t = 1 = \varepsilon$ festgelegt ist. Dabei ist zu beachten, daß der Dirac-Impuls theoretisch einen exakten Nadelimpuls, d.h. einen Rechteckimpuls, dessen Breite ε gegen Null und damit dessen Höhe gegen unendlich geht, darstellt. In der Praxis hat die Breite natürlich einen endlichen Wert. Es ist aber immer darauf zu achten, daß gilt:

$$\varepsilon \text{ (Breite)} \ll 1 \text{ (Höhe)}.$$

Zu 3. Die Zeit muß gesondert programmiert werden, da damit der Rechenablauf gesteuert wird. Mit einem Potentiometer, einem Integrator und einem Komparator wird die linear ansteigende Zeitspannung gebildet. Sie springt bei Erreichen der Rechenspannung wieder auf den Wert Null zurück und die Rechnung ist beendet.

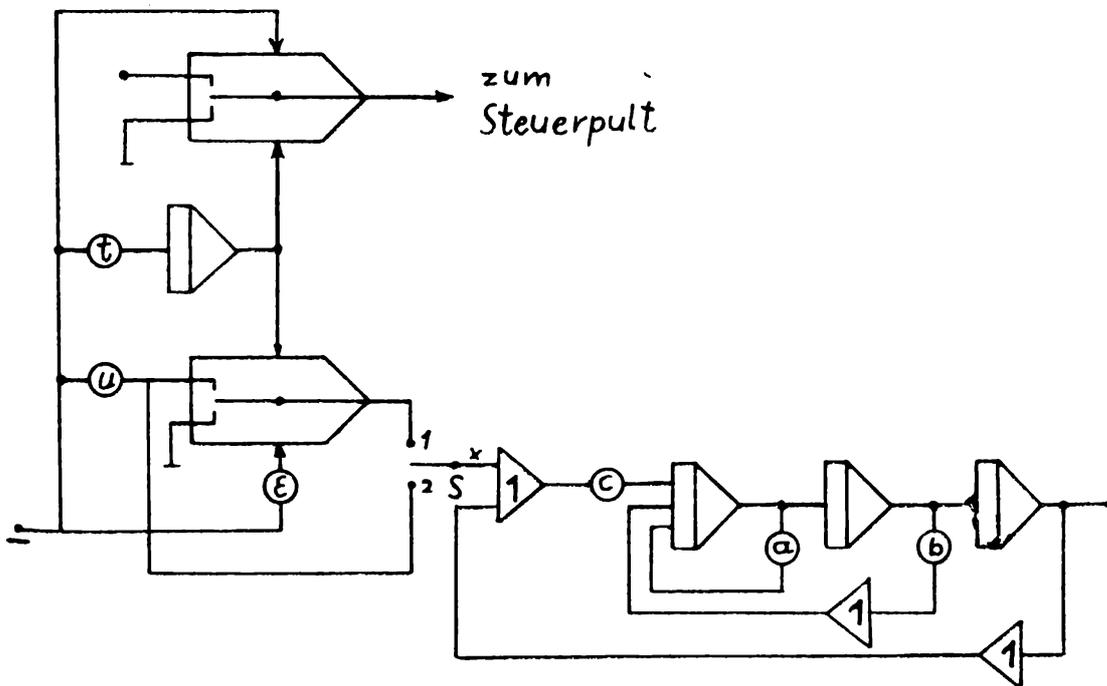


Bild 3

Bild 3 zeigt den kompletten Koppelplan für eine Differentialgleichung 3. Grades.

