ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
XVI, 3 (1979)

Х. ФЕРМАНН (Карль-Маркс-Штад)

# О СХОДИМОСТИ ЦЕН ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

**1. Постановка задачи.** Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ задана частично наблюдаемая случайная последовательность

$$(\theta, \xi^\varepsilon) = (\theta_n, \xi_n^\varepsilon), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

со значениями в $R^1 \times R^1$, удовлетворяющая рекуррентным уравнениям

$$\theta_{n+1} = a_0(n) + a_1(n)\theta_n + b(n)\eta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$\xi_n^\varepsilon = A_0(n) + A_1(n)\theta_n + \varepsilon\tilde{\eta}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

и начальному условию $\theta_0 = 0$ (п. н.), где $\varepsilon \geqslant 0$ — константа, $\eta_n$ и $\tilde{\eta}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону $N(0, 1)$. Предполагаем, что последовательности $a_0(n)$, $a_1(n)$, $b(n)$, $A_0(n)$ и $A_1(n)$ представляют собой неслучайные функции со значениями в $R^1$, причем $a_0(n)$, $a_1(n)$ и $b(n)$ определены для $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $A_0(n)$ и $A_1(n)$ — для $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие следующим условиям:

(I) $a_0^2(n) < \infty$ и $b^2(n) < \infty$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, $A_0^2(n) < \infty$ для $n = 1, 2, \ldots$

(II) Существует число $q$, $0 < q < 1$, и индекс $N < \infty$, такие, что для всех $n > N$ имеем $a_1^2(n) \leqslant q$.

(III) Существуют константы $\underline{A}_1$ и $\overline{A}_1$, такие, что для $n = 1, 2, \ldots$

$$0 < \underline{A}_1 \leqslant A_1^2(n) \leqslant \overline{A}_1 < \infty.$$

(IV) Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $b(n)A_1(n+1) \geqslant 0$.

Далее, пусть задана функция выигрыша вида

$$g(n, x) = f(n) + h(n)x, \tag{3}$$

где $f(n)$ и $h(n)$ определены для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$0 \leqslant h(n) \leqslant H < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Рассматривается проблема оптимальной (относительно функции выигрыша $g$) остановки случайной последовательности (1) по наблюдениям лишь случайной последовательности (2). Определим цену в „0-задаче", т.е.

$$s^0 = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} Mg(\tau,\,\theta_\tau) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\{f(\tau)+h(\tau)\theta_\tau\}, \tag{5}$$

и цену в „$\varepsilon$-задаче", т.е.

$$s^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} Mg(\tau,\,\theta_\tau) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{f(\tau)+h(\tau)\theta_\tau\}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{M}^\theta$ и $\mathfrak{M}^\varepsilon$ — классы конечных марковских моментов со значениями в $\{0,1,2,\ldots\}$ относительно семейств $\sigma$-алгебр, соответственно, $(\mathscr{F}_n^\theta)$ и $(\mathscr{F}_n^\varepsilon)$, $n=0,1,2,\ldots$, $\varepsilon\geqslant 0$, причем

$$\mathscr{F}_0^\theta = \mathscr{F}_0^\varepsilon = \{\emptyset,\,\Omega\},$$

$$\mathscr{F}_n^\theta = \sigma\{\theta_i,\,i\leqslant n\}, \qquad \mathscr{F}_n^\varepsilon = \sigma\{\xi_i^\varepsilon,\,i\leqslant n\}, \qquad n=1,2,\ldots$$

Заметим еще, что, согласно (2), при $\varepsilon=0$

$$\xi_n^0 = A_0(n)+A_1(n)\theta_n,$$

а следовательно, $\mathscr{F}_n^\theta\supset\mathscr{F}_n^0$, и что, согласно условию (III),

$$\theta_n = \frac{\xi_n^0-A_0(n)}{A_1(n)},$$

а следовательно, $\mathscr{F}_n^\theta\subset\mathscr{F}_n^0$. Значит, $\mathscr{F}_n^\theta=\mathscr{F}_n^0$, поэтому $\mathfrak{M}^\theta=\mathfrak{M}^0$, так что в случае $\varepsilon=0$ определения (5) и (6) совпадают.

**2. Редукция к задаче по полным данным.** В настоящем параграфе займемся редукцией проблемы нахождения цены $s^\varepsilon$ к проблеме нахождения цены в некоторой задаче оптимальной остановки по полным данным. Обозначим для $n=0,1,2,\ldots$ и $\varepsilon\geqslant 0$

$$m_n^\varepsilon = M(\theta_n|\mathscr{F}_n^\varepsilon), \qquad \gamma_n^\varepsilon = M[(\theta_n-m_n^\varepsilon)^2|\mathscr{F}_n^\varepsilon].$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I)-(III) *из* § 1. *Тогда*

$$s^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\{f(\tau)+h(\tau)\theta_\tau^\varepsilon\}, \tag{7}$$

*где случайная последовательность* $\theta^\varepsilon=(\theta_n^\varepsilon,\,\mathscr{F}_n^\theta)$, $n=0,1,2,\ldots$, *определяется рекуррентным соотношением*

$$\theta_{n+1}^\varepsilon = a_0(n)+a_1(n)\theta_n^\varepsilon+\beta_n^\varepsilon\eta_{n+1} \tag{8}$$

