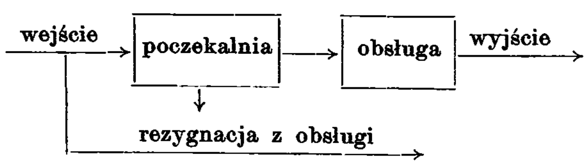
ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

I. KOPOCIŃSKA (Wrocław)

O PEWNYM MODELU Z TEORII KOLEJEK Z UWZGLĘDNIENIEM ZNIECIERPLIWIENIA KLIENTÓW

W teorii kolejek rozpatruje się modele obsługi masowej, których ogólny schemat można przedstawić następująco:



Strzałka z lewej strony oznacza strumień losowo przybywających klientów; wchodzą oni do poczekalni, w której muszą czekać na obsługę, jeśli urządzenia obsługi (oznaczone schematycznie drugim prostokątem) są zajęte przez poprzednio przybyłych klientów.

Szczegółowa specyfikacja modelu wymaga zdefiniowania procesu stochastycznego wchodzących klientów (proces wejścia), reguł rządzących zachowaniem się klientów w poczekalni, oraz sposobu obsługiwania klientów. W zależności od specyfikacji omówionych elementów schematu uzyskujemy modele urządzeń występujących w praktyce takich jak: centrala telefoniczna, stacja obsługi samochodów, przychodnia dentystyczna i inne.

W licznych pracach poświęconych różnym modelom teorii kolejek zakłada się na ogół[1], że klient, który wszedł do poczekalni, będzie w niej czekał aż do rozpoczęcia obsługi. W niniejszej pracy rozpatrzymy model, w którym zniecierpliwieni klienci będą mogli rezygnować z obsługi i opuszczać poczekalnię, zanim doczekają się swojej kolejki.

Przyjmijmy w naszym modelu poissonowski proces wejścia ze stałą intensywnością. Przez proces poissonowski rozumiemy proces stacjonarny,

---

[1] Barrer [1], [2] zakłada, że klient opuszcza system, gdy jego czas przebywania w systemie przekroczy pewną stałą T.

Morse [4] wprowadza pojęcie klienta „przewidującego", który przystępuje d kolejki z prawdopodobieństwem zależnym od jej długości.

pojedynczy i bez następstw. Zgłaszający się klienci wchodzą do poczekalni i ustawiają się według kolejności zgłoszeń. Rozpatrzymy dwa modele różniące się długością kolejki. W pierwszym przyjmiemy kolejkę o długości jeden, to znaczy co najwyżej jeden klient może czekać w poczekalni (w przypadku gdy miejsce w poczekalni jest zajęte, zgłaszający się nowi klienci muszą zrezygnować z obsługi), w drugim modelu przyjmiemy kolejkę o nieograniczonej ilości miejsc. Z poczekalni klienci przechodzą do obsługi, w której obsługiwany jest co najwyżej jeden klient. Zakładamy wykładniczy rozkład czasu obsługi ze stałą intensywnością czasu obsługiwania.

Załóżmy ponadto, że klient może zniecierpliwić się na każdym miejscu w kolejce i wyjść z niej rezygnując z czekania na obsługę. Niech prawdopodobieństwo zniecierpliwienia klienta w przedziale czasowym o długości τ zależy od miejsca, które zajmuje on w kolejce i od długości przedziału czasowego τ, a nie zależy od czasu czekania klienta na tym miejscu, od długości czasu czekania na innych miejscach i długości kolejki. Wejście, obsługa i zniecierpliwienie na każdym miejscu w kolejce są między sobą niezależne.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