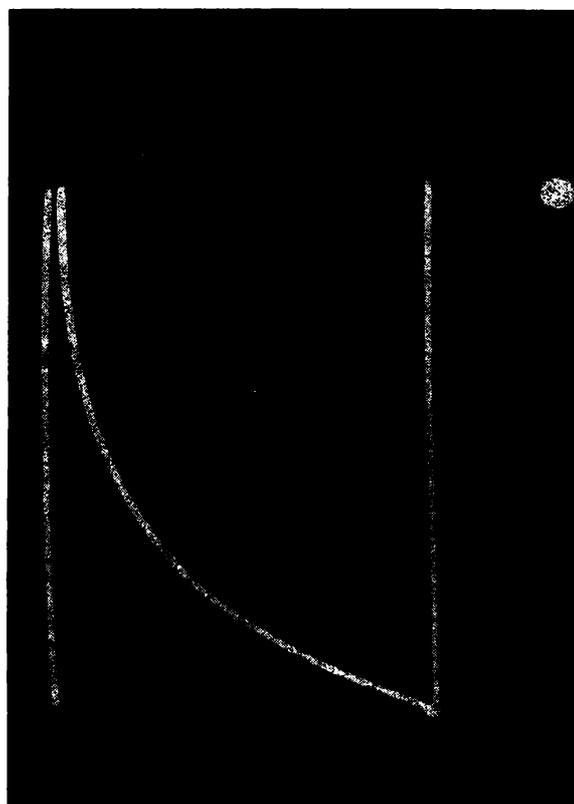
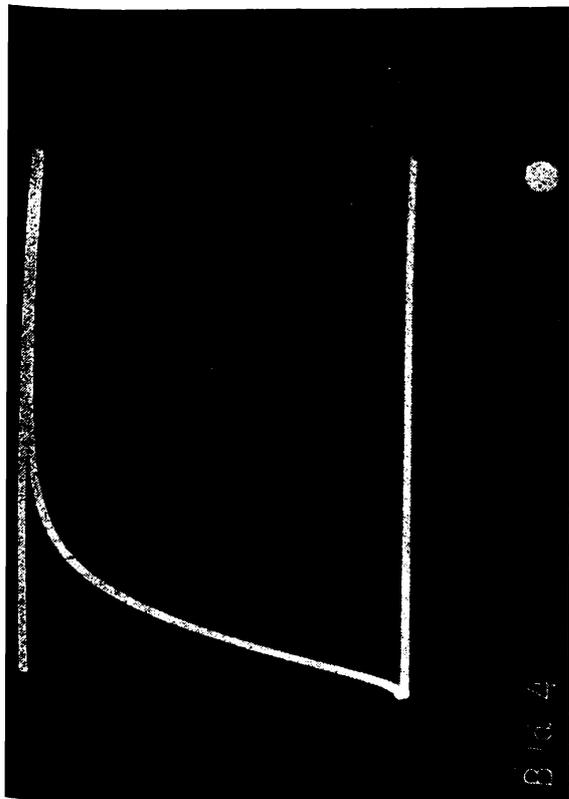
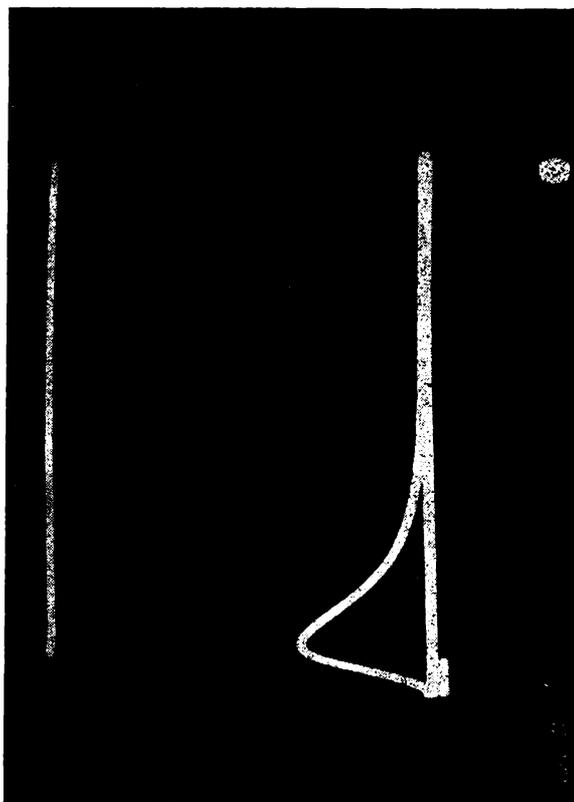
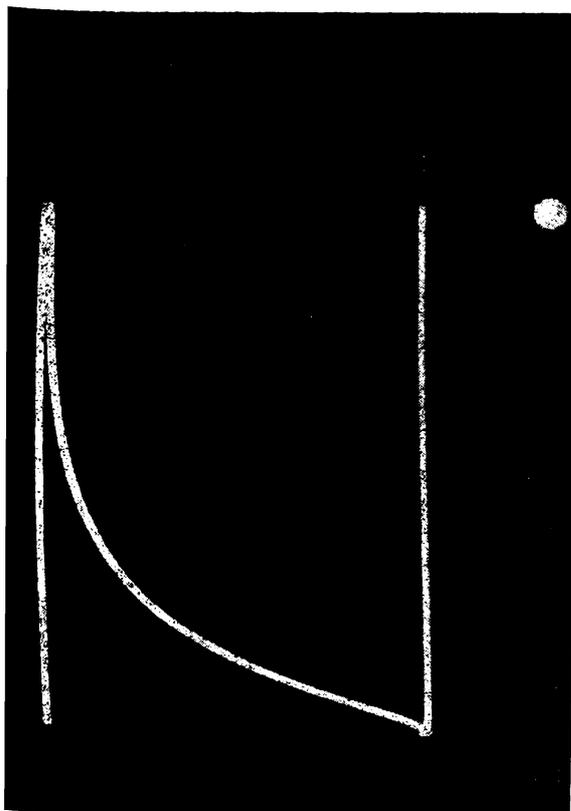
4. Darstellung einiger Verteilungs- und Dichtefunktionen. Die Lösungskurven der Differentialgleichungen, die entweder die Verteilungs- oder die Dichtefunktionen bilden, lassen sich einmal auf dem Sichtgerät und zum anderen auf dem x, y -Schreiber abbilden. Hierbei hat das Sichtgerät den Vorteil, daß der Rechner repetierend arbeiten kann, d.h. er wiederholt die Rechnung selbständig und mit großer Schnelligkeit (Repetierfrequenz ca. 15 Hz).