*и начальным условием* $\theta_0^\varepsilon=0$, *где*

$$\beta_n^\varepsilon = P_\varepsilon(n)Q_\varepsilon^{-1/2}(n),$$

$$P_\varepsilon(n) = b^2(n)A_1(n+1)+a_1^2(n)A_1(n+1)\gamma_n^\varepsilon, \tag{9}$$

$$Q_\varepsilon(n) = b^2(n)A_1^2(n+1)+a_1^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2. \tag{10}$$

Доказательство. Заметим сначала, что цена $s^\varepsilon$ в „$\varepsilon$-задаче" допускает представление

(11) $$s^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{f(\tau)+h(\tau)m_\tau^\varepsilon\}.$$

Действительно, для любого $\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon$ определена $\sigma$-алгебра $\mathscr{F}_\tau^\varepsilon$, содержащая все те события $A$, для которых $A\cap\{\tau\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n^\varepsilon$ при всех $n=0,1,2,\ldots$ Поэтому ясно, что

(12) $$s^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{f(\tau)+h(\tau)\theta_\tau\} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{M[f(\tau)+h(\tau)\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon]\}.$$

Далее, для любого $\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon$ случайные величины $f(\tau)$ и $h(\tau)$, как измеримые функции от $\mathscr{F}_\tau^\varepsilon$-измеримой случайной величины $\tau$, являются также $\mathscr{F}_\tau^\varepsilon$-измеримыми. Поэтому из (12) следует

$$s^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{f(\tau)+h(\tau)M(\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon)\}.$$

Утверждение (11) теперь будет доказано, если установить, что для любого $\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon$

(13) $$m_\tau^\varepsilon = M(\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) \text{ (п. н.)},$$

т.е., если доказать, что для любого $n=0,1,2,\ldots$ на множестве $\{\tau=n\}$ имеет место

$$M(\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = M(\theta_n|\mathscr{F}_n^\varepsilon) = m_n^\varepsilon \text{ (п. н.)}.$$

Если через $\chi_A$ обозначать индикатор множества $A$, то

(14) $$\chi_{\{\tau=n\}}M(\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = M(\chi_{\{\tau=n\}}\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = \\ = M(\chi_{\{\tau=n\}}\theta_n|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = \chi_{\{\tau=n\}}M(\theta_n|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon).$$

Так как $\theta_n$ — интегрируемая случайная величина, то, согласно лемме 1.9 из [1], стр. 37,

$$M(\theta_n|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = M(\theta_n|\mathscr{F}_n^\varepsilon) \quad \text{на } \{\tau=n\},$$

что вместе с (14) доказывает факт

$$\chi_{\{\tau=n\}}M(\theta_\tau|\mathscr{F}_\tau^\varepsilon) = \chi_{\{\tau=n\}}M(\theta_n|\mathscr{F}_n^\varepsilon),$$

из которого вытекает (13).

Применим теперь к системе (1), (2) метод Калмана и Бьюси. Согласно следствию 3 к теореме 13.4 из [1], стр. 509, последовательности $\{m_n^\varepsilon\}$ и $\{\gamma_n^\varepsilon\}$ для $n=0,1,2,\ldots$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

(15) $$m_{n+1}^\varepsilon = a_0(n)+a_1(n)m_n^\varepsilon+P_\varepsilon(n)Q_\varepsilon^{-1}(n)[\xi_{n+1}^\varepsilon-A_0(n+1)- \\ -A_1(n+1)a_0(n)-A_1(n+1)a_1(n)m_n^\varepsilon],$$

(16) $$\gamma_{n+1}^\varepsilon = a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon+b^2(n)-P_\varepsilon^2(n)Q_\varepsilon^{-1}(n)$$

с начальными условиями $m_0^\varepsilon = \gamma_0^\varepsilon = 0$, где $P_\varepsilon(n)$ и $Q_\varepsilon(n)$ определяются формулами (9) и (10).

Заметим, что уравнение (2) можно записать в виде

$$\xi_{n+1}^\varepsilon = A_0(n+1)+A_1(n+1)[a_0(n)+a_1(n)\theta_n+b(n)\eta_{n+1}]+\varepsilon\tilde{\eta}_{n+1}. \tag{17}$$

Полагая

$$\tilde{A}_0(n) = A_0(n+1)+A_1(n+1)a_0(n),$$
$$\tilde{A}_1(n) = A_1(n+1)a_1(n), \quad \tilde{B}(n) = A_1(n+1)b(n),$$

из (17) получаем

$$\xi_{n+1}^\varepsilon = \tilde{A}_0(n)+\tilde{A}_1(n)\,\theta_n+\tilde{B}(n)\eta_{n+1}+\varepsilon\tilde{\eta}_{n+1}. \tag{18}$$

Легко видеть, что частично наблюдаемая случайная последовательность (1), (18) укладывается в схему (13.46), (13.47) из [1], стр. 504, и что коэффициенты $a_0(n)$, $a_1(n)$, $b(n)$, $\tilde{A}_0(n)$, $\tilde{A}_1(n)$ и $\tilde{B}(n)$ удовлетворяют условиям (I)-(IV) (см. [1], стр. 505), если только $a_0(n)$, $a_1(n)$, $b(n)$, $A_0(n)$ и $A_1(n)$ удовлетворяют требованиям (I)-(III) из § 1. Поэтому применима теорема 13.5 из [1], стр. 511, согласно которой найдутся независимые случайные величины $\bar{\eta}_n^\varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, распределенные по нормальному закону $N(0, 1)$, такие, что (Р-п. н.)