λ — średnia liczba zgłoszeń na jednostkę czasu,
μ — średnia liczba klientów obsłużonych na jednostkę czasu,
σ_i — średnia liczba klientów zniecierpliwionych na i-tym miejscu w kolejce na jednostkę czasu,
k — stan systemu (łączna ilość klientów w systemie),
$P_k(t)$ — prawdopodobieństwo stanu k w chwili t,
p_k — graniczne prawdopodobieństwo stanu k ($p_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t)$),
$P(L > \tau)$ — prawdopodobieństwo czekania klienta w kolejce dłużej niż τ,
$P_i(L_i > \theta)$ — prawdopodobieństwo tego, że klient będzie czekał na miejscu i-tym dłużej niż θ pod warunkiem, że dojdzie do obsługi,
$P(Z \mid i)$ — prawdopodobieństwo zniecierpliwienia się klienta na miejscu i-tym (klient nie przejdzie na miejsce $(i-1)$),
$P(\sim Z \mid i)$ — prawdopodobieństwo, że klient nie zniecierpliwi się na miejscu i-tym,
$\bar{L}_1$ — średni czas czekania klienta, który dojdzie do obsługi,
$\bar{L}_2$ — średni czas czekania klienta, który się zniecierpliwi,
$\bar{L}$ — średni czas czekania klienta w kolejce,
D — średnia długość kolejki.

Z założenia, że proces wejścia jest poissonowski, mamy

$$v_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau},$$

gdzie $v_k(\tau)$ oznacza prawdopodobieństwo przyjścia k klientów w przedziale czasowym o długości τ. Stąd

$$v_0(\tau) = 1-\lambda\tau+o(\tau),$$

$$v_1(\tau) = \lambda\tau+o(\tau),$$

$$v_k(\tau) = o(\tau) \quad \text{dla} \quad k > 1.$$

Z wykładniczego rozkładu czasu obsługi wynika

$$P(L > \tau) = e^{-\mu\tau},$$

gdzie $P(L > \tau)$ oznacza prawdopodobieństwo obsługiwania klienta dłużej niż τ. Stąd obliczamy, rozwijając w szereg potęgowy,

$$P(L > \tau) = 1-\mu\tau+o(\tau),$$

$$P(L \leqslant \tau) = \mu\tau+o(\tau).$$

Niech $P_k(Z \mid \tau)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że klient stojący na miejscu k-tym w kolejce o długości n ($k \leqslant n$) zniecierpliwi się na tym miejscu w przedziale czasowym o długości τ. Z założeń o zniecierpliwieniach mamy

$$P_k(Z \mid \tau) = \sigma_k\tau+o(\tau), \quad \text{gdzie} \quad k \leqslant n.$$

Oznaczmy przez $P(Z, n, \tau)$ prawdopodobieństwo opuszczenia kolejki przez któregokolwiek z n klientów czekających w kolejce. Niezależność zniecierpliwień na każdym miejscu w kolejce daje

$$P(Z, n, \tau) = \Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Big)\tau+o(\tau) = S_n-\mu+o(\tau),$$

gdzie

$$S_n = \mu+\sum_{k=1}^{n}\sigma_k; \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad S_0 = \mu.$$

Przy tych założeniach stan systemu rozpatrywany w czasie jest procesem Markowa. Proces stochastyczny $\{N_t\}$ nazywamy *procesem Markowa*, jeżeli równość

$$P\{N_t \leqslant x \mid N_{t_1} = y_1, N_{t_2} = y_2, \ldots, N_{t_n} = y_n\} = P\{N_t \leqslant x \mid N_{t_n} = y_n\}$$

zachodzi dla wszystkich $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ ($n = 1, 2, \ldots$) i dla dowolnych wartości zmiennej losowej. Podamy teraz dowód tego twierdzenia. Zmienność tego stanu po ustalonej chwili t_0 jest zdeterminowana przez następujące czynniki:

1° momenty zakończenia obsługi klientów, którzy w chwili t_0 są obsługiwani lub czekają na obsługę,

2° momenty nowych zgłoszeń po chwili t_0,

3° długości trwania obsługi klientów, którzy zgłosili się po chwili t_0, 4° momenty zniecierpliwień (na każdym miejscu) klientów znajdujących się w kolejce w chwili t_0,

5° momenty zniecierpliwień klientów, którzy zgłosili się do kolejki po chwili t_0.

Każdy z tych czynników zależy co najwyżej od stanu systemu w chwili t_0, a nie zależy od przebiegu procesu przed tym momentem. Dla czynników 1° i 3° wynika to z założonego przez nas wykładniczego rozkładu czasu trwania obsługi, dla 2° wynika to z założenia, że strumień wejścia jest procesem Poissona, dla 4° i 5° wynika to bezpośrednio z założeń.