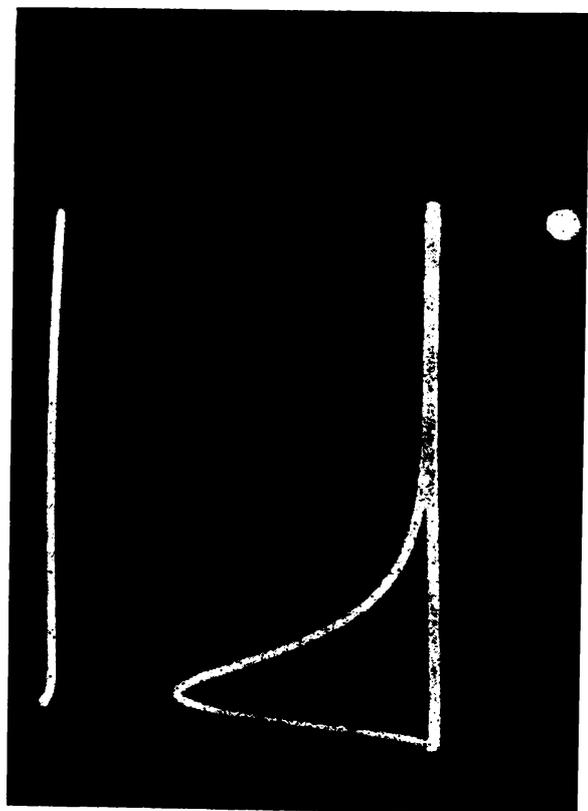
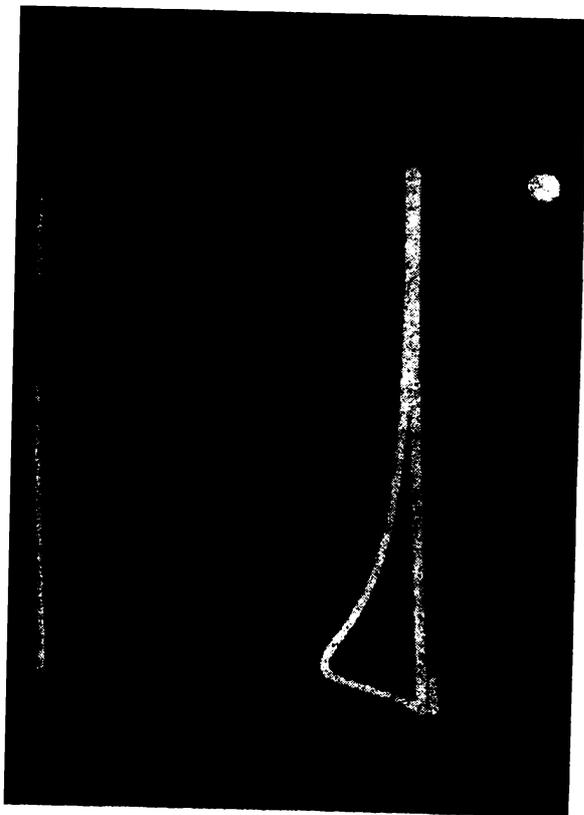
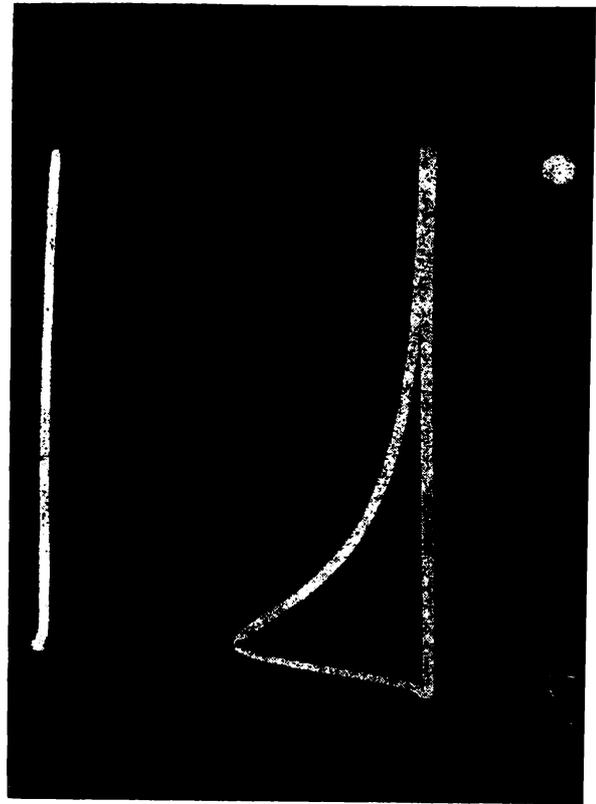
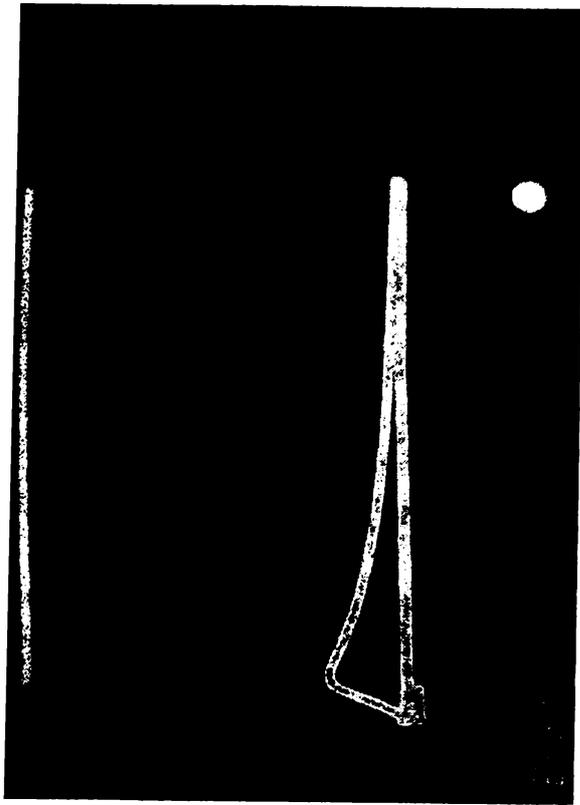
Auf dem Oszillographen läßt sich jede Koeffizientenveränderung sofort beobachten. Dadurch lassen sich die Kurven sehr bequem in die gewünschte Form bringen. Die Speicherung dieser Kurven ist dann allerdings nur auf photographischem Wege möglich. Außerdem ist die Genauigkeit der Rechnung im Repetierbetrieb geringer als im Langzeitbetrieb. Folgende Vorgehensweise erwies sich daher als die günstigste.