$$\xi_{n+1}^\varepsilon = \tilde{A}_0(n)+\tilde{A}_1(n)m_n^\varepsilon+[\tilde{B}^2(n)+\varepsilon^2+\tilde{A}_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon]^{1/2}\bar{\eta}_{n+1}^\varepsilon,$$

т.е.

$$\begin{aligned}\xi_{n+1}^\varepsilon &= A_0(n+1)+A_1(n+1)a_0(n)+A_1(n+1)a_1(n)m_n^\varepsilon+\\ &\quad+[A_1^2(n+1)b^2(n)+\varepsilon^2+A_1^2(n+1)a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon]^{1/2}\bar{\eta}_{n+1}^\varepsilon =\\ &= A_0(n+1)+A_1(n+1)a_0(n)+A_1(n+1)a_1(n)m_n^\varepsilon+\\ &\quad+[Q_\varepsilon(n)]^{1/2}\bar{\eta}_{n+1}^\varepsilon.\end{aligned} \tag{19}$$

С помощью (19) соотношение (15) переходит в

$$\begin{aligned}m_{n+1}^\varepsilon &= a_0(n)+a_1(n)m_n^\varepsilon+P_\varepsilon(n)Q_\varepsilon^{-1/2}(n)\bar{\eta}_{n+1}^\varepsilon =\\ &= a_0(n)+a_1(n)m_n^\varepsilon+\beta_n^\varepsilon\bar{\eta}_{n+1}^\varepsilon.\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим также, что при $\varepsilon > 0$, очевидно, $Q_\varepsilon(n) > 0$, так что, согласно этой же теореме 13.5 из [1], $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_n^\varepsilon$ и $\mathscr{F}_n^{\bar{\eta}^\varepsilon} = \sigma\{\bar{\eta}_k^\varepsilon, k \leqslant n\}$ совпадают при всех $n$.

Сравнение соотношений (20) и (8) показывает, что случайные последовательности $(m_n^\varepsilon, \mathscr{F}_n^\varepsilon)$ и $(\theta_n^\varepsilon, \mathscr{F}_n^\theta)$ имеют одинаковые свойства распределения. Поэтому ясно, что

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta^\varepsilon}} M\{f(\tau)+h(\tau)\,\theta_\tau^\varepsilon\} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\varepsilon} M\{f(\tau)+h(\tau)m_\tau^\varepsilon\}, \tag{21}$$

где $\mathfrak{M}^{\theta^\varepsilon}$ — класс конечных марковских моментов со значениями в $\{0,1,2,\ldots\}$ относительно семейства $\sigma$-алгебр $(\mathscr{F}_n^{\theta^\varepsilon})$, где $\mathscr{F}_n^{\theta^\varepsilon}=\sigma\{\theta_k^\varepsilon, k\leqslant n\}$. Замечая, что

$$\mathscr{F}_n^{\theta^\varepsilon} = \sigma\{\eta_k, k\leqslant n\} = \sigma\{\theta_k, k\leqslant n\} = \mathscr{F}_n^{\theta},$$

так что $\mathfrak{M}^{\theta^\varepsilon} = \mathfrak{M}^{\theta}$, видим, что левая сторона (21) совпадает с

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\{f(\tau)+h(\tau)\,\theta_\tau^\varepsilon\}.$$

Из этого факта и (11) вытекает утверждение (7) теоремы 1.

**3. Оценка скорости сходимости цен $s^\varepsilon$ к $s^0$ при $\varepsilon\to 0$. I (общий случай).** Докажем теперь, что в ситуации, рассмотренной в § 1, при $\varepsilon\to 0$ цена $s^\varepsilon$ в „$\varepsilon$-задаче" стремится к цене $s^0$ в „0-задаче". Оказывается, что имеет место следующий результат, согласно которому эта сходимость происходит не медленнее, чем по порядку $\varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть частично наблюдаемая случайная последовательность $(\theta, \xi^\varepsilon)$ определяется рекуррентными уравнениями* (1) *и* (2), *причем коэффициенты $a_0$, $a_1$, $b$, $A_0$ и $A_1$ удовлетворяют условиям* (I)-(IV).

*Тогда, если $s^0<\infty$, цена в „$\varepsilon$-задаче"* (6) *при $\varepsilon\to 0$ сходится к цене в „0-задаче"* (5) *и эта сходимость определяется соотношениями*

$$0\leqslant s^0-s^\varepsilon\leqslant 2H[B(1+C)]^{1/2}\varepsilon, \tag{22}$$

*где $B<\infty$ и $C<\infty$ — константы,*

$$B = \underline{A}_1^{-1}\max\{1; 2\max\{\max_{0\leqslant n\leqslant N} a_1^2(n); q\}\}, \tag{23}$$

$$C = \max\left\{\max_{1\leqslant n\leqslant N}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=k}^{n} a_1^2(j)\right)\right\}; \frac{q}{1-q}\right\}. \tag{24}$$

*Если $s^0=\infty$, тогда $s^\varepsilon=\infty$ для любого $\varepsilon>0$.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, установим одну оценку для элементов последовательности $(\gamma_n^\varepsilon)$,

$$\gamma_n^\varepsilon = M[(\theta_n-m_n^\varepsilon)^2\,|\,\mathscr{F}_n^\varepsilon].$$