Do opisania naszych systemów możemy wykorzystać znaną równość dla procesów Markowa

$$P_k(t+\tau) = \sum_r P_r(t)P_{rk}(\tau), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{I}$$

gdzie $P_{rk}(\tau)$ są prawdopodobieństwami przejścia od stanu r do stanu k w przedziale czasowym o długości τ. Aby napisać te równania dla naszych systemów, obliczmy prawdopodobieństwa przejścia:

$$\begin{aligned}
P_{r,r}(\tau) &= (1-\lambda\tau)[1-(S_r-\mu)\tau](1-\mu\tau) = 1-(\lambda+S_r)\tau+o(\tau), \\
P_{r,r+1}(\tau) &= (1-\mu\tau)[1-(S_r-\mu)\tau] = \lambda\tau+o(\tau), \\
P_{r+1,r}(\tau) &= (1-\lambda\tau)[1-(S_r-\mu)\tau]\mu\tau+(1-\lambda\tau)(1-\mu\tau)(S_r-\mu)\tau = \\
&= S_r\tau+o(\tau), \\
P_{ij}(\tau) &= o(\tau) \quad \text{dla} \quad |i-j|>1.
\end{aligned}$$

Układ równań (I) w przypadku modelu o skończonej (nie przekraczającej 1) długości kolejki ma postać:

$$\begin{aligned}
P_0(t+\tau) &= P_0(t)-P_0(t)\lambda\tau+P_1(t)\mu\tau+o(\tau), \\
P_1(t+\tau) &= P_1(t)+P_0(t)\lambda\tau-P_1(t)(\lambda+\mu)\tau+P_2(t)(\sigma_1+\mu)\tau+o(\tau), \\
P_2(t+\tau) &= P_2(t)+P_1(t)\lambda\tau-P_1(t)(\sigma_1+\mu)\tau+o(\tau),
\end{aligned} \tag{1}$$

a w przypadku nieskończonej kolejki

$$\begin{aligned}
P_0(t+\tau) &= P_0(t)-\lambda\tau P_0(t)+\mu\tau P_1(t), \\
P_1(t+\tau) &= P_1(t)+\lambda\tau P_0(t)-(\lambda+\mu)\tau P_1(t)+\tau S_1 P_2(t), \\
P_2(t+\tau) &= P_2(t)+\lambda\tau P_2(t)-(\lambda+S_1)\tau P_2(t)+\tau S_2 P_3(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{n+1}(t+\tau) &= P_{n+1}(t)+\lambda\tau P_n(t)-(\lambda+S_n)\tau P_{n+1}(t)+S_{n+1}\tau P_{n+2}(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1'}$$

Dla obu tych układów tworzymy po lewych stronach równań ilorazy różnicowe i zmierzamy z τ do zera. Stąd, że istnieją granice prawych stron równań, wnioskujemy, że istnieją pochodne po lewych stronach. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t), \\ P_1'(t) &= \lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+S_1P_2(t), \\ P_2'(t) &= \lambda P_1(t)-S_1P_2(t), \end{aligned} \tag{2}$$

a dla układu nieskończonego

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t)+\mu P_1(t), \\ P_1'(t) &= \lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+S_1P_2(t), \\ P_2'(t) &= \lambda P_1(t)-(\lambda+S_1)P_2(t)+S_2P_3(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n+1}'(t) &= \lambda P_n(t)-(\lambda+S_n)P_{n+1}(t)+S_{n+1}P_{n+2}(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2'}$$

Zakładając, że istnieją granice $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$, a więc, z wykazanej różniczkowalności funkcji $P_k(t)$, także granice $\lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$, możemy uzyskać w granicy dla układu skończonego algebraiczny układ równań liniowych

$$\begin{aligned} -\lambda p_0+\mu p_1 &= 0, \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+S_1p_2 &= 0, \\ \lambda p_1-S_1p_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

i analogicznie dla układu nieskończonego

$$\begin{aligned} -\lambda p_0+\mu p_1 &= 0, \\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+S_1p_2 &= 0, \\ \lambda p_1-(\lambda+S_1)p_2+S_2p_3 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{p_n}-(\lambda+S_n)p_{n+1}+S_{n+1}p_{n+2} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3'}$$