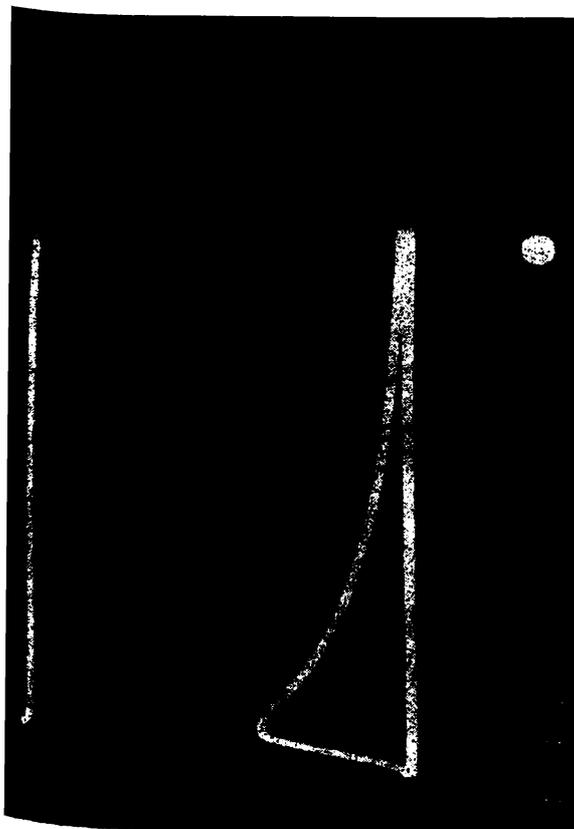
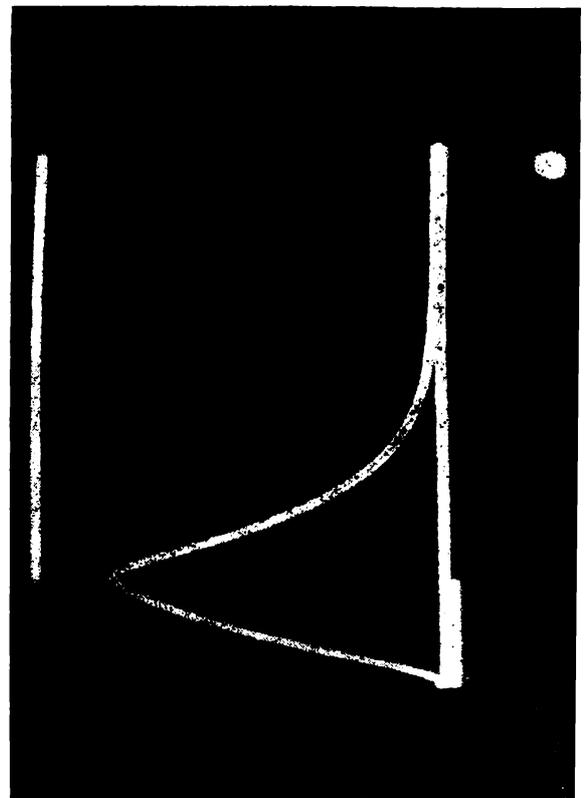
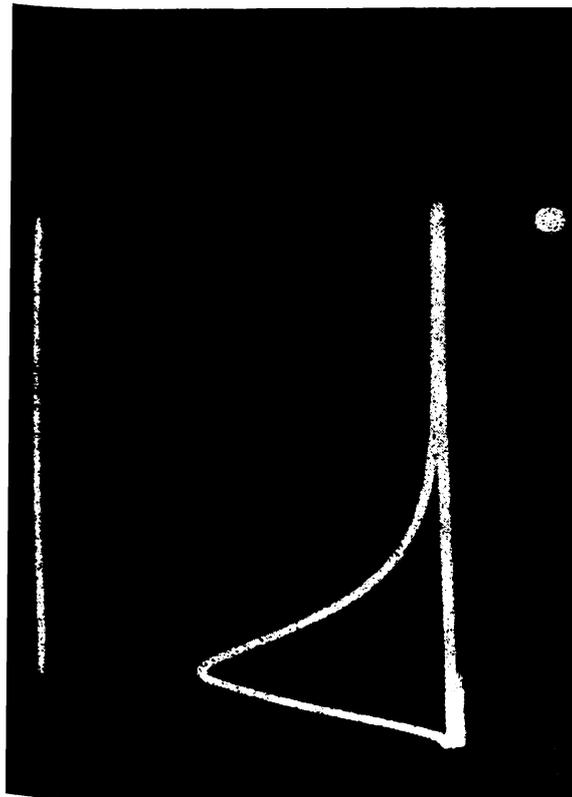
Im Repetierbetrieb und mit Darstellung der Lösung auf dem Sichtgerät wird die gewünschte Lösung eingestellt. Anschließend wird wegen der größeren Genauigkeit sowohl in Rechnung und Darstellung der Rechner im Langzeitbetrieb arbeiten und die Darstellung der Lösung auf dem Schreiber vorgenommen. Um den hohen Freiheitsgrad in der Wahl der Form der Lösungskurve zu verdeutlichen, werden nun einige Beispiele mit unterschiedlichster Koeffizienteneinstellung gegeben. Die erste notwendige Entscheidung ist die Festlegung der Ordnung der Differentialgleichung und damit der Zahl der einzelnen Exponentialverteilungen, die gefaltet werden sollen. Der einfachste Fall ist $k = 2$. Er wurde hier vorerst gewählt. Dann lassen sich, wie der Koppelplan (Bild 1) zeigt, noch die Koeffizienten a und b frei wählen.