Лемма 1. *Для $n=0,1,2,\ldots$ имеет место $0\leqslant\gamma_n^\varepsilon\leqslant\underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2$.*

Доказательство. Заметим сначала, что рекуррентное уравнение (16) определяет неслучайную последовательность чисел $\gamma_n^\varepsilon$, т.е.

$$\gamma_n^\varepsilon = M\gamma_n^\varepsilon = M(\theta_n-m_n^\varepsilon)^2\geqslant 0.$$

Далее, согласно (16), (9), (10) и условию (III),

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}^\varepsilon &= Q_\varepsilon^{-1}(n)[a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon Q_\varepsilon(n)+b^2(n)Q_\varepsilon(n)-P_\varepsilon^2(n)] = \\ &= Q_\varepsilon^{-1}(n)[\varepsilon^2 a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2 b^2(n)] = \\ &= \varepsilon^2\frac{a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon+b^2(n)}{[a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon+b^2(n)]A_1^2(n+1)+\varepsilon^2}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{A_1^2(n+1)}\leqslant\underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2.\end{aligned}$$

**Доказательство теоремы 2.** Что касается интуитивно ясного факта $s^0 - s^\varepsilon \geqslant 0$, означающего, что при оптимальной остановке случайной последовательности по неполным данным невозможно получать большего среднего выигрыша, чем при наличии полной информации, заметим здесь лишь, что его можно доказать, используя теорему о том, что при оптимальной остановке марковской случайной последовательности допущение рандомизированных моментов не повышает цены (см., например, теорему 21 из [2], стр. 120).

Докажем второе неравенство (22). Пусть сначала $s^0 < \infty$. Оценим разность цен $s^0 - s^\varepsilon$, используя представление (7) для цены $s^\varepsilon$. Пусть $\tau_0 \in \mathfrak{M}^0$ — оптимальный момент остановки в „0-задаче". (Если оптимальный момент остановки не существует, можно доказать проведенную ниже оценку аналогичным способом, исходя из $\delta$-оптимальных моментов остановки $\tau_\delta$ и полагая $\delta \to 0$.) Тогда

$$
\begin{aligned}
(25) \qquad 0 \leqslant s^0 - s^\varepsilon &= M\{f(\tau_0) + h(\tau_0)\theta_{\tau_0}\} - \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^0} M\{f(\tau) + h(\tau)\theta^\varepsilon_\tau\} \leqslant \\
&\leqslant M\{f(\tau_0) + h(\tau_0)\theta_{\tau_0}\} - M\{f(\tau_0) + h(\tau_0)\theta^\varepsilon_{\tau_0}\} = \\
&= M\{h(\tau_0)(\theta_{\tau_0} - \theta^\varepsilon_{\tau_0})\} = M\{\sup_{n \in N} h(n)(\theta_n - \theta^\varepsilon_n)\} \leqslant \\
&\leqslant HM\{\sup_{n \in N}(\theta_n - \theta^\varepsilon_n)\}.
\end{aligned}
$$

Исследуем теперь структуру случайных величин $\theta_n - \theta^\varepsilon_n$. Сравнивая соотношения (1) и (8), получаем

$$\theta_{n+1} - \theta^\varepsilon_{n+1} = a_1(n)[\theta_n - \theta^\varepsilon_n] + [b(n) - \beta^\varepsilon_n]\eta_{n+1}.$$

Исходя из $\theta_0 = \theta^\varepsilon_0 = 0$, находим отсюда

$$\theta_n - \theta^\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(n-1)}[b(i-1) - \beta^\varepsilon_{i-1}]\eta_i, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\delta_i^{(n)} = \prod_{j=i}^{n} a_1(j), \qquad n = 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta_{n+1}^{(n)} = 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е., $\theta_n - \theta^\varepsilon_n$ представляет собой сумму независимых, нормально распределенных случайных величин со среднем 0.

Положим

$$Q^\varepsilon_n = \theta_n - \theta^\varepsilon_n, \qquad M^\varepsilon_n = \max_{1 \leqslant r \leqslant n} Q^\varepsilon_r, \qquad M^\varepsilon_\infty = \sup_{n \in N} Q^\varepsilon_n$$

и выведем оценку для величины

$$(26) \qquad M(M^\varepsilon_\infty) = M\{\sup_{n \in N}(\theta_n - \theta^\varepsilon_n)\}.$$

Ясно, что $M_n^\varepsilon \uparrow M_\infty^\varepsilon$ $(n \to \infty)$, так что по теореме о монотонной сходимости получаем

(27) $$M(M_\infty^\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} M(M_n^\varepsilon).$$

Ясно также, что

(28) $$M(M_n^\varepsilon) \leqslant [M(M_n^\varepsilon)^2]^{1/2} = [M(\max_{1\leqslant r\leqslant n} Q_r^\varepsilon)^2]^{1/2},$$

и

(29) $$M[\max_{1\leqslant r\leqslant n} Q_r^\varepsilon]^2 \leqslant M[\max_{1\leqslant r\leqslant n} (Q_r^\varepsilon)^2].$$

Далее, так как согласно (21)

$$Q_r^\varepsilon = \theta_r - \theta_r^\varepsilon = \sum_{i=1}^{r} p_i^{(r,\varepsilon)} \eta_i,$$