Dla układu skończonego istnienie granic wynika z twierdzenia Markowa podanego w pracy Chińczyna [3]. Dla układu nieskończonego Chińczyn w podobnym przypadku zwraca uwagę na możliwość udowodnienia potrzebnego twierdzenia. W przypadku tym należy ponadto założyć, że w całym nieskończonym układzie równań można jednocześnie przejść do granicy. Równania (3) i (3′) rozwiązujemy przy warunkach normujących

$$\sum_{i=0}^{2} p_i = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 .$$

Łatwo otrzymujemy rozwiązania

$$\begin{aligned} p_0 &= \left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu S_1}\right)^{-1}, \\ p_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu S_1}\right)^{-1}, \\ p_2 &= \frac{\lambda^2}{\mu S_1}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu S_1}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

oraz

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0, \\ p_2 &= \frac{\lambda^2}{\mu S_1} p_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n+1} &= \frac{\lambda^{n+1}}{\mu S_1 S_2 \ldots S_n} p_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4'}$$

Szereg, którego kolejne wyrazy są współczynnikami przy p_0 w równaniach (4′), jest zbieżny, gdy $\limsup \lambda/S_n < 1$, i wtedy

$$p_0 = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu S_1}+\ldots+\frac{\lambda^{n+1}}{\mu S_1 S_2 \cdots S_n}+\ldots\right)^{-1}.$$

Średnią długość kolejki określa wzór

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) p_k, \tag{5}$$

mamy więc dla układu nieskończonego

$$D = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{\mu S_1 S_2 \cdots S_{k-1}} p_0. \tag{5'}$$

Obliczamy teraz Π_1 i Π_2, to jest prawdopodobieństwo obsłużenia i nieobsłużenia klienta oraz $\bar{L}_1$ i $\bar{L}_2$, które oznaczają średni czas czekania klienta obsłużonego i nie obsłużonego.

Kanał obsługowy pracuje, gdy układ znajduje się w stanach $k = 1, 2, 3, \ldots$, nie pracuje, gdy układ znajduje się w stanie zero. Prawdopodobieństwo pracy kanału jest $(1-p_0)$. Średnio na jednostkę czasu kanał wypuszcza μ klientów obsłużonych. Zatem średnio w jednostce czasu kanał obsługuje $\mu(1-p_0)$. Średnia ilość zgłoszeń do obsługi w jednostce czasu jest λ, stąd średnie prawdopodobieństwa obsłużenia i nieobsłużenia klienta są

$$\Pi_1 = \frac{\mu(1-p_0)}{\lambda}; \qquad \Pi_2 = \frac{\lambda-\mu(1-p_0)}{\lambda}. \tag{6}$$

Obliczamy teraz $\bar{L}_1$. W tym celu musimy obliczyć średni czas czekania E_i dla klienta, który nie może się zniecierpliwić na i-tym miejscu oraz $\bar{E}_i$ — dla klienta, który może się zniecierpliwić. Prawdopodobieństwo czekania $P_i(L_1 > \theta)$ na i-tym miejscu dłużej niż θ dla klienta, który się nie zniecierpliwi, jest

$$P_i(L_1 > \theta) = e^{-\mu\theta}e^{-(S_{i-1}-\mu)\theta} = e^{-S_{i-1}\theta},$$

a więc

$$E_i = -\int_0^\infty \theta dP_i(L_1 > \theta) = -\int_0^\infty \theta de^{-S_{i-1}\theta} = \frac{1}{S_{i-1}}.$$

Podobnie obliczamy $\bar{E}_i = 1/S_i$. Określamy

$$\bar{L}_1 = \sum_{i=1}^\infty p_i[E_{i-1}+\ldots+E_1+E_0].$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\bar{L}_1 = \sum_{i=1}^\infty p_i\left[\frac{1}{S_{i-1}}+\frac{1}{S_{i-2}}+\ldots+\frac{1}{S_0}\right] = \sum_{i=1}^\infty p_i\left(\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{S_j}\right).$$