Unabhängig von k und der entsprechenden Zahl der Koeffizienten lassen sich die "technischen" Parameter U und ε frei wählen (siehe Bild 3). Sie werden zur Normierung benutzt. Mit dem Potentiometer U wird die Höhe des Spannungssprunges und damit die Höhe des Dirac-Impulses festgesetzt. Diese Spannung wird mit 1 bewertet, da ja die Verteilungsfunktion mit unendlichem t gegen 1 geht. Mit ε wird die Breite des Einheitsimpulses festgelegt. Da sie auch mit 1 bewertet wird, liegt damit die Einheit der Zeitachse fest. Wie die Photographien der Dichtefunktionen zeigen, wurde der Einheitsimpuls mit umgekehrten Vorzeichen dargestellt und etwas unter die Zeitachse gelegt. Damit hat man sofort einen Überblick über die Zeiteinheit $t = 1$.

Die erste Bildgruppe (Bild 4—9) zeigt die Kurven der Verteilungs- und Dichtefunktionen mit drei verschiedenen Werten für den Koeffizienten b . Alle anderen Größen sind konstant. Es ist zu erkennen, daß mit wachsendem b die Kurven flacher bzw. mit geringerer Steigung verlaufen. Die oben aufgezeichnete Linie gibt den Wert $y = 1$ an. Für die Dichtefunktion ist dieser Wert zu groß. Die Kurven sind zu flach. Die y -Achse läßt sich durch Vergrößern von U beliebig dehnen.







Die folgenden drei Bilder 10, 11, 12 zeigen dies für sonst gleiche Parameter. Die obere Linie hat nun den Wert $y = 0,5$ durch Erhöhen der Spannung U auf den doppelten Wert.

Wie sich die Form der Verteilungskurve ändert, wenn sich ε auf das doppelte bzw. dreifache vergrößert, zeigen die Bilder 13 und 14. Ansonsten entsprechen die übrigen Parameter dem Bild 7. Es ist hier die Zeitachse um die entsprechenden Werte gedehnt worden. Bei praktischen Auswertungen ergeben sich dadurch natürlich völlig andere Verteilungen. Außerdem ist die Bedingung $\varepsilon \ll 1$ zu beachten.

Die Tabelle 1 stellt noch einmal die Parameter aller Fotografien zusammen.

TABELLE 1

Bild	S	U [V]	ε [V]	a	b
4	2	5	6	1	0,2
5	2	5	6	1	0,3
6	2	5	6	1	0,4
7	1	5	6	1	0,2
8	1	5	6	1	0,3
9	1	5	6	1	0,4
10	1	10	6	1	0,2
11	1	10	6	1	0,3
12	1	10	6	1	0,4
13	1	5	12	1	0,2
14	1	5	18	1	0,2

Bei der Einstellung der Koeffizienten der Differentialgleichung sind einige Bedingungen zu beachten. Die Differentialgleichungen beschreiben an sich Schwingungsvorgänge und die Pole ihrer charakteristischen Gleichung stellen die freien Schwingungsmodi dar. Bei einer Schwingung lassen sich nun drei Fälle unterscheiden:

1. Der Schwingfall ist im engeren Sinne eigentlich nur das, was normalerweise unter Schwingung verstanden wird.

2. Wenn die Dämpfung so groß ist, daß sich gar nicht erst eine Schwingung ausbildet, liegt der Kriechfall vor.

3. Der Übergang zwischen beiden Zuständen ist der aperiodische Grenzfall.

Für diese Problematik sind natürlich nur der 2. und 3. Fall von Interesse.