где $p_i^{(r,\varepsilon)} = \delta_i^{(r-1)}[b(i-1) - \beta_{i-1}^\varepsilon]$ числа, зависящие лишь от коэффициентов системы (1), (2) до момента $r$ и от $\varepsilon$, то ясно, что для любого $n$ случайная последовательность $(Q_r^\varepsilon, \mathscr{F}_r^0)$, $r = 1, \ldots, n$, образует квадратично интегрируемый мартингал. Поэтому, согласно следствию к теореме 2.4 из [1], стр. 50,

(30) $$M[\max_{1\leqslant r\leqslant n} (Q_r^\varepsilon)^2] \leqslant 4M(Q_n^\varepsilon)^2.$$

Из (28)-(30) вытекает, что

(31) $$M(M_n^\varepsilon) \leqslant 2[M(Q_n^\varepsilon)^2]^{1/2}.$$

Так как $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — независимые случайные величины с $M\eta_i^2 = 1$ и $M\eta_i\eta_j = 0$ $(i \neq j)$, то

(32) $$M(Q_n^\varepsilon)^2 = M\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k^{(n,\varepsilon)} \eta_k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} (p_k^{(n,\varepsilon)})^2.$$

Допустим теперь, что

(33) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (p_k^{(n,\varepsilon)})^2 \leqslant B(1+C)\varepsilon^2.$$

Так как согласно (25)-(27), (31) и (32)

(34) $$0 \leqslant s^0 - s^\varepsilon \leqslant HM\{\sup_{n\in N}(\theta_n - \theta_n^\varepsilon)\} = HM(M_\infty^\varepsilon) =$$
$$= H\lim_{n\to\infty} M(M_n^\varepsilon) = 2H\lim_{n\to\infty}[M(Q_n^\varepsilon)^2]^{1/2} =$$
$$= 2H\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}(p_k^{(n,\varepsilon)})^2\Big]^{1/2},$$

то из (30) следует

$$0 \leqslant s^0 - s^\varepsilon \leqslant 2H[B(1+C)]^{1/2}\varepsilon.$$

Следовательно, для доказательства соотношения (22) достаточно доказать справедливость (33). С этой целью установим еще две леммы.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $(a_1(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет условию* (II) *из* § 1. *Тогда для всех* $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=k}^{n} a_1^2(j)\Big) \leqslant C < \infty, \tag{35}$$

*где константа* $C$ *определяется из* (24).

Доказательство. Для $n = 1, 2, \ldots, N$ соотношение (35) непосредственно вытекает из определения $C$. Поэтому достаточно доказать, что из того, что (35) выполнено для некоторого $n \geqslant N$, следует, что также

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(\prod_{j=k}^{n+1} a_1^2(j)\Big) \leqslant C.$$

Действительно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(\prod_{j=k}^{n+1} a_1^2(j)\Big) = a_1^2(n+1)\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j=k}^{n} a_1^2(j)\Big) + 1\Big] \leqslant q(1+C) \leqslant C.$$

Последнее неравенство при этом выводится из того, что, согласно (24), $q/(1-q) \leqslant C$.

Лемма 3. *Для* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливо*

$$[b(n) - \beta_n^\varepsilon]^2 \leqslant B\varepsilon^2,$$

*где константа* $B$ *определяется из* (23).

Доказательство. Имеем

$$[b(n) - \beta_n^\varepsilon]^2 = \left(b(n) - \frac{P_\varepsilon(n)}{[Q_\varepsilon(n)]^{1/2}}\right)^2 = \tag{36}$$

$$= Q_\varepsilon^{-1}(n)\,[Q_\varepsilon(n)b^2(n) + P_\varepsilon^2(n) - 2b(n)Q_\varepsilon^{1/2}(n)P_\varepsilon(n)].$$

Полагая

$$U = Q_\varepsilon(n)b^2(n) + P_\varepsilon^2(n) \quad \text{и} \quad V = 2b(n)Q_\varepsilon^{1/2}(n)P_\varepsilon(n),$$

и замечая, что

$$U - V = Q_\varepsilon(n)\,[b(n) - \beta_n^\varepsilon]^2 \geqslant 0,$$

и что

$$V = 2Q_\varepsilon^{1/2}(n)b(n)A_1(n+1)\,[b^2(n) + a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon] \geqslant 0$$

в силу условия (IV), имеем

$$0 \leqslant (U-V)^2 \leqslant (U-V)(U+V) = U^2 - V^2.$$

Таким образом, из (36) следует

(37)
$$[b(n)-\beta_n^\varepsilon]^2 = Q_\varepsilon^{-1}(n)(U-V) = Q_\varepsilon^{-1}(n)(U^2-V^2)^{1/2} =$$
$$= Q_\varepsilon^{-1}(n)[Q_\varepsilon^2(n)b^4(n) - 2P_\varepsilon^2(n)Q_\varepsilon(n)b^2(n) + P_\varepsilon^4(n)]^{1/2} =$$
$$= Q_\varepsilon^{-1}(n)|Q_\varepsilon(n)b^2(n) - P_\varepsilon^2(n)| =$$
$$= Q_\varepsilon^{-1}(n)|b^2(n)\varepsilon^2 - a_1^4(n)A_1^2(n+1)(\gamma_n^\varepsilon)^2 - a_1^2(n)b^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon| =$$
$$= \max\left\{\frac{b^2(n)\varepsilon^2}{Q_\varepsilon(n)};\ \frac{a_1^4(n)A_1^2(n+1)(\gamma_n^\varepsilon)^2}{Q_\varepsilon(n)} + \frac{a_1^2(n)b^2(n)A_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon}{Q_\varepsilon(n)}\right\}.$$