Do obliczenia $\bar{L}_2$ znajdujemy $\bar{L}_i(Z)$, to jest średni czas pobytu zniecierpliwionego klienta, który przyszedł na i-te miejsce w kolejce. Do obliczenia $\bar{L}_i(Z)$ potrzebujemy prawdopodobieństw zniecierpliwienia się i niezniecierpliwienia na miejscu i-tym klienta przychodzącego na i-te miejsce: $P(Z \mid i)$, $P(\sim Z \mid i)$. Prawdopodobieństwo tego, że klient znajdujący się na miejscu i-tym zniecierpliwi się na tym miejscu w czasie krótszym od X, jest równe $1-e^{-\sigma_i X}$. Prawdopodobieństwo tego, że klient znajduje się na miejscu i-tym i ktoś przed nim zniecierpliwi się lub skończy obsługę w czasie $< Y$, jest $1-e^{-S_{i-1}Y}$. Odpowiednie funkcje gęstości prawdo-

podobieństw są
$$\sigma_i e^{-\sigma_i X} \quad \text{oraz} \quad S_{i-1} e^{-S_{i-1}Y}.$$
Obliczamy
$$P(Z \mid i) = \iint\limits_{\Omega} \sigma_i e^{-\sigma_i X} S_{i-1} e^{-S_{i-1}Y} dX dY =$$
$$= \int\limits_0^\infty S_{i-1} e^{-S_{i-1}Y} dY \int\limits_0^Y \sigma_i e^{-\sigma_i X} dX =$$
$$= 1 - \frac{S_{i-1}}{S_i} = \frac{\sigma_i}{S_i},$$
gdzie
$$\Omega: \begin{cases} 0 \leqslant Y < \infty, \\ 0 \leqslant X < Y. \end{cases}$$

A zatem, $P(Z \mid i) = \sigma_i / S_i$ i oczywiście $P(\sim Z \mid i) = S_{i-1}/S_i$. Średni czas czekania $\bar{L}_i(Z)$ klienta przychodzącego na miejsce i-te, który zniecierpliwi się, obliczamy ze wzorów
$$\bar{L}_i(Z) = \bar{E}_i + P(\sim Z \mid i) \bar{L}_{i-1}(Z),$$
$$\bar{L}_2(Z) = \bar{E}_2 + P(\sim Z \mid 2) \bar{L}_1(Z), \qquad \bar{L}_1(Z) = 1/\sigma_1.$$
Mamy więc
$$\bar{L}_i(Z) = \frac{1}{S_i} + \frac{S_{i-1}}{S_i}\left\{\frac{1}{S_{i-1}} + \frac{S_{i-2}}{S_{i-1}}\left[\ldots \frac{S_2}{S_3}\left(\frac{1}{S_2} + \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{1}{\sigma_1}\right)\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{S_i}\left\{1 + \left[1 \ldots \left(1 + \frac{\mu + \sigma_1}{\sigma_1}\right)\right]\right\},$$
a stąd, po zredukowaniu,
$$\bar{L}_i(Z) = \frac{1}{S_i}\left(i + \frac{\mu}{\sigma_1}\right).$$

Wprowadźmy również $\bar{L}_i(\sim Z)$, tj. średni czas czekania klienta niezniecierpliwionego, przychodzącego na i-te miejsce:
$$\bar{L}_i(\sim Z) = E_i + E_{i-1} + \ldots + E_1 = \frac{1}{S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i-2}} + \ldots + \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_0}.$$
Teraz możemy obliczyć $\bar{L}_2$ ze wzoru
$$\bar{L}_2 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \bar{L}_i(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{S_i}\left(i + \frac{\mu}{\sigma_1}\right) = \frac{D}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda\sigma_1}(1 - p_0 - p_1).$$
Oznaczmy przez $P_i(\sim Z)$ prawdopodobieństwo niezniecierpliwienia się klienta przychodzącego na miejsce i-te. Z niezależności zniecierpliwień

na każdym miejscu w kolejce wynika

$$P_i(\sim Z) = \prod_{j=1}^{i} P(\sim Z \mid j) = \frac{S_{i-1}}{S_i} \cdot \frac{S_{i-2}}{S_{i-1}} \cdots \frac{\mu}{S_1} = \frac{\mu}{S_i}.$$