Diese Gedanken finden eine interessante Analogie bei der Berechnung der einzelnen Serviceraten μ_i ($i = 1, \dots, k$) aus den Koeffizienten a, b, c , die auf dem Analogrechner eingestellt werden.

Für $k = 2$ berechnen sie sich aus der quadratischen Gleichung

$$\mu^2 - b\mu + a = 0,$$

zu

$$\mu_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}.$$

Eine reelle Lösung ergibt sich nur für den Fall

$$(5) \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq a.$$

Wenn die Wurzel komplex wird, stellt die Kurve den Schwingfall dar. Bei

$$(6) \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a$$

liegt der aperiodische Grenzfall vor.

Andererseits ergibt sich diese Gleichung (6), wenn alle Servicieraten gleich sind, wenn also die Erlang-Verteilung vorliegt. Die allgemeine Erlang-Verteilung entspricht dann der Gleichung (5). Im Bild 15 ist dies ebenfalls zu erkennen. Die oberste Kurve hat die Parameter $a = 1$ und $b = 2$. Es ist die Bedingung (6) erfüllt. Diese Kurve stellt die Erlang-Verteilung der Ordnung $k = 2$ mit dem Parameter (für eine Phase) $\bar{\mu} = 1$ dar. Die vier anderen Kurven entsprechen der allgemeinen Erlang-Verteilung.

Analog lauten dann die Bedingungen für den Fall $k = 3$,

$$\mu^3 - c\mu^2 + b\mu - a = 0,$$

mit der „Nicht-Schwingbedingung“

$$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[2]{\frac{b}{3}} \leq \frac{c}{3}$$

oder, für den allgemeinen Fall,

$$\mu^k - a_k \mu^{k-1} + \dots \pm a_0 = 0,$$

$$\sqrt[k]{a_k} \leq \sqrt[k-1]{\frac{a_{k-1}}{k}} \leq \dots \leq \frac{a_0}{k}.$$

Natürlich wird die Berechnung der μ_i aus den a_k für $k > 3$ sehr schwierig und deshalb wird man sich in der Hauptsache auf $k = 2$ und $k = 3$ beschränken.