Так как $Q_\varepsilon(n) \geqslant A_1^2(n+1)b^2(n)$, находим, что

(38)
$$\frac{b^2(n)\varepsilon^2}{Q_\varepsilon(n)} \leqslant \frac{b^2(n)\varepsilon^2}{A_1^2(n+1)b^2(n)} \leqslant \varepsilon^2 \underline{A}_1^{-1}$$

и

(39)
$$\frac{a_1^2(n)b^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon}{Q_\varepsilon(n)} \leqslant \frac{a_1^2(n)b^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon}{A_1^2(n+1)b^2(n)} = a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon.$$

Из $Q_\varepsilon(n) \geqslant a_1^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon$ следует

(40)
$$\frac{a_1^4(n)A_1^2(n+1)(\gamma_n^\varepsilon)^2}{Q_\varepsilon(n)} \leqslant \frac{a_1^4(n)A_1^2(n+1)(\gamma_n^\varepsilon)^2}{a_1^2(n)A_1^2(n+1)\gamma_n^\varepsilon} = a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon.$$

Учитывая (38)-(40), из (37) получаем

(41)
$$[b(n)-\beta_n^\varepsilon]^2 \leqslant \max\{\underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2;\ 2a_1^2(n)\gamma_n^\varepsilon\}.$$

Замечая теперь, что согласно предположению (II) для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_1^2(n) \leqslant \max\{q;\ \max_{0\leqslant n\leqslant N} a_1^2(n)\},$$

и что $0 \leqslant \gamma_n^\varepsilon \leqslant \underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2$ (лемма 1), из (41) получаем

$$[b(n)-\beta_n^\varepsilon]^2 \leqslant \max\{\underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2;\ 2\underline{A}_1^{-1}\varepsilon^2 \max\{q;\ \max_{0\leqslant n\leqslant N} a_1^2(n)\}\} = B\varepsilon^2.$$

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Опираясь на леммы 2 и 3, легко теперь завершить доказательство утверждения (22) теоремы. Действительно, согласно этим леммам для $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k^{(n,\varepsilon)})^2 = \sum_{k=1}^{n}(\delta_k^{(n-1)})^2[b(k-1)-\beta_{k-1}^\varepsilon]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=k}^{n-1} a_1^2(j)\Big)[b(k-1)-\beta_{k-1}^\varepsilon]^2 + [b(n-1)-\beta_{n-1}^\varepsilon]^2 \leqslant$$
$$\leqslant B\varepsilon^2\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=k}^{n-1} a_1^2(j)\Big)+1\Big\} \leqslant B(1+C)\varepsilon^2.$$

Утверждение (33), а следовательно и (22), доказано.

Осталось рассмотреть случай $s^0 = \infty$.

В этом случае существует последовательность $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ марковских моментов, принадлежащих классу $\mathfrak{M}^0$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} M\{f(\tau_n) + h(\tau_n)\theta_{\tau_n}\} = \infty. \tag{42}$$

Если вместе с этим

$$\lim_{n\to\infty} M\{f(\tau_n) + h(\tau_n)\theta^\varepsilon_{\tau_n}\} = \infty,$$

то, согласно (7), справедливость утверждения $s^\varepsilon = \infty$ очевидна. Предположим теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} M\{f(\tau_n) + h(\tau_n)\theta^\varepsilon_{\tau_n}\} < \infty. \tag{43}$$

Тогда из (42) и (43) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} M\{h(\tau_n)(\theta_{\tau_n} - \theta^\varepsilon_{\tau_n})\} &= \\ = \lim_{n\to\infty} M\{f(\tau_n) + h(\tau_n)\theta_{\tau_n}\} &- \lim_{n\to\infty} M\{f(\tau_n) + h(\tau_n)\theta^\varepsilon_{\tau_n}\} = \infty. \end{aligned} \tag{44}$$

С другой стороны, так как для любого $n$

$$M\{h(\tau_n)(\theta_{\tau_n} - \theta^\varepsilon_{\tau_n})\} \leqslant HM\{\sup_{n\in N}(\theta_n - \theta^\varepsilon_n)\},$$

то, согласно (34) и (33),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} M\{h(\tau_n)(\theta_{\tau_n} - \theta^\varepsilon_{\tau_n})\} &\leqslant HM\{\sup_{n\in N}(\theta_n - \theta^\varepsilon_n)\} \leqslant \\ &\leqslant 2H[B(1+C)]^{1/2}\varepsilon < \infty. \end{aligned} \tag{45}$$

Противоречие между соотношениями (44) и (45) доказывает, что (43) не может иметь место.

Теорема 2 полностью доказана.