Dla prawdopodobieństwa zniecierpliwienia $P_i(Z)$ mamy podobnie $P_i(Z) = 1-(\mu/S_i)$. Możemy więc znaleźć średnie prawdopodobieństwo Π_1 zniecierpliwienia klienta jako wartość oczekiwaną

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i P_i(\sim Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\mu S_1 \ldots S_{i-1}} \cdot \frac{\mu}{S_i} = \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) = \Pi_1.$$

Sprawdziliśmy więc wzór (6) otrzymany już wcześniej. Średni czas czekania klienta w kolejce określamy za pomocą wzoru

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i [P_i(Z) L_i(Z) + P_i(\sim Z) L_i(\sim Z)].$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left[\left(1-\frac{\mu}{S_i}\right)\left(\frac{1}{S_i}\right)\left(i+\frac{\mu}{\sigma_1}\right) + \frac{\mu}{S_i}\left(\frac{1}{S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i-2}} + \ldots + \frac{1}{S_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{D}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda\sigma_1}(1-p_0-p_1) + \frac{\mu}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1}\left(\frac{1}{S_0} + \frac{1}{S_{i-1}} - \frac{i}{S_i} - \frac{\mu}{S_i\sigma_1}\right).$$

A więc w modelu bez zniecierpliwień ($\sigma_i = 0$) ostatni wzór przyjmuje postać podaną u Saaty'ego [5], $\bar{L} = D/\lambda$.

Prace cytowane

[1] D. Y. Barrer, *Queuing with impatient customers and indifferent clerks*, Opns. Res. 5 (1957), str. 644.

[2] — *Queuing with impatient customers and ordered service*, Opns. Res. 5 (1957), str. 650.

[3] А. Я. Хинчин, *Математические методы теории массового обслуживания*, Труды Математического Института имени В. А. Стеклова, XLIX, Москва 1955.

[4] Philip M. Morse, *Queues, inventories and maintenance*, New York 1958.

[5] Thomas L. Saaty. *Mathematical methods of operations research*, New York, Toronto, London 1959.

Praca wpłynęła 13. 11. 1961

И. КОПОЦИНЬСКА (Вроцлав)

О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ ОЧЕРЕДНОГО МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ФАКТОР НЕТЕРПЕЛИВОСТИ ОБСЛУЖИВАЕМЫХ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается модель массового обслуживания с простейшим потоком заявок, ограниченным или неограниченным количеством мест в очереди и одноканальным обслуживанием с экспоненциальным распределением длительности обслуживания. Предполагается, что обслуживаемый может проявлять нетерпеливость в любом месте очереди, отказываясь от дальнейшего ожидания и обслуживания. Вероятность проявления обслуживаемым нетерпеливости в промежутке времени $[t, t+\tau)$ равна $C\tau+o(\tau)$ при C зависящем от места в очереди. Кроме этого, предполагается, что заявка в очередь, обслуживание и проявление нетерпеливости в любом месте очереди не зависят друг от друга. При таких предположениях состояние системы можно описать процессом Маркова. Для моделей с неограниченным количеством мест в очереди определены вероятность обслуживания и отказа обслуживаемого от обслуживания, среднее время ожидания в очереди, а также условное среднее время ожидания для обслуженных и для отказавшихся от ожидания и обслуживания.

I. KOPOCIŃSKA (Wrocław)

ON A CERTAIN MODEL FROM THE THEORY OF QUEUES TAKING INTO ACCOUNT THE CUSTOMER'S IMPATIENCE

SUMMARY

Queuing models are considered with (a) a Poisson input, (b) a limited or unlimited length of a queue, (c) a single-channel and exponential service. An additional assumption is the possibility of customer impatience. A customer may resign at any place in the queue. The probability of resignation of a customer during time-interval $[t, t+\tau)$ is $C\tau+o(\tau)$, where C depends on the place in the queue. The input process, service and resignations at any place in the queue are independent of one another. Such models can be described by a Markov process. The service and resignation probabilities, the expected wating time as well as the conditional waiting time (for those who were served and those who resigned) are calculated.