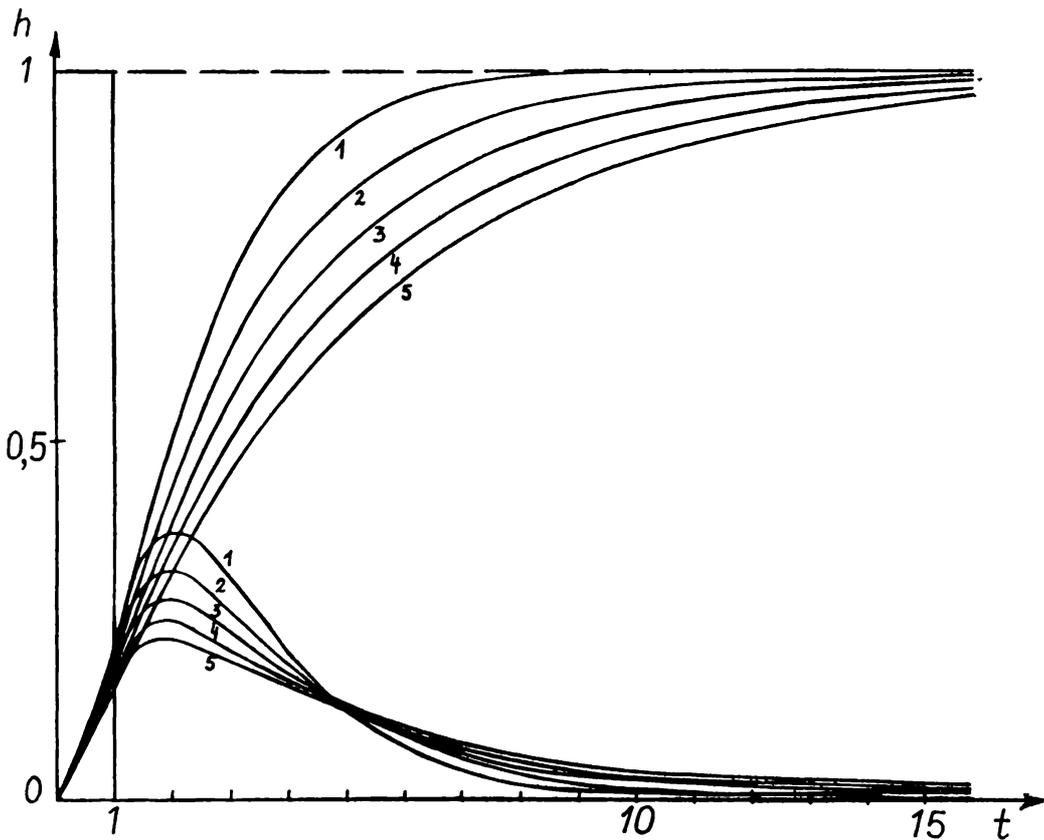


Bild 15. Allgemeine Erlang-Verteilung mit den Parametern

	a	b	μ_1	μ_2
1	1,0	2,0	1,0	1,0
2	1,0	2,4	1,86	0,54
3	1,0	2,8	2,38	0,42
4	1,0	3,2	2,85	0,35
5	1,0	3,6	3,30	0,30

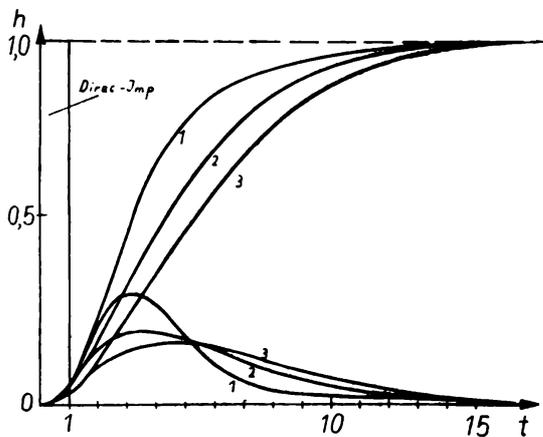
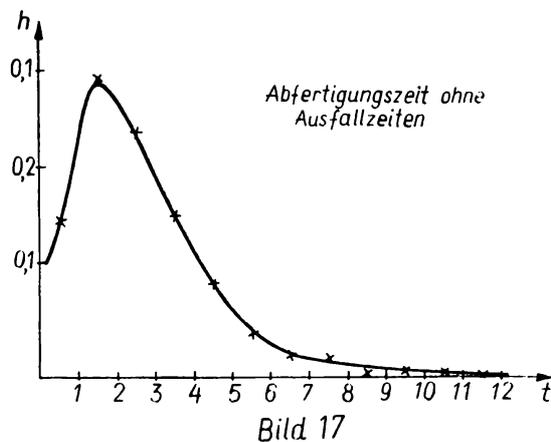


Bild 16. Allgemeine Erlang-Verteilung für $k = 3$ mit

	a	b	c
1	1	3	9
2	2	6	9
3	3	9	9

Im Bild 16 sind 3 Kurven für den Fall $k = 3$ aufgezeichnet. Da die Variationsmöglichkeiten hier schon sehr groß sind, wurden nur 3 typische Kurven mit beliebigen Parametern aufgenommen. Es ist deutlich zu



sehen, daß bei kleinem t der Anstieg der Kurven nicht so stark ist wie im Fall $k = 2$.

5. Ein Anwendungsbeispiel. Im Überseehafen Rostock wurde das Wartesystem "Schiff-Kai" untersucht. Die statistische Auswertung der Abfertigungszeit ergab eine linksschiefe Verteilung mit einem deutlichen Maximum bei $t > 0$ (siehe Bild 17).

Zur Bestimmung einer theoretischen Verteilung wurde einmal der übliche und zum anderen der oben dargestellte Weg gegangen. Die gesamte Servicerate betrug $\mu = 0,046$.

Aus der Tatsache, daß sich eine Schiffsabfertigung aus zwei tatsächlichen Phasen (Ent- und Beladung) zusammensetzt, wurde eine Erlang-Verteilung mit zwei Phasen ($k = 2$) angesetzt. Hierfür ergaben sich folgende Konstanten:

$$\mu_{1,2} = 0,092 = \tilde{\mu}, \quad a = \tilde{\mu}^2 = 0,0085, \quad b = 2\tilde{\mu} = 0,184.$$

Die statistisch geprüfte Übereinstimmung (χ^2 -Test) war nicht befriedigend und auch der visuelle Vergleich der beiden Dichtefunktionen (empirische und Erlang-Verteilung) auf dem Schreiber des Analogrechners bestätigte dies.

Anhand der Gütermenge, die über ein Jahr importiert bzw. exportiert wurde, konnte den beiden Teilphasen entsprechend unterschiedliche Serviceraten zugeordnet werden. D.h. es konnten die beiden Parameter der allgemeinen Erlang-Verteilung geschätzt werden zu: $\mu_1 = 0,104$, $\mu_2 = 0,065$. Daraus folgt für

$$a = \mu_1 \mu_2 = 0,068, \quad b = \mu_1 + \mu_2 = 0,169.$$

Wie zu erwarten war, kommt die allgemeine Erlang-Verteilung der empirischen näher (s. Bild 18, Kurve 1). Im Anschluß daran wurde versucht, diese Parameter aus der Kurve selbst zu ermitteln. Die Anpassung gelang sehr gut mit einer allgemeinen Erlang-Verteilung ($k = 3$). Wie