**4. Оценка скорости сходимости цен $s^\varepsilon$ к $s^0$ при $\varepsilon \to 0$. II (частный случай).** В системе (1), (2) положим теперь $a_0(n) = 0$, $a_1(n) = b(n) = 1$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $A_0(n) = 0$, $A_1(n) = 1$ для $n = 1, 2, \ldots$ Заменяя $\theta$ через $S$, мы получаем, как важный частный случай системы (1), (2), систему

$$S_{n+1} = S_n + \eta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

$$\xi^\varepsilon_n = S_n + \varepsilon\tilde{\eta}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{47}$$

с начальным условием $S_0 = 0$, где $\varepsilon \geqslant 0$ — константа, $\eta_n$ и $\tilde{\eta}_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону $N(0, 1)$. Рассмотрим снова функцию выигрыша $g(n, x)$ вида (3) и определим цены $s^0$ и $s^\varepsilon$ с помощью (5) и (6) соответственно (с заменой $\theta$ на $S$).

Таким образом, рассматривается задача оптимальной остановки последовательности сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$$

независимых, распределенных по $N(0,1)$-закону, случайных величин по наблюдениям последовательности $S_n + \varepsilon\tilde{\eta}_n$.

Заметим, что невозможно непосредственно применить теорему 2, так как предположение (II) из § 1 не выполнено. Оказывается однако, что имеет место

Теорема 3. *Пусть частично наблюдаемая случайная последовательность* $(S, \xi^\varepsilon)$ *определяется рекуррентными уравнениями* (46) *и* (47). *Пусть функция выигрыша* $g(n, x)$ *имеет вид* (3), *причем выполняется* (4). *Тогда, в случае* $s^0 < \infty$, *цена* $s^\varepsilon$ *при* $\varepsilon \to 0$ *сходится к цене* $s^0$ *и эта сходимость определяется соотношениями*

(48)
$$0 \leqslant s^0 - s^\varepsilon \leqslant 2HC(\varepsilon) \leqslant 2H\varepsilon,$$

*где*

$$C(\varepsilon) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon^2} - \tfrac{1}{2}}\,.$$

*В случае* $s^0 = \infty$, *имеет место* $s^\varepsilon = \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Заметим, что при доказательстве теоремы 1 условие (II) из § 1 понадобилось лишь для того, чтобы обеспечить выполнение условий (I)-(IV) (см. [1], стр. 505). Но легко видеть, что эти условия (I)-(IV) также выполняются, если выполнены только условия (I) и (III) из § 1 и к тому же условие

(II)* $a_1^2(n) \leqslant C < \infty$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Но так как для системы (46), (47) условие (II)* очевидно выполнено (достаточно положить $C = 1$), то ясно, что теорема 1 применима к ней. Следовательно,

$$s^\varepsilon = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^S} M\{f(\tau) + h(\tau) S_\tau^\varepsilon\},$$

где случайная последовательность $S^\varepsilon = (S_n^\varepsilon, \mathscr{F}_n^0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяется рекуррентным соотношением

$$S_{n+1}^\varepsilon = S_n^\varepsilon + \beta_n^\varepsilon \eta_{n+1}, \qquad S_0^\varepsilon = 0,$$

где

$$\beta_n^\varepsilon = P_\varepsilon(n) Q_\varepsilon^{-1/2}(n), \qquad P_\varepsilon(n) = 1 + \gamma_n^\varepsilon, \qquad Q_\varepsilon(n) = 1 + \gamma_n^\varepsilon + \varepsilon^2.$$

В дальнейшем предположим сначала $s^0 < \infty$. Обозначим $p_i^\varepsilon = 1 - \beta_{i-1}^\varepsilon$. Тогда, аналогично как при выводе соотношения (34), получаем

$$0 \leqslant s^0 - s^\varepsilon \leqslant 2H \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} (p_k^\varepsilon)^2\right]^{1/2}.$$

Утверждение (48) теоремы 3 отсюда будет вытекать, если доказать, что

(49) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(p_k^\varepsilon)^2 \leqslant C^2(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2.$$

Тот способ, который в доказательстве теоремы 2 при выводе аналогичного соотношения (33) был использован, в данной ситуации не применим, так как утверждение (35) леммы 2 при нарушении условия (П) не верно. Используем здесь другой метод, обоснованный на том факте, что в случае системы (46), (47) последовательность чисел $\gamma_n^\varepsilon = M\big(S_n - M(S_n \mid \mathscr{F}_n^\varepsilon)\big)^2$ строго монотонно возрастает.

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место*

$$\gamma_n^\varepsilon < \gamma_{n+1}^\varepsilon.$$

*Далее,*

(50) $$\lim_{n\to\infty}\gamma_n^\varepsilon = C^2(\varepsilon).$$

Доказательство. Заметим, что, согласно (16), в случае системы (46), (47) последовательность $(\gamma_n^\varepsilon)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

(51) $$\gamma_{n+1}^\varepsilon = \gamma_n^\varepsilon + 1 - \frac{(1+\gamma_n^\varepsilon)^2}{1+\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2},$$

которое путем простых преобразований переходит в

(52) $$\gamma_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^2\frac{1+\gamma_n^\varepsilon}{1+\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2}.$$

Докажем теперь методом индукции, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $\gamma_n^\varepsilon < C^2(\varepsilon)$. Ясно, что $\gamma_0^\varepsilon = 0 < C^2(\varepsilon)$. Предположим, что $\gamma_n^\varepsilon < C^2(\varepsilon)$ для некоторого $n$. Тогда, согласно (52),

$$\gamma_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{1+\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2}\right) < \varepsilon^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{1+C^2(\varepsilon)+\varepsilon^2}\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon^2\big(1+C^2(\varepsilon)\big)}{1+C^2(\varepsilon)+\varepsilon^2} = C^2(\varepsilon)\,\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^2/C^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2+1+C^2(\varepsilon)} = C^2(\varepsilon).$$

Последнее равенство при этом вытекает из того, что

$$C^2(\varepsilon)[1+C^2(\varepsilon)] = [\tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}][\tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\varepsilon^2}+\tfrac{1}{2}] = \tfrac{1}{4}(1+4\varepsilon^2)-\tfrac{1}{4} = \varepsilon^2,$$

и, следовательно,

(53) $$\varepsilon^2/C^2(\varepsilon) = 1 + C^2(\varepsilon).$$

Итак, неравенство $\gamma_n^\varepsilon < C^2(\varepsilon)$ установлено для всех $n$. Далее, согласно (52),

$$\gamma_{n+1}^\varepsilon = \gamma_n^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^2/\gamma_n^\varepsilon}{\varepsilon^2 + 1 + \gamma_n^\varepsilon}.$$

Используя неравенство $\gamma_n^\varepsilon < C^2(\varepsilon)$ и (53), получаем

$$\gamma_{n+1}^\varepsilon > \gamma_n^\varepsilon \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^2/C^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2 + 1 + C^2(\varepsilon)} = \gamma_n^\varepsilon,$$

что доказывает первую часть леммы.

Из монотонности и ограниченности последовательности $(\gamma_n^\varepsilon)$ следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^\varepsilon = x.$$

Полагая в (52), что $n \to \infty$, ясно, что этот предел $x$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$x = \varepsilon^2 \frac{1+x}{1+x+\varepsilon^2},$$

которое, как легко проверить, имеет единственное положительное решение $x = C^2(\varepsilon)$. Это доказывает (50).

Доказательство теоремы 3 (продолжение). Из леммы 1 или из соотношения (52) ясно, что $\gamma_n^\varepsilon \leqslant \varepsilon^2$ для $n = 1, 2, \ldots$, что вместе с (50) доказывает факт

(54) $$C^2(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2,$$

который, разумеется, можно также проверить непосредственно.

Рекуррентное уравнение (51) можно также записать в виде

(55) $$\gamma_{n+1}^\varepsilon = \gamma_n^\varepsilon + 1 - (\beta_n^\varepsilon)^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что $(\beta_n^\varepsilon)^2 < 1$. С другой стороны, очевидно,

$$\beta_n^\varepsilon = \frac{1+\gamma_n^\varepsilon}{(1+\gamma_n^\varepsilon+\varepsilon^2)^{1/2}} > 0,$$

так что $0 < \beta_n^\varepsilon < 1$. Отсюда и из (55) вытекает, что

$$(1-\beta_n^\varepsilon)^2 < 1 - (\beta_n^\varepsilon)^2 = \gamma_{n+1}^\varepsilon - \gamma_n^\varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо

(56) $$\sum_{k=1}^{n} (p_k^\varepsilon)^2 = \sum_{k=1}^{n} (1-\beta_{k-1}^\varepsilon)^2 < \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k^\varepsilon - \gamma_{k-1}^\varepsilon) = \gamma_n^\varepsilon.$$

Используя теперь вторую часть леммы 4, из (56) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(p_k^\varepsilon)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\gamma_n^\varepsilon = C^2(\varepsilon),$$

что вместе с (54) доказывает (49).

Случай $s^0 = \infty$ трактуется так же, как в случае теоремы 2, и таким образом теорема 3 доказана.

Автор благодарит А. Н. Ширяева за постановку задачи и за ценные указания.

### Цитированная литература

[1] Р. Ш. Липцер и А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, Наука, Москва 1974.

[2] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ*, Наука, Москва 1976.

SEKTION MATHEMATIK
TECHNISCHE HOCHSCHULE
90 KARL-MARX-STADT, DDR

*Поступило в редакцию 21. 2. 1977*

---

H. FÄHRMANN (Karl-Marx-Stadt)

## O ZBIEŻNOŚCI WARTOŚCI PRZY OPTYMALNYM PRZERWANIU CIĄGÓW LOSOWYCH W PRZYPADKU NIEPEŁNEJ INFORMACJI

### STRESZCZENIE

Rozpatruje się problem optymalnego przerwania ciągu losowego $(\theta_n)$ przy założeniu, że obserwować można jedynie ciąg losowy $(\xi_n^\varepsilon)$, który zawiera niepełną informację o ciągu $(\theta_n)$. Ciągi $(\theta_n)$ i $(\xi_n^\varepsilon)$ zdefiniowane są za pomocą (1) i (2), gdzie $\varepsilon > 0$ jest stałą, a $\eta_n$ i $\tilde{\eta}_n$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, 1)$. Funkcja zysku ma postać

$$g(n, x) = f(n) + h(n)x.$$

Przy pewnych założeniach o ciągach $a_0(n), a_1(n), b(n), A_0(n)$ i $A_1(n)$ problem ten sprowadza się do zagadnienia optymalnego przerwania przy zupełnej informacji. Wykazuje się, że dla $\varepsilon \to 0$ wartość $s^\varepsilon$ w rozważanym problemie o niepełnej informacji jest zbieżna do wartości $s^0$ optymalnego przerwania $(\theta_n)$ przy zupełnej informacji, gdzie zbieżność jest rzędu co najmniej $\varepsilon$. Jako zastosowanie podaje się przypadek, w którym $\theta_n$ jest sumą $n$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładach $N(0, 1)$.

---