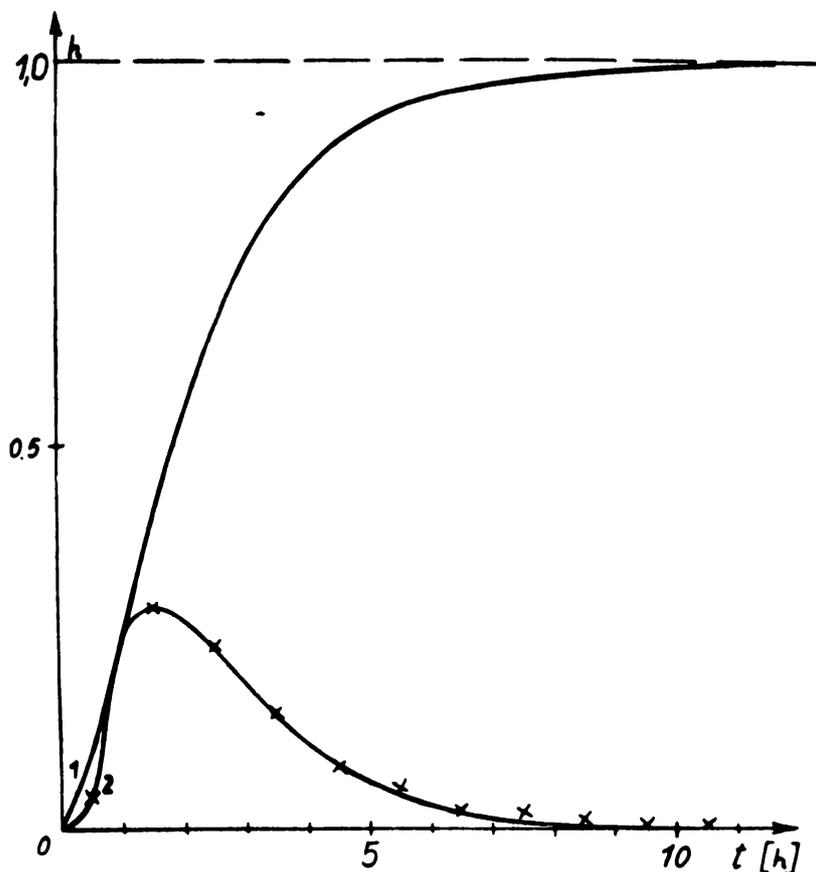


Bild 18. Darstellung der Verteilung der Abfertigungszeit auf dem Analogrechner
 x - empirische Werte, 1 - $k = 2$, 2 - $k = 3$

die Kurve 2 (Bild 18) zeigt, geht sie durch alle empirischen Werte hindurch. Auf dem Analogrechner konnten dann die Koeffizienten abgelesen werden:

$$a = 0,135, \quad b = 0,294, \quad c = 1,690.$$

Daraus wurden die Serviceraten der drei Phasen berechnet:

$$\mu_1 = 0,09, \quad \mu_2 = 0,1, \quad \mu_3 = 1,5.$$

Ein Wert entspricht dem μ_1 im Fall $k = 2$. Offensichtlich teilt sich die zweite Phase (die der Beladung) in zwei einzelne auf, wobei die dritte Phase sehr schnell durchlaufen wird.

Eine Deutung dieser Phase läßt sich eventuell in dem zeitlichen Zwischenraum zwischen Ent- und Beladung finden.

6. Schlußbemerkung. Das hier gezeigte Verfahren zur Analyse empirischer Verteilungen zeigt einmal interessante Analogien zwischen der Theorie dynamischer Systeme und der Wahrscheinlichkeitsrechnung und bietet zum anderen eine bequeme Möglichkeit mit Hilfe des Analogrechners empirische Verteilungen theoretisch zu beschreiben.

SEKTION SOZIALISTISCHE BETRIEBSWIRTSCHAFT
UNIVERSITÄT ROSTOCK

Eingegangen am 20. 5. 1970

G. ROSSA (Rostock)

**ANALIZA EMPIRYCZNYCH ROZKŁADÓW ZMIENNYCH LOSOWYCH
PRZY POMOCY MASZYN ANALOGOWYCH**

STRESZCZENIE

Przy analizie systemów obsługi masowej, praktyk staje często przed następującym zagadnieniem. Z praktycznej obserwacji realizacji zmiennych losowych (np. odstępów między zgłoszeniami lub czasów trwania obsługi) należy znaleźć odpowiadający im rozkład teoretyczny. W sytuacjach realnych rozkłady te często odbiegają od najprostszych, takich jak rozkład wykładniczy czy rozkład Poissona. Należy się zatem posłużyć rozkładem bardziej elastycznym, np. rozkładem Erlanga. Tu z kolei powstaje problem szacowania parametrów tego rozkładu. W pracy podaje się, jak można posłużyć się maszyną analogową dla dopasowania odpowiedniego rozkładu Erlanga do znanego z obserwacji rozkładu empirycznego. W § 5 pokazuje się praktyczny przykład zastosowania omawianej metody.